

1 Introduction et contexte

L'idée est d'étudier sur un cas simple de flexion, le comportement des tétraèdres linéaires, quadratiques complets avec intégration complète, ou avec sous-intégration.

2 Géométrie et maillages

On considère une poutre rectangulaire de dimension $100 \times 10 \times 10 \text{mm}^3$. La poutre est maillée d'une part à l'aide du logiciel "stamm", en un maillage réglé d'hexaèdres quadratiques complets à 27 noeuds. D'autre part on utilise le logiciel "gmsh" via le fichier tetra.geo, pour obtenir des maillages de tétraèdres linéaires, puis quadratiques. Ensuite, via le logiciel "msh2her.pl" on transforme les fichiers de maillage produits par gmsh, en fichiers compatibles herezh. On obtient les fichiers suivants:

- poutre_hexa.her : le maillage en hexaèdres quadratiques complets ($20 \times 1 \times 1$ elements): 27 noeuds et 27 points d'intégration,
- tetra_lin.her : un premier maillage assez grossier de tétraèdres linéaires (86 noeuds et 199 éléments) : 4 noeuds et 1 point d'intégration,
- tetra_lin_fin.her : un second maillage assez fin de tétraèdres linéaires (1769 noeuds et 6281 éléments),
- tetra_quadQ.her: un maillage quadratique complet et intégration quadratique complète, proche du découpage du premier maillage linéaire (444 noeuds et 197 éléments) : 10 noeuds et 4 point d'intégration,
- tetraQ_cm1pti.her : le même découpage quadratique, mais avec une sous intégration via un seul point d'intégration par élément.
- tetraQ_fin_1pti.her : un maillage plus fin quadratique avec un point d'intégration.

3 Mise en données et simulation

La poutre est encastree à une extrémité et soumise à l'autre extrémité à une force verticale, appliquée sous forme d'une charge surfacique sur la face externe verticale. Le comportement est isotrope élastique linéaire.

Les fichiers de mise en données et de pilotage des sorties de résultats :

- hexa_ref.info et hexa_ref.CVisu : cas des hexaèdres quadratiques,
- tetra.info et tetra.CVisu : contiens les différents types de calcul effectués avec les éléments tétraédriques.

3.1 Résultats et analyse

Le tableau (1) présente les résultats sous forme de déformée et temps de calcul. On remarque que les tétraèdres linéaires à nombre d'éléments égal sont nettement plus rapides que les tétraèdres quadratiques: entre 4 et 5 fois plus rapide, de l'ordre du rapport du nombre de points d'intégration, même si cela n'est pas exact, car une fonction d'interpolation quadratique est plus coûteuse que celle linéaire. Donc des éléments linéaires très rapides, mais qui donnent des résultats totalement éloignés de la réalité ! En fait, ces éléments sont beaucoup trop rigides, il y a un phénomène de blocage volumique, qui ne peut pas être résolu simplement par sous-intégration compte tenu du nombre de points d'intégration déjà égal à 1 donc au nombre minimum.

Une solution pour améliorer le résultat est de raffiner le maillage. On observe que le maillage fin linéaire conduit à un résultat plus proche de la réalité, mais au prix d'un temps de calcul qui explose et d'une précision qui reste médiocre, ce n'est donc pas la bonne solution en général avec ce type d'élément. Cependant, il faut noter que ces éléments ont l'avantage d'être très robustes à la distorsion du maillage ce qui est un autre avantage indéniable.

Concernant les éléments quadratiques tétraédriques, les résultats obtenus sont du même ordre de précision que la référence pour un temps de calcul environ moitié moindre: c'est donc une très bonne solution quand c'est possible. Le facteur limitant est en général l'apparition de distorsion d'éléments telle que cela induit des jacobiens négatifs ! Il faut donc réussir à obtenir un maillage initial de bonne qualité.

On pourrait espérer obtenir des résultats de qualité équivalente, à l'aide d'éléments quadratiques sous-intégrés. En pratique, cela ne fonctionne pas, un point d'intégration n'est pas suffisant pour obtenir à nombre d'éléments identiques, un résultat correct. Cependant, en raffinant le maillage quadratique, on se rapproche de la solution de référence (tout en restant assez loin), ceci avec une augmentation importante du temps de calcul. La solution sous-intégrée peut néanmoins être intéressante lorsque l'on a une loi de comportement dite incompressible (donc avec une raideur de variation de volume très importante comparée au changement de forme). Dans ce cas, via une sous-intégration ou une intégration sélective, on peut éviter un blocage volumique du comportement global.

Table 1: Comparaisons des différents résultats

éléments finis	temps CPU	déformée
hexaèdres quadratiques (référence)	1.82s	0.1905
tétraèdres linéaires (maillage grossier)	0.24s	0.069
tétraèdres linéaires (maillage fin)	8.37s	0.165
tétraèdres quadratiques (4 points d'intégration)	1.155s	0.19
tétraèdres quadratiques (1 point d'intégration) (premier type de stabilisation d'hourglass)	1.55s	1.18
tétraèdres quadratiques (1 point d'intégration) (second type de stabilisation d'hourglass)	1.64s	0.89
tétraèdres quadratiques fin (1 point d'intégration) (premier type de stabilisation d'hourglass)	7.79s	0.224
tétraèdres quadratiques fins (1 point d'intégration) (second type de stabilisation d'hourglass)	6.85s	0.223