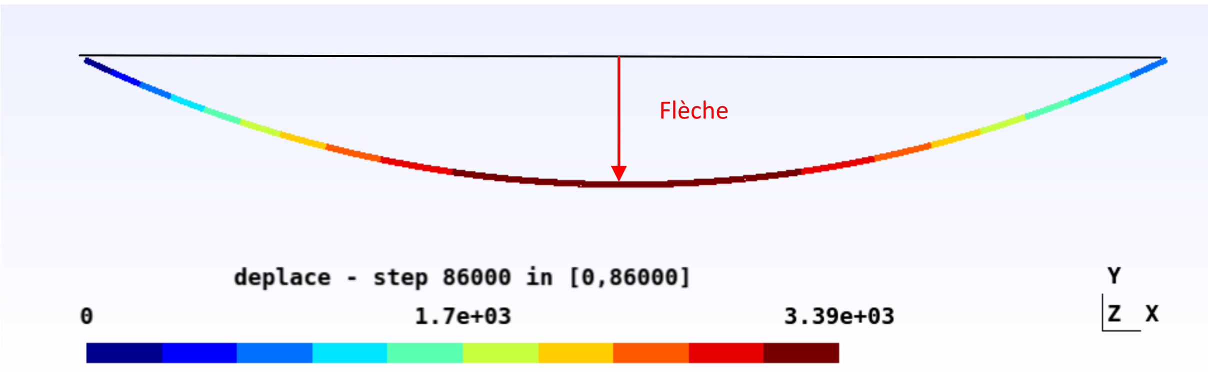
ENSIBS - IRDL

Tutoriel : Chainette

Mise en donnée de l'algorithme de relaxation dynamique et étude du calcul

Gaëtan ROMAN

02/06/2017



Sommaire

I) Introduction :

L'objectif de cette étude de cas est l'utilisation de la méthode de relaxation dynamique pour trouver une solution quasi en équilibre d'un problème a priori instable au sens classique des éléments finis. De plus, nous verrons comment mettre en œuvre la mise en donnée, mais aussi une étude théorique pour comparer nos résultats expérimentaux. Cette étude peut par exemple nous être utile pour dimensionner un câble entre deux pylônes EDF voire un pont. (voir figure 8)

II) Objectif de l'étude

L'idée est d'étudier le comportement d'une chaine soumise à l'action de la pesanteur et à une force de traction. Initialement la chaîne est horizontale. Une des extrémités est fixe, l'autre peut se mouvoir horizontalement uniquement et est soumise à une force de traction horizontale de 5000N ainsi qu'au poids de la chaîne. La chaîne est constituée de n maillons, tel que sa longueur totale est de 30m. Les maillons sont en acier et ont pour longueur 20cm. Pour simplifier, on considérera que chaque maillon peut-être assimilé à un cylindre de 5cm de diamètre. On cherche à déterminer la forme finale que va prendre la chaîne. La limite élastique de l'acier est supposée être de 200MPa. La particularité de la chaine est quelle n'a pas de rigidité en flexion, d'une manière similaire à un câble ou une corde.

Mise en donnée du problème :

- Maillage : On modélisera la chaine par une suite d'éléments de barres 1D linéaire (150 éléments)
- Algorithme : Le premier calcul sera avec un algo de Newton-Raphson classique (par défaut) pour un problème quasi-statique. Le deuxième calcul effectué par un algorithme de relaxation dynamique avec amortissement cinétique.
- Elasticité linéaire

Nous allons donc observer que pour un calcul statique celui-ci ne fonctionnera pas. Cependant en appliquant une méthode de relaxation dynamique avec un amortissement cinétique celui-ci fonctionnera.
De plus nous allons étudier la vitesse de convergence vers la solution en fonction du paramètre lambda. On cherchera une valeur optimum dans l'intervalle [0,2 ; 2].

Puis nous allons nous poser les questions suivantes typiques de bureau d'étude :

- Quelle doit-être la force de tension pour avoir une flèche de 50 cm ? est-il possible d'appliquer cette force ?
- Existe-t-il toujours une solution, quelque soit la flèche recherchée ? en déduire alors la flèche minimale possible.

III) Mise en donnée de la chaînette

Nous allons voir comment mettre en donnée le maillage de la chainette puis étudier nos deux algorithmes.

a) Maillage de la chaînette

Rappel : La chaîne est constituée de 150 maillons, tel que sa longueur totale est de 30m. Les maillons sont en acier et ont pour longueur 20cm. On modélisera la chaine par une suite d'éléments de barres 1D linéaire (150 éléments).

Pour cela on utilisera stamm permettant de créer rapidement des maillages simples telle que des plaques, des poutres, des câbles etc… Il suffit pour cela de suivre les étapes suivantes :

```
#######################################################################
#                                                                     #
#                              STAMM                                  #
#              (maillage automatique de pieces simples)               #
#######################################################################
#  Copyright ◆ 1997-2007 Gerard Rio,    gerard.rio@univ-ubs.fr        #
#  All rights reserved.              http://www-lg2m.univ-ubs.fr/~rio #
#                                                                     #
#######################################################################
 version  03.11 , compatible avec la version Herezh++6.395



 type d'elements : (1D, 2D,  3D ) ? 1D

 choix lu: 1D
 longueur de la barre ? (un reel) : 30000

 longueur lue : 30000
 nombre d'elements voulu ? (un entier) : 150
nombre d'element lu : 150
 nom du fichier de sortie ?  : chainette

 nom lue : chainette
 un autre maillage ? (rep o ou n )  n

 ==============================================================
 |                        fin stamm                           |
 ==============================================================
```


Figure 1: Stamm

Nous obtenons ainsi le maillage suivant lors de l'utilisation de hz_visuMail.pl :

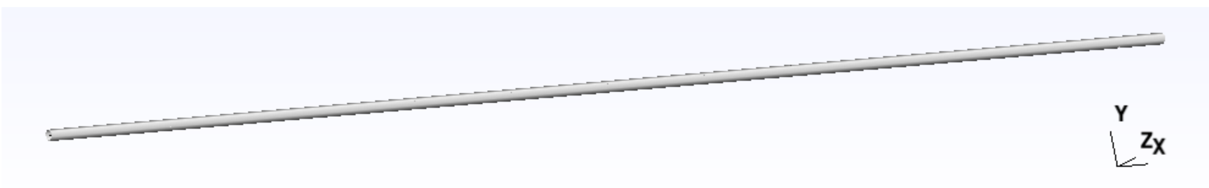


Figure 2: Maillage de la chainette

b) Principe du calcul

Rappel : L'idée est d'étudier le comportement d'une chaine soumise à l'action de la pesanteur et à une force de traction. Initialement la chaîne est horizontale. Une des extrémités est fixe et l'autre peut se mouvoir horizontalement uniquement et est soumise à une force de traction horizontale de 5000N.

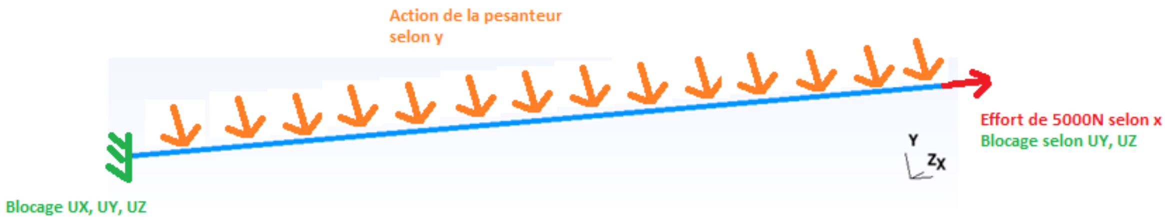


Figure 3: Schéma de principe

On cherchera à déterminer la forme finale que va prendre la chaîne et de connaître la flèche. La limite élastique de l'acier est supposée être de 200MPa.

c) Algorithme de Newton-Raphson

Nous allons mettre en donnée ce problème :

```
#----------------------------------------------------
# definition de la dimension de l'espace de travail |
#----------------------------------------------------
 dimension   3
```

Choix de la dimension de l'espace de travail

```
#---------------------------------------------------------------
# definition facultative du niveau d'impression (entre 0 et 10)|
#---------------------------------------------------------------
 niveau_commentaire   3
```

Niveau de commentaire affiché sur le terminal

```
#-------------------------------
# definition du type de calcul |
#-------------------------------
 TYPE_DE_CALCUL
non_dynamique avec     plus visualisation
```

Calcul de type non-dynamique

Mot clé permettant de créer le fichier de sorti.

```
#--------------------------------------
#| definition du (ou des) maillage(s) |
#--------------------------------------
 # -- def maillage
 < chaine.her
```

Insertion du maillage de la chainette

```
#======================================
#| definition des lois de comportement|
#--------------------------------------
            choix_materiaux ----------
#----------------------------------------
# Elements    |   Nom   Materiau        |
#----------------------------------------
E_tout acier
```

Nom du matériau

```
        materiaux #----------
#-------------------------------------------
# Nom Materiau    |      Type loi         |
#-------------------------------------------
  acier         ISOELAS1D
# .......  loi de comportement isoelastique 1D ........
#    module d'young :
 210000  0.3
#---------------------------------------- fin def des lois de comportement -
-----------------------
#    --- divers stockages (1) -------
 sections    #--------#
E_tout  1963.5
 masse_volumique   #--------#
E_tout  1

       charges #------------#
N_fi PONCTUELLE 5e+03 0 0
E_to VOLUMIQUE  0. -7.7005e-5 0.

       blocages #------------#
#------------------------------------------------------------
#  nom du maillage | Ref noeud |  Blocages
#------------------------------------------------------------
N_deb  UX  UY  UZ
N_fi  UY  UZ
      controle #------------
#----------------------------
# PARAMETRE    |  VALEUR   |
#----------------------------
 SAUVEGARDE 1
 DELTAt  0.1
 TEMPSFIN 1
 DELTAtMAXI 0.1
      para_affichage #------------
#----------------------------
# PARAMETRE    |  VALEUR   |
#----------------------------
 FREQUENCE_SORTIE_FIL_DU_CALCUL 1

#  ----------------------------------------------------------------------------
------------
      resultats  pas_de_sortie_finale_
      COPIE 0
#
  _fin_point_info_
```

Définition du type de loi

Définition des caractéristiques de la loi (module et coefficient de poisson de l'acier)

Dimension du matériau

Charge de traction de type ponctuelle sur le nœud final qui est dans la ref : N_fi

Charge simulant la pesanteur par unité de volume sur la chainette

Blocage du nœud initial qui se trouve dans la ref : N_deb

Permet la translation uniquement selon X via un blocage suivant y et z

Réglage du pas de temps

Temps fin du calcul

Valeur maximale du pas de temps donc ici nous aurons 10 incréments si le calcul converge

Lorsqu'on exécute cette mise en donnée nous obtenons cela sur le terminal :

```
======================================================================
INCREMENT DE CHARGE : 266  intensite 2e-07  t= 2e-07 dt= 1.47412e-23
======================================================================
 resolution du systeme lineaire global (equilibre global) norme de delta_ddl inf
inie nan
==============================================================================
  *** NON convergence du a un pb de resolution du systeme lineaire    *********
==============================================================================
======================================================================
INCREMENT DE CHARGE : 266  intensite 2e-07  t= 2e-07 dt= 8.51085e-24
======================================================================
======================================================================
INCREMENT DE CHARGE : 267  intensite 2e-07  t= 2e-07 dt= 8.51085e-24
======================================================================
======================================================================
INCREMENT DE CHARGE : 268  intensite 2e-07  t= 2e-07 dt= 8.51085e-24
======================================================================
======================================================================
INCREMENT DE CHARGE : 269  intensite 2e-07  t= 2e-07 dt= 8.51085e-24
======================================================================
======================================================================
INCREMENT DE CHARGE : 270  intensite 2e-07  t= 2e-07 dt= 1.20362e-23
======================================================================
 maximum d'essai d'increments fixes atteint : 400
```

Figure 4: Non convergence de l'algorithme de Newton-Raphson

On observe que notre algorithme de Newton-Raphson ne converge pas. En effet, durant le calcul notre pas de temps à tendance à tendre vers zéro. Cette mise en donnée ne nous permet pas d'obtenir la position d'équilibre de la chainette. Ce comportement est normal, car la méthode de Newton ne permet pas d'obtenir une solution pour un problème instable.

Pour y remédier nous allons utiliser un algorithme de relaxation dynamique avec un amortissement cinétique.

d) Algorithme de relaxation dynamique avec amortissement cinétique

Nous allons mettre en donnée ce problème :

Légende : En vert les modifications du précédent fichier.info permettant de réaliser la mise en donnée pour un algorithme de relaxation dynamique

```
#--------------------------------------------------
# definition de la dimension de l'espace de travail |
#--------------------------------------------------
 dimension   3
#------------------------------------------------------------
# definition facultative du niveau d'impression (entre 0 et 10)|
#------------------------------------------------------------
 niveau_commentaire   5
#--------------------------------
# definition du type de calcul |
#--------------------------------
 TYPE_DE_CALCUL
dynamique_relaxation_dynam avec    plus visualisation

< relaxation.algo
#-------------------------------------
```

Choix de la dimension de l'espace de travail

Niveau de commentaire affiché sur le terminal

Calcul utilisant l'algorithme de relaxation dynamique

Mot clé permettant de créer le fichier de sorti.

Fichier possédant l'amortissement cinétique

Ne pas modifier les paramètres de ces fichiers à part le lambda. Dans la documentation de Herezh ces différents paramètres sont expliqués

```
#| definition du (ou des) maillage(s) |
#--------------------------------------
 # -- def maillage
 < chaine.her
```

Insertion du maillage de la chainette

```
#======================================
#| definition des lois de comportement|
#--------------------------------------
             choix_materiaux ----------
#----------------------------------------
# Elements    |    Nom   Materiau        |
#----------------------------------------
E_tout acier
```

Nom du matériau

```
        materiaux #----------
#------------------------------------------
# Nom Materiau     |       Type loi        |
#------------------------------------------
  acier         ISOELAS1D
```

Définition du type de loi

```
# .......  loi de comportement isoelastique 1D ........
#    module d'young :
 210000  0.3
```

Définition des caractéristiques de la loi

```
#---------------------------------------- fin def des lois de comportement -
-----------------------

#    --- divers stockages (1) -------
 sections    #--------#
E_tout  1963.5
```

Dimension du matériau

```
 masse_volumique   #--------#
E_tout  1
       charges #------------#
N_fi PONCTUELLE 5000 0 0  #5e+03 0 0
```

Charge de traction de type ponctuelle

```
E_to VOLUMIQUE  0. -7.7005e-5 0. #0. -8.e-5 0.
```

Charge simulant la pesanteur sur la chaine

```
       blocages #------------#
#------------------------------------------------------------
#  nom du maillage | Ref noeud |  Blocages
#------------------------------------------------------------
N_deb  UX  UY  UZ
```

Blocage du noeud

```
N_fi  UY  UZ
```

Permet la translation uniquement selon X

```
      controle #------------
#----------------------------
# PARAMETRE     |  VALEUR   |
#----------------------------
 SAUVEGARDE 1
 TEMPSFIN 1
```

Temps fin du calcul

```
 ITERATIONS          6000000
```

Ajouter beaucoup d'itérations

```
 PRECISION           1.e-4#4# 1e-2#3
```

Précision du calcul

Il faut en général une précision plus importante en relaxation dynamique, comparé à du Newton- Raphson classique

```
 NORME               E_cin/E_stat_ET_min(Res,Res/Reac_et_Fext)
```

Changer la norme donc utilisé celle-ci

```
para_affichage ------------
#----------------------------
# PARAMETRE | VALEUR |
#----------------------------
 FREQUENCE_AFFICHAGE_ITERATION     1000
```

Fréquence d'affichage des itérations ici tous les 1000 pour observer ce qui se passe sur le terminal

```
 FREQUENCE_SORTIE_FIL_DU_CALCUL 1

#  ---------------------------------------------------------------------------
------------
      resultats  pas_de_sortie_finale_
      COPIE 0
#
  _fin_point_info_
```

En sortie du calcul nous récupérons, la contrainte selon x, la déformation selon x et la déformée de la chaînette. Nous obtenons ainsi cela :

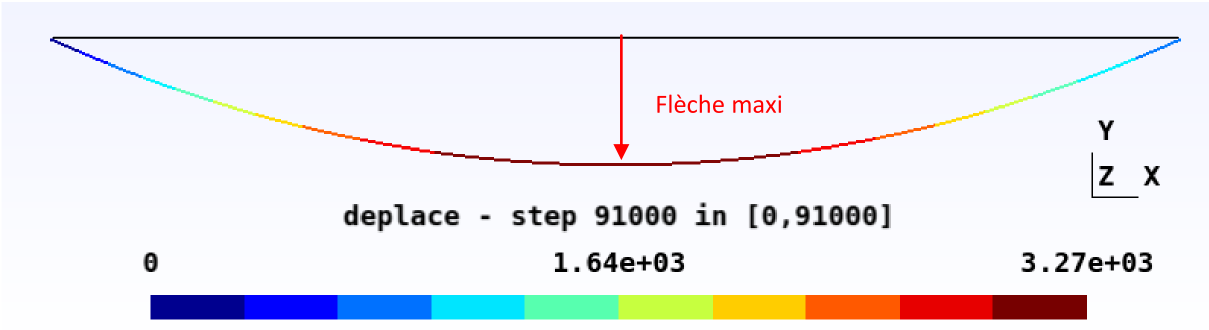


Figure 5: Position d'équilibre de la chainette

Voici sur la figure ci-dessus la forme que prend la chaine lorsque celle-ci est équilibrée statiquement. On observe une flèche de 3270mm lorsque la chaînette est soumise à son propre poids et à un effort de traction de 5000 N. D'ailleurs sa contrainte est bien inférieur à 200MPa donc la chainette ne plastifiera. De plus, sa déformation est très faible, bien inférieur à 1%. On remarque d'ailleurs par rapport à la méthode de Newton-Raphson, qu'il faut beaucoup plus d'itération, mais ces itérations sont chacun très rapide.

IV) Etude de la vitesse de convergence

Rappel : Nous allons étudier la vitesse de convergence vers la solution en fonction du paramètre lambda. On cherchera alors une valeur optimum dans l'intervalle [0,2 ; 2].

a) Avec amortissement cinétique

Il faut garder la même mise en donnée de la partie III) paragraphe d) mais en modifiant le paramètre lambda du fichier de l'amortissement cinétique (relaxation.algo) :

Lambda à modifier entre 0,2 et 2

```
PARA_TYPE_DE_CALCUL
# ..........................................................
# / type d'algorithme /
#..........................................................
# variable_emplacement
typeCalRelaxation= 1   lambda= 0.6#2#   type_calcul_mass= 2
option_recalcul_mass= 3#1 #3#0
parametre_calcul_de_la_masse_   casMass_relax= 3

avec_amortissement_cinetique_
   max_nb_decroit_pourRelaxDyn_ 2
   coef_arret_pourRelaxDyn_ 0
   coef_redemarrage_pourRelaxDyn_ 0.0
   max_deltaX_pourRelaxDyn_ 0.005
   nb_max_dX_OK_pourRelaxDyn_ 10
   nb_deb_testfin_pourRelaxDyn_ 250
fi_parametre_amortissement_cinetique_

mode_debug_= 1000
ARRET_A_EQUILIBRE_STATIQUE_ 2
```

Ne pas modifier les autres paramètres

En modifiant le lambda nous obtenons ainsi ces données :

Lambda	IT convergence
0,2	n
0,3	n
0,4	n
0,5	n
0,6	86584
0,65	92087
0,7	102565
0,8	99572
0,9	106453
1	112579
1,1	n
1,2	121637
1,3	133793
1,4	140337
1,5	137263
1,6	144629
1,7	148226
1,8	148107
1,9	155803
2	158173

Le lambda est un paramètre d’ajustement permettant de pondérer la masse. Donc lambda est en grande partie responsable de la stabilité du processus d’amortissement. Puisque celui-ci va augmenter la valeur de la masse donc améliorer la stabilité. A noter que plus lambda est grand, plus le calcul est stable, mais à l'inverse plus l'amortissement est faible d'où une convergence vers la solution stable plus longue. Il s'agit donc de trouver un compromis.

V) Etude théorique et simulation

Rappel : Questions typiques de bureau d'étude :

- Quelle doit-être la force de tension pour avoir une flèche de 50 cm ? est-il possible d'appliquer cette force ?
- Existe-t-il toujours une solution, quelque soit la flèche recherchée ? en déduire alors la flèche minimale possible.

a) Etude théorique

Dans un premier temps, déterminons théoriquement les valeurs pour obtenir les résultats aux questions précédentes.

L'équation de la chainette est : $y(x) = a\cosh(\frac{x}{a})\ avec\ a = \frac{T_h}{\mu g}$

Nous allons donc utiliser les formules suivantes :

$$a = \frac{l^2 - h^2}{2h}$$

Le paramètre *a* correspond à une constante, *h* est la flèche en m, *l* est la moitié de la longueur totale de la chainette

$$T_h = a\mu g$$

La tension horizontale est exprimée par T_h en N, *a* est la constante définie précédemment, μ est la masse linéique de la chainette en kg/m et *g* est la constante de gravitation en m/s²

Ces formules sont démontrées au lien suivant : cliquer ici

Application Numérique :

- Question 1 : Quelle doit-être la force de tension pour avoir une flèche de 50 cm ? est-il possible d'appliquer cette force ?

Dans un premier temps déterminons la masse de la chaînette :

$$m = \rho_{acier} \times S \times L$$

$$m = 7850 \times \pi 25^2 \times 30000 \times 10^{-9} = 462{,}4\ kg$$

Ensuite déterminons la constante *a* avec une flèche de 50 cm :

$$a = \frac{l^2 - h^2}{2h} = \frac{15^2 - 0{,}5^2}{2 \times 0{,}5} = 224{,}75$$

$$T_h = a\mu g = 224{,}75 \times \frac{462{,}4}{30} \times 9{,}81 = 33983{,}3\ N$$

D'où une contrainte de :

$$\sigma = \frac{T_h}{S} = \frac{33983{,}3}{1963{,}5} = 17{,}31\ MPa$$

Il sera possible d'appliquer une telle force puisque 17,31 MPa < 200 MPa

- Question 2 : Existe-t-il toujours une solution, quelque soit la flèche recherchée ? en déduire alors la flèche minimale possible.

Non il n'existe pas toujours une solution, quelle que soit la flèche recherchée. En effet, pour avoir une flèche proche de zéro il est nécessaire d'avoir une force de tension infiniment grande. Il y aura ainsi rupture de la chainette.

Notre flèche minimale se trouve lorsque nous sommes proches de la résistance élastique de l'acier $Re = 200MPa$.

$$T = S \times \sigma = 1963{,}5 \times 200 = 392\ 700\ N$$

Soit une flèche de :

$$T_h = \frac{l^2 - h^2}{2h}\mu g$$

$$h^2 + \frac{2T_h}{\mu g}h - l^2 = 0$$

Pour déterminer la flèche minimale il faut résoudre cette équation du second degré ainsi nous trouvons :

$$\Delta = b^2 - 4ac = \left(\frac{2T_h}{\mu g}\right)^2 + 4 \times l^2$$

$$\Delta = \left(\frac{2 \times 392700}{\frac{462{,}4}{30} \times 9{,}81}\right)^2 + 4 \times 15^2 = 26981440{,}01 > 0$$

Le discriminant étant positif il y a alors 2 solutions :

$$h = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Ainsi la solution possible est pour celle qui est positive car une distance ne peut être négative d'où :

$$h = \frac{-\left(\frac{2T_h}{\mu g}\right) + \sqrt{\Delta}}{2}$$

$$h = \frac{-\left(\frac{2 \times 392700}{\frac{462{,}4}{30} \times 9{,}81}\right) + \sqrt{26981440{,}01}}{2}$$

$$h = 0{,}04332\ m\ soit\ h = 43{,}32\ mm$$

La flèche minimale de cette chainette est de 43,32 mm

Vérification de l'application numérique :

Vérification de ces flèches en utilisant l'équation de la déformée d'une chainette :

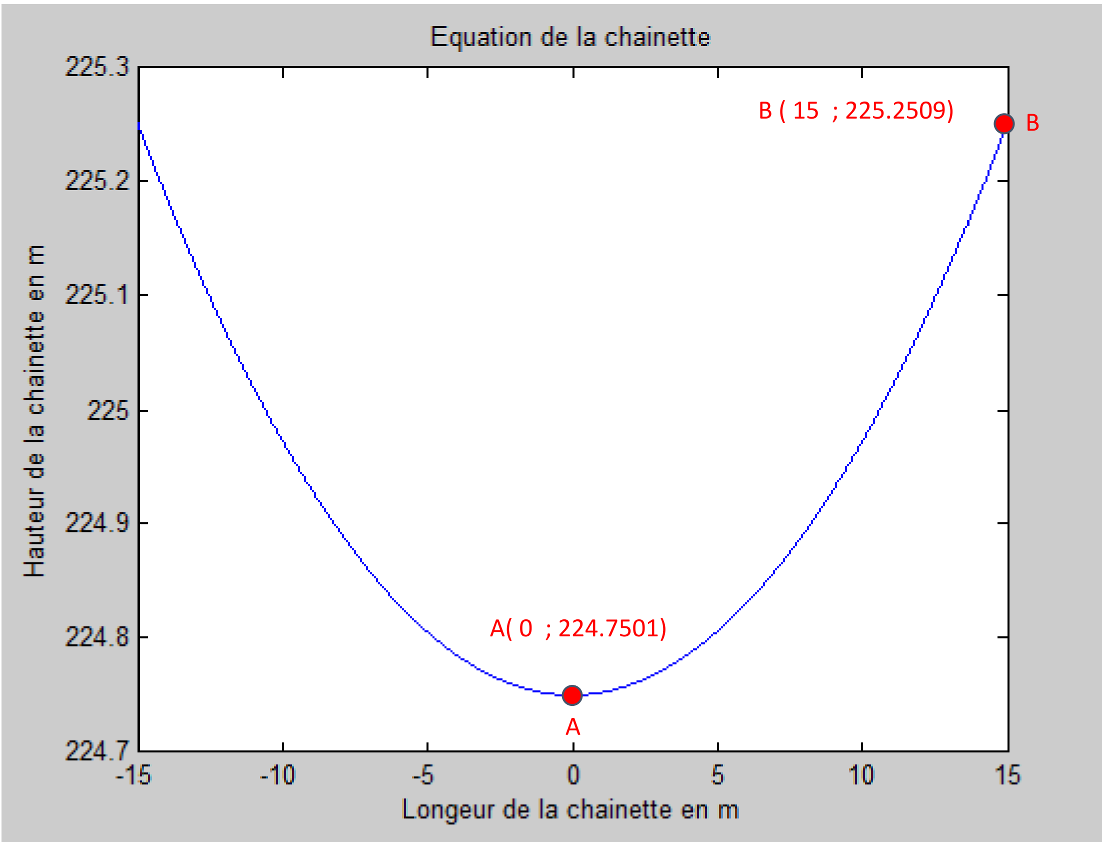
$$y(x) = a\cosh(\frac{x}{a})\ avec\ a = \frac{T_h}{\mu g}$$

- Question 1 : Quelle doit-être la force de tension pour avoir une flèche de 50 cm ? est-il possible d'appliquer cette force ?

En utilisant les résultats de la question 1 déterminé précédemment on obtient :

$$a = \frac{33983,3}{\frac{462,4}{30} \times 9,81} = 224,75$$

Soit : $y(x) = 224,75\cosh(\frac{x}{224,75})$



La flèche est la différence de hauteur (selon y) entre le point B et le point A ainsi :

$$fléche = (225,2509 - 224,7501) * 1000 = 500,7417\ mm$$

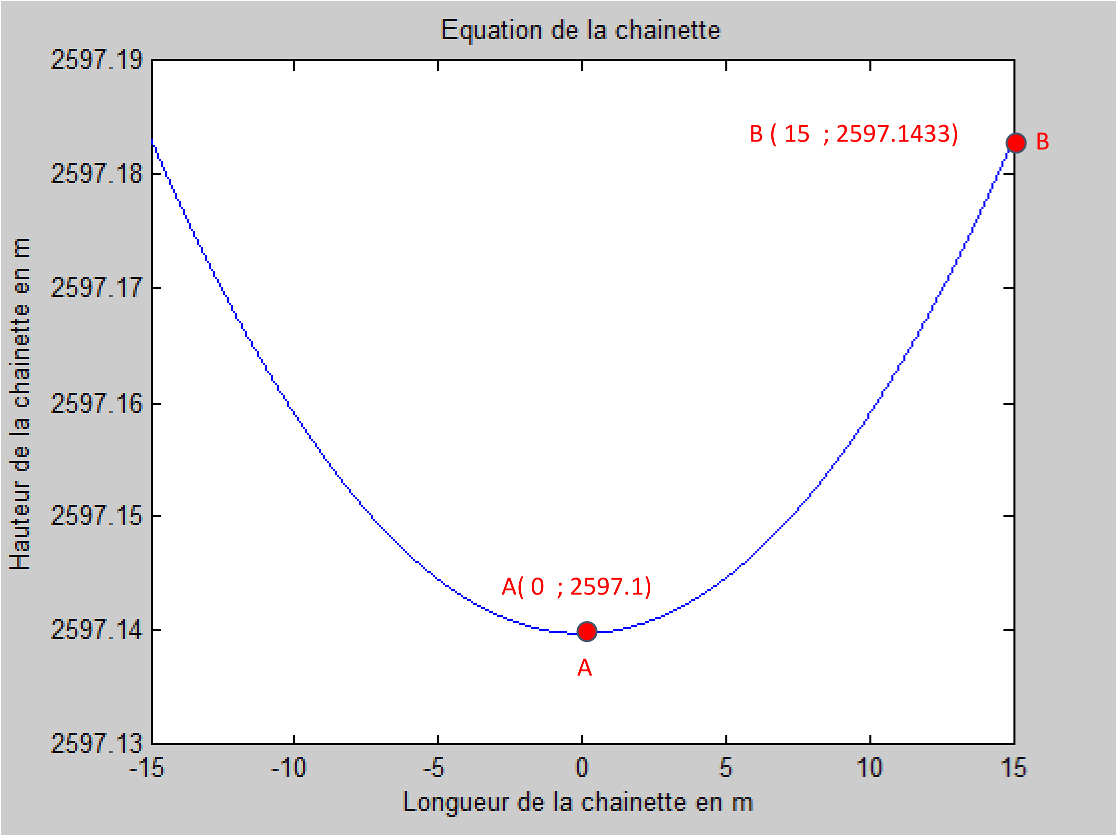
Nous retrouvons notre flèche de 50 cm.

- Question 2 : Existe-t-il toujours une solution, quelque soit la flèche recherchée ? en déduire alors la flèche minimale possible.

En utilisant les résultats de la question 2 déterminé précédemment on obtient :

$$a = \frac{392700}{\frac{462,4}{30} \times 9,81} = 2597,1$$

Soit : $y(x) = 2597,1 \cosh(\frac{x}{2597,1})$



La flèche est la différence de hauteur (selon y) entre le point B et le point A ainsi :

$$fléche = (2597,1433 - 2597,1) * 1000 = 43,3170\ mm$$

Nous retrouvons notre flèche minimale de 43,32 mm.

b) Comparaison avec amortissement cinétique

Comparons nos résultats théoriques avec nos résultats liés aux simulations avec le logiciel Herezh++.

Remarque : L'élément 75 de notre chainette correspond à la moitié de sa longueur donc possédera la flèche maximale. On récupérera nos valeurs de contrainte et de déplacement pour cet élément au point d'intégration 1.

Question 1 : Utiliser un lambda = 0,6 pour l'amortissement cinétique

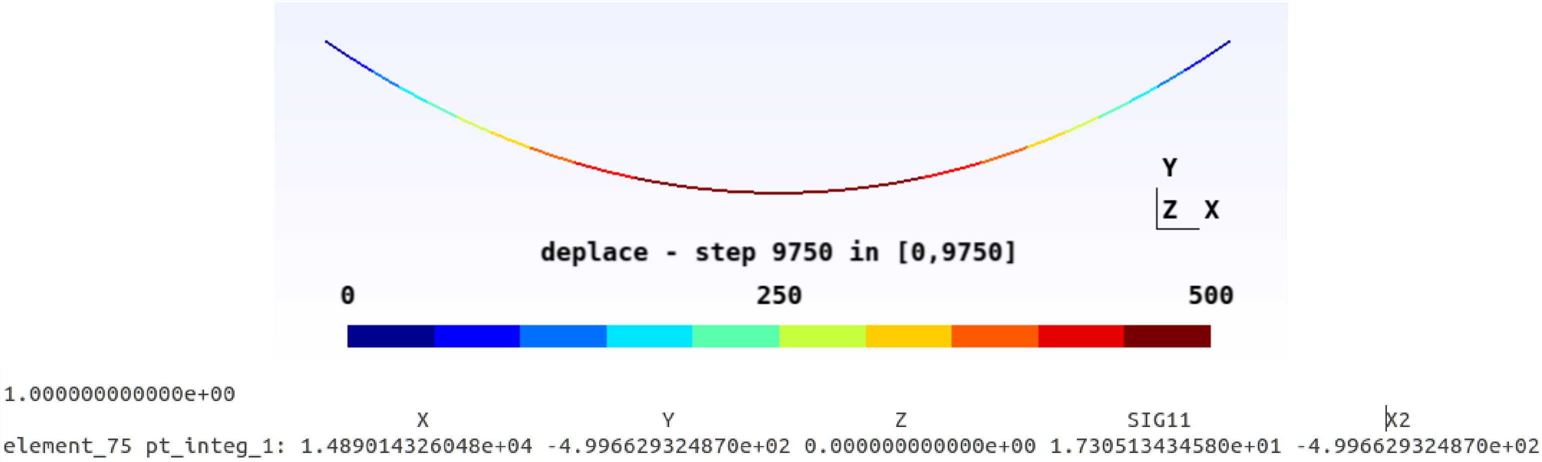


Figure 6: flèche de 50 cm

On observe une flèche de 500 mm soit 50 cm dont une contrainte de 17,3 MPa. Nous pouvons voir que les résultats concordent avec notre étude théorique.

Question 2 : Utiliser un lambda = 1,9 pour l'amortissement cinétique

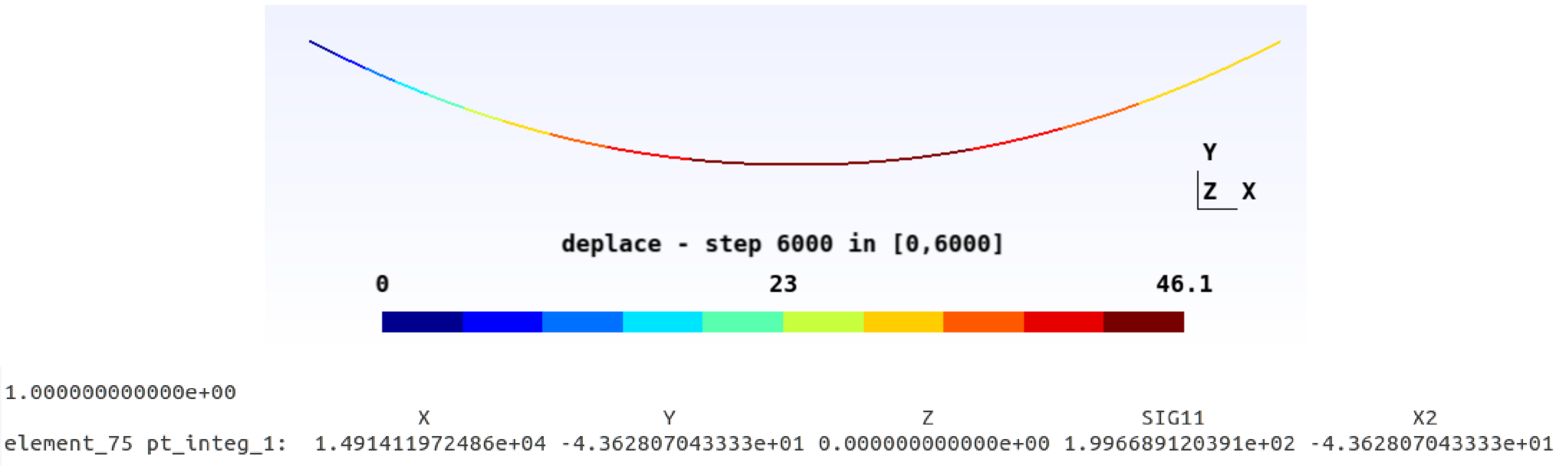


Figure 7: flèche minimale

On observe une flèche de 43,6 mm soit 4,36 cm dont une contrainte de 200 MPa. Nous pouvons voir que les résultats concordent avec notre étude théorique.

VI) Conclusion

Il vous est dorénavant possible de bien maitriser l'algorithme de relaxation dynamique avec amortissement cinétique. Il serait intéressant de comparer les résultats obtenus ici avec un autre type d'amortissement (amortissement visqueux). De plus, vous êtes capable de dimensionner une chaîne, un câble etc.. Car la chaînette est d'une importance capitale car elle permet de calculer les flèches (c'est à dire la distance de l'arc à la corde) à donner aux câbles suspendus afin que les tensions aux points d'accroche ne soient pas excessives. En effet, dès que l'on cherche à tendre par trop un câble entre deux pylônes, les tensions deviennent considérables.

Exemples d'applications :

La chainette est très utilisée pour le dimensionnement de pont, de pylônes EDF, les lignes de chemins de fer voire les télésièges etc… Car il ne faut pas que la tension aux points d'accroches ne soit pas excessive d'où le calcul d'une flèche cohérente.

Pont sur le petit Rhône - Languedoc

Figure 8: Exemples d'applications