Éléments théoriques spécifiques associée au logiciel Herezh++ (version 6.938)

Gérard Rio

24 mars 2020

Table des matières

I Introduction **9**

II Avancement temporel **11**

1 Introduction **12**
1.1 Présentation des différents algorithmes 13
1.2 Remarques concernant les variations de pas de temps 14
1.3 Différences centrées 14
1.3.1 Généralités 14
1.3.2 Implantation de l'algorithme DFC dans Herezh 16
1.4 Newmark 17
1.5 Tchamwa-Wielgosz 17
1.6 Schéma explicite de Chung-Lee 18
1.6.1 Implantation de l'algorithme de Chung Lee dans Herezh 19
1.7 Méthode proposée par Zhai 20
1.8 Runge-Kutta 21
1.8.1 Introduction 21
1.8.2 Avancement temporel avec le modèle de Runge-Kutta imbriqué . . 22
1.8.3 Implantation 23
1.9 Convergence des différents schémas numériques 23
1.9.1 Consistance 24
1.9.2 Stabilité de la méthode de Tchamwa 24
1.10 Amortissement numérique 26
1.10.1 Amortissement de Rayleigh 26
1.10.2 Amortissement critique 27
1.10.3 Bulk viscosity 27
1.11 Algorithme de Relaxation dynamique 27

1.11.1 Introduction . . . 27
1.11.2 Amortissement cinétique et calcul de masses fictives . . . 28
1.11.3 Amortissement visqueux critique . . . 30

III Métriques **32**

2 Particularités liées à la vitesse de déformation virtuelle **33**

IV Lois de comportements **34**

3 Loi de Hooke isotrope 3D et 2D **35**
3.1 Opérateur tangent $\frac{\partial \sigma^{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}}$ . . . 36
3.1.1 Cas uniquement sphérique . . . 37
3.1.2 Cas uniquement déviatorique . . . 37

4 Comportement hyperélastique **38**

5 Comportements hypoélastiques **38**
5.1 Loi 3D isotrope et intégration . . . 38
5.2 Opérateur tangent contrainte-déformation . . . 39
5.3 Loi 3D orthotrope entraînée et intégration . . . 42

6 Loi viscoélastique de Maxwell **42**
6.1 Loi 3D et intégration . . . 42
6.2 Opérateur tangent . . . 44
6.2.1 Opérateur tangent $\frac{\partial \sigma^{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}}$ . . . 45
6.3 Opérateur tangent pour les tenseurs transportés $\frac{\partial A^{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}}$ . . . 47
6.3.1 Transport deux fois covariant . . . 47
6.3.2 Transport deux fois contravariants . . . 48
6.3.3 Transport mixte . . . 49
6.3.4 Paramètres matériaux évolutifs . . . 49
6.4 Cas des contraintes planes . . . 49
6.4.1 Cas avec viscosité sphérique . . . 50
6.4.2 Cas sans viscosité sphérique . . . 50

7 Hystérésis déviatorique **52**
7.1 Introduction . . . 52
7.2 Historique succinct du modèle d'élasto-visco-hystérésis . . . 52
7.3 Hysteresis contribution . . . 53
7.3.1 Cercles neutres . . . 53
7.3.2 Incremental behavior law . . . 56
7.3.3 Choix de la dérivée objective . . . 57
7.3.4 Algorithme de gestion de la mémoire discrète . . . 59

8 Implantation élasto ou hyper-visco-hystérésis **61**
8.1 Partie hyperélastique . . . 61
8.2 Partie hystérésie . . . 61
8.2.1 Linéarisation temporelle . . . 61
8.2.2 Équation constitutive linéarisée . . . 62
8.2.3 Résolution numérique de l'équation constitutive linéarisée . . . 63
8.2.4 Calcul de l'opérateur tangent . . . 63
8.3 Partie viscoélastique . . . 64

9 Loi type Hooke 3D initialement orthotrope, puis entraînée **65**
9.1 Relations générales . . . 65
9.2 Transformations finies . . . 66
9.3 Cas seulement déviatorique ou sphérique . . . 66
9.4 Compressibilité et variation de volume . . . 66
9.5 Opérateur tangent en déformation (transport contravariant) . . . 67
9.6 Opérateur tangent en degré de liberté (transport contravariant) . . . 68
9.7 Tests . . . 69

10 Loi type Hooke 2D CP, initialement orthotrope, puis entraînée **72**
10.1 Relations générales . . . 72
10.2 Transformations finies . . . 73
10.3 Cas seulement déviatorique ou sphérique . . . 73
10.4 Compressibilité et variation de volume . . . 73
10.5 Opérateur tangent en déformation (transport contravariant) . . . 74
10.6 Opérateur tangent en degré de liberté (transport contravariant) . . . 75

11 Loi hypoélastique 3D et 2D CP, initialement orthotrope, puis entraînée **76**
11.1 Relations générales . . . 76
11.2 Transformations finies . . . 77
11.3 Cas seulement déviatorique ou sphérique . . . 77
11.4 Compressibilité et variation de volume . . . 77
11.5 Opérateur tangent en déformation (transport contravariant) . . . 78
11.6 Opérateur tangent en degré de liberté (transport contravariant) . . . 79

12 Transport d'un repère d'anisotropie **81**
12.1 Transport type contravariant . . . 81
12.2 Transport type covariant . . . 82
12.3 Formules de changement de base (transport contravariant) . . . 83
12.4 Variations des déformations d'Almansi dans le repère entraîné par rapport à celles exprimées dans $\hat{\vec{g}}^j$ . . . 83
12.5 Variations par rapport aux degrés de liberté cinématiques . . . 85

13 Anisotropie : opérateur de projection **87**
13.1 Introduction . . . 87
13.2 Tenseur des contraintes . . . 88
13.2.1 Traitement des énergies . . . 89

13.2.2 Compressibilité et variation de volume . . . 90
13.3 Cisaillement et variation de forme . . . 91
13.4 Opérateur tangent en déformation (transport contravariant) . . . 92
13.5 Opérateur tangent en degré de liberté (transport contravariant) . . . 93

14 Loi Hypo-élastique initialement orthotrope, puis entraînée 94
14.1 Relations générales . . . 94
14.2 Transformations finies . . . 95
14.3 Cas seulement déviatorique ou sphérique . . . 95
14.4 Compressibilité et variation de volume . . . 96
14.5 Opérateur tangent en déformation (transport contravariant) . . . 96
14.6 Opérateur tangent en degré de liberté (transport contravariant) . . . 98
14.7 Energies . . . 99

V Contraintes planes 100

15 Variation dimension transversale 101
15.1 Variation d'épaisseur . . . 101
15.2 Variation de section . . . 103
15.3 Comparaison 3D contraintes planes . . . 104
15.4 Calcul du module de compressibilité . . . 104
15.4.1 Cas des lois hyper-élastiques Favier et Orgeas . . . 104
15.4.2 Cas de la loi isoélastique ISO_ELAS_ESPO1D . . . 106
15.4.3 Cas de la loi isoélastique ISO_ELAS_SE1D . . . 106

16 Lois de contraintes planes 107
16.1 Méthode par perturbation (explicite) . . . 107
16.2 Méthode de Newton (implicite) . . . 107
16.3 Opérateur tangent final . . . 108

17 Lois de contraintes doublement planes 108
17.1 Cas où le repère de travail est celui de la condition . . . 108
17.2 Cas où le repère de travail est différent de celui de la condition . . . 109
17.2.1 Cas particulier où $\vec{V_3}$ est normal aux vecteurs $\vec{g}_\alpha$ . . . 112
17.3 Méthode par perturbation (explicite, le repère de travail est celui de la condition) . . . 112
17.4 Méthode par perturbation (explicite, le repère de travail est différent de celui de la condition) . . . 113
17.5 Meth Newton en repère de condition . . . 114
17.6 Meth Newton hors repère de condition . . . 115
17.6.1 Cas particulier où $\vec{V_3}$ est normal aux vecteurs $\vec{g}_\alpha$ . . . 116
17.7 Opérateur tangent final pour un repère de travail identique à celui de la condition . . . 117
17.8 Opérateur tangent final pour un repère de travail différent de celui de la condition . . . 117

17.8.1 Cas particulier où $\vec{V}_3$ est normal aux vecteurs $\vec{g}_\alpha$ 119

VI Umat **120**

18 Définition d'une loi interface de type Umat **121**

19 Objectifs **121**

20 Prise en compte de la loi de comportement exprimée dans un repère orthonormé **121**

VII Lois critère **123**

21 Lois critère **124**
21.1 Intro lois critère 124
21.2 Plis sur des membranes 124
21.3 Particularités liés aux lois incrémentales 126
21.3.1 Reconstruction d'un repère matériel ad hoc 126
21.3.2 Prise en compte de plusieurs repère matériels ad hoc 128
21.4 Évolution du comportement avec ou sans plis 128
21.4.1 Suite de 2 incréments sans plis 128
21.4.2 Incréments sans plis suivi d'un pli dans une direction 128
21.4.3 Incréments sans plis suivi de plis dans deux directions 129
21.4.4 Incrément avec un pli suivi d'un calcul sans plis 129
21.4.5 Incrément avec un pli suivi d'un calcul avec un pli 129
21.4.6 Incrément avec un pli suivi d'un calcul avec deux plis 130
21.4.7 Incrément avec deux plis suivi d'un calcul sans plis 130
21.4.8 Incrément avec deux plis suivi d'un calcul avec un pli 130
21.4.9 Incrément avec deux plis suivi d'un calcul avec deux plis 130
21.5 **Remarques** sur la variation des épaisseurs 130

VIII Thermique **133**

22 Thermique **134**
22.1 Équation locale d'équilibre 134
22.2 Formulation variationnelle 134

IX Contact **135**

23 Prise en compte des conditions limites de contact **136**
23.1 Réponse à la question : le point est-il intérieur à l'élément ? 136
23.2 Création des éléments de frontière 136
23.3 Eléments de Contact 137

23.4 Pénalisation . . . 137
23.4.1 Adaptation du facteur de pénalité en fonction de la raideur des matériaux . . . 137
23.4.2 Adaptation du facteur de pénalité à une zone d'accostage . . . 138
23.5 Frottement . . . 138
23.5.1 Loi de Coulomb . . . 138
23.6 Détails d'implantation en pénalisation . . . 140

X Sfe **142**

24 Eléments SFE **143**
24.1 Introduction . . . 143
24.2 Estimation d'une courbure à partir de la variation de la normale de part et d'autre des arrêtes . . . 143
24.2.1 Problème de convergence . . . 145
24.3 Modèle original simple d'estimation de la courbure . . . 147
24.4 Modèle Sfe2 . . . 149
24.5 Modèle Sfe3 . . . 151
24.5.1 Test simple de convergence sur une géométrie de cylindre . . . 154

XI Chargement et Conditions limites **155**

25 Torseur d'efforts ponctuels **156**

XII Méthodes de calcul **159**

26 Calcul de grandeurs globales **160**

XIII Annexes **166**

27 Eléments particuliers de calcul tensoriel **167**
27.1 Calcul matriciel pour les changements de base . . . 167
27.1.1 Application pour un changement de base quelconque d'un vecteur . 167
27.1.2 Application pour un changement de base quelconque d'un tenseur . 168
27.1.3 Cas particulier de la base absolue . . . 169
27.2 Plusieurs systèmes de coordonnées matériels . . . 169
27.2.1 Opérations dans une base orthonormée 2D dans un espace 3D . . . 170
27.2.2 Mixte de repères orthonormées, et repères curvilignes . . . 171
27.3 Contraction des tenseurs . . . 172
27.4 Variation d'un vecteur normé . . . 173

Bibliographie **175**

Liste des tableaux

1 Anisotropie à 45° dans le plan xy 70
2 traction selon x , anisotropie à 0° dans le plan xy 71
3 traction , anisotropie à 0° dans le plan xy 71

Table des figures

1 Réponse de 0 à 4.10^{-3} d'une poutre en traction compression, soumise à un échelon de vitesse,discrétisée en 1 élément : influence du paramètre Φ . . . 18
2 Accélération et vitesse transverse d'un cube en traction dynamique 21
3 Position des cercles neutres pour un matériau vierge de tout chargement mécanique. 54
4 Position des cercles neutres après une *inversion du chargement au point A.* 54
5 Position des cercles neutres après deux *inversions du chargement aux points A et B.* 55
6 Comparaison pour un essai de traction simple, sur la variation de la dimension transversale, entre 1D avec contraintes planes, et 3D 105
7 Algorithme de traitement pour la prise en compte de plis dans le comportement mécanique macro d'une membrane 125
8 Positions des points 144
9 cylindre 146
10 4 éléments 147
11 modèle simple : l'élément SFE 148
12 modèle SFE2 : grandeurs pour le calcul sur une arrête 150
13 modèle SFE2 : éléments pour le calcul des fonctions d'interpolation 151

Première partie

Introduction

Ce document rassemble des éléments théoriques complémentaires à la documentation d'utilisation du logiciel d'une part et des cours d'éléments finis d'autre part. Le document n'est pas exhaustif et évolue en fonction des nouveaux développements dans Herezh++.

Deuxième partie

Avancement temporel

1 Introduction

Nous considérons ici la simulation du comportement dynamique, qui est décrit par une équation intégrant en plus des forces internes et externes, les forces d'inertie. Ces dernières induisent une équation différentielle du second ordre en temps. Le problème est alors d'intégrer cette équation. Ceci est réalisé dans Herezh++ par différentes méthodes dites "d'avancement temporel" qui sont examinées dans la suite du document.

La dynamique forme une part importante des domaines couverts par la mécanique. On s'intéresse ici à la mécanique du solide déformable modélisée par éléments finis, bien que les méthodes présentées peuvent également être utilisées en mécanique des fluides. La logique habituelle s'appuie sur une discrétisation distincte espace-temps : spatiale avec des fonctions de formes permettant de représenter à un instant donné l'ensemble de la géométrie ; temporel avec un algorithme qui permet le calcul pas-à-pas de l'évolution de la structure. La discrétisation temporelle pas à pas permet de limiter le nombre d'inconnues à gérer au même moment c'est-à-dire le nombre de configurations ou le nombre de pas de temps. Il faut distinguer les méthodes multi-pas et les méthodes à un pas. On se réfèrera à Chung-Lee ([Chung and Lee, 1994]) pour une bibliographie exhaustive sur le sujet. Pour notre part nous retiendrons les méthodes à un pas. Différents travaux montrent en effet qu'actuellement ces méthodes restent les moins couteuses à précision égale.

Deux groupes de méthodes distinctes sont envisageables : explicites, implicites ou semi-implicites, ces dernières entraînant également les mêmes niveaux difficultés que les méthodes purement implicites. On les regroupera donc dans cette dernière catégorie.

Les méthodes explicites présentent l'avantage de conduire à des calculs simples, en particulier il n'est pas nécessaire de construire la matrice de raideur du système (à chaque pas de temps), ce qui permet une économie de calcul substantielle. En revanche les méthodes sont conditionnellement stables, c.-à-d. le pas de temps de la discrétisation temporelle est majoré par la plus petite période du système (spatialement discrétisé), contrairement aux méthodes implicites.

Les algorithmes classiques robustes usuels sont :
— les différences centrées pour les méthodes explicites,
— la méthode de Newmark pour les méthodes implicites.
On trouvera par exemple dans Géradin ([**?**]) une étude exhaustive de ces méthodes. Dans Hughes and Belystcho ([**?**]) un certain nombre de réflexions concernant l'étude de stabilité, de convergence, des pas de temps optimum ... Ainsi donc, seules les grandes lignes des méthodes classiques sont rappelées dans ce document.

L'utilisation d'un algorithme numérique temporel entraîne l'apparition de hautes fréquences numériques. Ces fréquences sont indépendantes de la réalité physique ce qui peut entraîner des difficultés d'interprétation des résultats. Aussi un certain nombre de travaux ont été effectués pour modifier les algorithmes traditionnels de manière à obtenir une filtration

automatique de ces hautes fréquences. Par exemple deux des méthodes les plus classiques sont la méthode HHT développée dans les années 70 pour la méthode implicite de Newmark et la méthode du Bulk Viscosity pour la méthode des différences centrées.

Ces dernières années plusieurs nouvelles méthodes explicites sont apparues ([**?**] [**?**] [**?**]). Ces méthodes sont en fait des déclinaisons de la méthode des différences finies centrées. Nous nous servirons de l'étude du modèle de Tchamwa pour présenter les notions de précision et de stabilité de convergence en s'appuyant principalement sur les travaux de thèse d'Anthony Soive. Ces notions de précision et de stabilité sont fondamentales pour les algorithmes temporels appliqués à la dynamique.

1.1 Présentation des différents algorithmes

Nous utilisons la forme faible variationnelle des équations d'équilibres locales représentée par le principe des puissances virtuelles :

$$\int_{\mathcal{D}} \rho\vec{\gamma} \overset{*}{\vec{V}} \, dv = \int_{\mathcal{D}} \vec{F} \overset{*}{\vec{V}} \, dv - \int_{\mathcal{D}} \boldsymbol{\sigma} : \overset{*}{\boldsymbol{D}} \, dv + \int_{\partial\mathcal{D}} \vec{T} \overset{*}{\cdot} \vec{V} ds \tag{1}$$

Dans le cas simple d'un comportement matériel linéaire en petite transformation, la forme discrétisée de la forme variationnelle s'exprime sous une forme matricielle classique.

$$\overset{*}{\dot{q}}^T \left(M \ \ddot{q} + C \ \dot{q} + K \ q - F_{ext}\right) = 0 \tag{2}$$

Avec M la matrice de masse, C la matrice d'amortissement, K la matrice de raideur, F_{ext} le vecteur des efforts externes, q les degrés de libertés du système, $\overset{*}{\dot{q}}$ les degrés de liberté des vitesses virtuelles.

L'équation devant être satisfaite quelque soit la valeur des vitesses virtuelles, cela conduit à un système d'équations.

$$M \ \ddot{q} + C \ \dot{q} + K \ q = F_{ext} \tag{3}$$

On voit donc apparaître dans cette équation, des dérivées temporelles du premier et du second ordre. Ce sont ces grandeurs qui sont discrétisées par les différents schémas numériques exposés ci-dessous.

Dans le cas d'un comportement non linéaire, la puissance interne n'est plus représentée sous forme de produit de matrice avec les degrés de liberté. Dans le cas de méthodes explicites, cela ne change pas les différentes expressions obtenues si l'on prend soin de remplacer les grandeurs $C \ \dot{q} + K \ q$ par $\mathcal{R}_{int}(q, \dot{q})$, ce dernier terme représentant de manière globale la partie puissance interne du vecteur résidu. D'une manière équivalente on notera F_{ext} par $\mathcal{R}_{ext}(q, \dot{q})$, la partie puissance externe du vecteur résidu. Le cas général s'écrit alors sous la forme de :

$$M \ \ddot{q} + \mathcal{R}_{int}(q, \dot{q}) - \mathcal{R}_{ext}(q, \dot{q}) = 0 \tag{4}$$

Les discrétisations temporelles s'appuient sur un découpage du temps en incrément Δt que l'on considèrera ici en général égaux pour simplifier la présentation. Cependant on verra que ce pas de temps peu varier au cours du calcul. On note n l'indice des valeurs calculées au temps $t = n\Delta t$.

1.2 Remarques concernant les variations de pas de temps

Les différents schémas d'avancement temporel sont établis en général pour un pas de temps constant.

Supposons qu'entre deux pas de temps, celui-ci varie. Soient Δt_1 et Δt_2 les deux pas de temps consécutifs. Il serait nécessaire d'adapter les formules obtenues pour un pas de temps constant. Deux cas sont considérés : soit il s'agit d'un calcul implicite soit d'un calcul explicite.

Cas d'un calcul explicite

En général le pas de temps est petit voir très petit. On considère alors que la variation de pas de temps n'est pas trop importante et que sur l'ensemble des pas de temps traités, il y a peu de changement de pas de temps relativement. En conséquence, on peut faire l'hypothèse que l'impact d'un changement de pas de temps est négligeable sur la précision globale de la réponse.

Cas d'un calcul implicite

En général le pas de temps peut-être important. On suppose alors que l'algorithme intègre la prise en compte d'un changement de pas de temps de manière précise.

C'est le partie pris actuellement retenue pour Herezh. Cela amène 2 remarques :

1. en explicite, dans le cas de nombreux changements de pas de temps durant le calcul, il est possible que cela impact la solution finale. Donc il faut garder ce point en tête lors de l'analyse des résultats,
2. dans le cas d'un temps maxi fixé en dynamique explicite, contrairement aux schémas implicites (ou quasi-statiques), le calcul s'arrête dès que le temps en court est suffisamment proche du temps final (à la précision près). Il n'y a pas de modification du dernier pas de temps pour finir exactement au temps fin demandé. Pour l'implicite, au contraire, le dernier pas de temps est modifié pour obtenir exactement le temps final.

1.3 Différences centrées

1.3.1 Généralités

Les différences finies centrées constituent la méthode d'avancement temporel explicite la plus classique.

La discrétisation temporelle est réalisée par différences finies centrées.

$$\vec{V}_{n-\frac{\Delta t}{2}} = \frac{(\vec{X}_n - \vec{X}_{n-1})}{\Delta t} \quad et \quad \vec{V}_{n+\frac{\Delta t}{2}} = \frac{(\vec{X}_{n+1} - \vec{X}_n)}{\Delta t} \tag{5}$$

L'accélération s'en déduit.

$$\vec{\gamma}_n = \frac{(\vec{V}_{n+\frac{\Delta t}{2}} - \vec{V}_{n-\frac{\Delta t}{2}})}{\Delta t} = \frac{(\vec{X}_{n+1} - 2\vec{X}_n + \vec{X}_{n-1})}{(\Delta t)^2} \tag{6}$$

Concernant la vitesse, elle peut également être calculée à t par une méthode centrée.

$$\vec{V}_n = \frac{(\vec{X}_{n+1} - \vec{X}_{n-1})}{2\Delta t} \tag{7}$$

Les discrétisations (6, 7) s'étendent naturellement aux degrés de libertés. Prenons par exemple une interpolation classique :

$$\vec{X} = X^{ar}\varphi_r\vec{I}_a \tag{8}$$

Les fonctions d'interpolation et les vecteurs de la base absolue ne dépendent pas du temps aussi en notant q le vecteur des degrés de liberté (X^{ar}) on obtient par différences finies des équations équivalentes à (6) et (7).

$$\ddot{q}_n = \frac{q_{n+1} - 2q_n + q_{n-1}}{(\Delta t)^2} \tag{9}$$

$$\dot{q}_n = \frac{q_{n+1} - q_{n-1}}{2\Delta t} \tag{10}$$

Pour justifier les choix effectués dans Herezh++, considérons le cas simple d'un comportement linéaire, en petites transformations. Les discrétisations précédentes sont introduites dans la forme matricielle (3). On obtient :

$$M\ \left(\frac{q_{n+1} - 2q_n + q_{n-1}}{(\Delta t)^2})\right) + C\ \left(\frac{q_{n+1} - q_{n-1}}{2\Delta t}\right) + K\ q_n = F_{ext} \tag{11}$$

ou encore :

$$\left(M + \frac{\Delta t}{2}C\right) q_{n+1} = \Delta t\left(\Delta t\,(F_{ext} - K\ q_n) + \frac{C\ q_{n-1}}{2}\right) + M\ \ (2q_n - q_{n-1}) \tag{12}$$

Cette expression montre qu'il est nécessaire d'inverser la matrice $\left(M + \frac{\Delta t}{2}C\right)$ pour obtenir la nouvelle position q_{n+1}. Ce calcul est très rapide à effectuer dans deux cas, lorsque les matrices M et C sont constantes ou lorsqu'elles sont diagonales. Dans le premier cas par exemple en utilisant une méthode de triangulation, celle-ci peut-être réalisée une seule fois en début de programme. Dans le second cas, la rapidité est évidente. A priori la matrice de masse est naturellement constante. En revanche la matrice d'amortissement n'est constante que dans des cas très particuliers. Ceci arrive lors de l'emploi d'un amortissement "numérique" c'est-à-dire par exemple lorsqu'on emploie un amortissement artificiel pour stabiliser la réponse ou encore lors de comportement matériel très simple linéaire.Dans le cas général de comportement matériel visqueux, il n'y a aucune raison que cela conduise "naturellement" à une forme diagonale ou constante de la matrice d'amortissement. L'emploi de la formule d'Euler décentrée à droite entre les instants $t - \Delta t$ et t

pour le calcul de la vitesse est alors souvent retenue pour optimiser le temps de résolution du système.

$$\vec{V}_n = \frac{(\vec{X}_n - \vec{X}_{n-1})}{\Delta t} \tag{13}$$

Ou encore pour les degrés de liberté :

$$\dot{q}_n = \frac{q_n - q_{n-1}}{\Delta t} \tag{14}$$

Une autre solution, plus précise et plus cohérente avec la méthode des différences finies "centrée" est d'introduire l'accélération du pas précédent sous la forme :

$$\vec{V}_n = \vec{V}_{n-1/2} + \frac{\Delta t}{2}\ \gamma_{n-1/2} \tag{15}$$

C'est cette solution qui est retenue dans l'implantation dans Herezh++. Elle permet de n'inverser que la matrice masse, ceci même dans un cas non linéaire.

1.3.2 Implantation de l'algorithme DFC dans Herezh

D'une manière pratique les calculs effectués dans Herezh++ sont les suivants :

1. utilisation de l'équation d'équilibre pour obtenir l'accélération :

$$\ddot{q}_n = [M]^{-1}\left((\mathcal{R}_{ext}(q_n, \dot{q'_n})) - (\mathcal{R}_{int}(q_n, \dot{q'_n}))\right) \tag{16}$$

   Avec $\dot{q'_n}$ une approximation explicite de la vitesse calculée à partir des résultats précédents à l'aide de la formule :

$$\dot{q'_n} = \dot{q}_{n-1} + \Delta t\ \ddot{q}_{n-1} \tag{17}$$

   Les termes du membre de droite de l'expression 32 sont alors entièrement connus à partir des résultats précédents, la solution d'avancement est explicite.

2. On peut maintenant calculer précisément la vitesse :

$$\dot{q_n} = \dot{q}_{n-1} + \frac{\Delta t}{2}\ (\ddot{q}_{n-1} + \ddot{q}_n) \tag{18}$$

3. mise en place des conditions limites sur les positions et/ou les vitesses et/ou les accélérations, en fonction des données fournies par l'utilisateur.
4. Puis au final calcule de la nouvelle position qui permettra de calcul des efforts généralisés internes et externes.

$$q_{n+1} = q_n + \Delta t\ \dot{q_n} + \frac{(\Delta t)^2}{2}\ \ddot{q}_n \tag{19}$$

1.4 Newmark

La méthode de Newmark considère la discrétisation suivante pour les vitesses et pour les positions.

$$\dot{q}_{n+1} = \dot{q}_n + \Delta t \left((1-\gamma)\ddot{q}_n + \gamma \ddot{q}_{n+1}\right) \tag{20}$$

$$q_{n+1} = q_n + \Delta t \dot{q}_n + \frac{\Delta t^2}{2}\left((1-2\beta)\ddot{q}_n + 2\beta \ddot{q}_{n+1}\right) \tag{21}$$

Le comportement obtenu est ainsi dépendant des deux paramètres γ et β. L'étude de l'algorithme de Newmark : stabilité, précision ..., est classique. Les valeurs classiques retenues pour les deux paramètres sont 0.5 et 0.5 ce qui conduit à un algorithme inconditionnellement stable et une précision du second ordre sur la fréquence. Le cas $\beta = \frac{1.}{12}$ et $\gamma = 0.5$ conduit à une stabilité conditionnelle de l'ordre de celle nécessaire avec la méthode des différences centrées, mais à une précision du troisième ordre ce qui constitue la précision maximale que l'on peut espérer avec la méthode de Newmark.

1.5 Tchamwa-Wielgosz

L'algorithme proposé par Tchamwa et Wielgosz (que l'on notera par simplicité par la suite Tchamwa) est donné par les expressions suivantes :

$$M\ \ddot{q}_{n+1} + \mathcal{R}_{int}(q_{n+1}, \dot{q}_{n+1}) = \mathcal{R}_{ext}(q_{n+1}, \dot{q}_{n+1}) \tag{22}$$

$$\dot{q}_{n+1} = \dot{q}_n + \lambda \Delta t \ddot{q}_n \tag{23}$$

$$q_{n+1} = q_n + \alpha \Delta t \dot{q}_n + \beta \Delta t^2 \ddot{q}_n + \gamma \Delta t \dot{q}_{n+1} \tag{24}$$

L'analyse de la consistance de l'algorithme (cf. suite du document) montre que la précision est du premier ordre lorsque $\alpha - \gamma = 1$ et que $\Phi = (\gamma\lambda + \beta) \neq 1$. Cette précision sera du second ordre lorsque $\Phi = 1.$.

L'étude de l'influence des paramètres sur la convergence du schéma numérique donne (cf. partie 1.9) :

$$\Phi > 1, \quad \alpha = 0.5, \quad \gamma = 0.5, \quad \lambda = 1., \quad \beta = \Phi - \gamma\lambda \tag{25}$$

Le seul paramètre libre est alors Φ et l'algorithme (24) devient :

$$\begin{aligned} [M]\ddot{q}_{n+1} + \mathcal{R}_{int}(q_{n+1}, \dot{q}_{n+1}) &= \mathcal{R}_{ext}(q_{n+1}, \dot{q}_{n+1}) \\ \dot{q}_{n+1} &= \dot{q}_n + \Delta t \ddot{q}_n \\ q_{n+1} &= q_n + 0.5\Delta t \dot{q}_n + (\Phi - 0.5)\Delta t^2 \ddot{q}_n + 0.5\Delta t \dot{q}_{n+1} \end{aligned} \tag{26}$$

soit encore

$$\begin{aligned} [M]\ddot{q}_{n+1} + \mathcal{R}_{int}(q_{n+1}, \dot{q}_{n+1}) &= \mathcal{R}_{ext}(q_{n+1}, \dot{q}_{n+1}) \\ \dot{q}_{n+1} &= \dot{q}_n + \Delta t \ddot{q}_n \\ q_{n+1} &= q_n + \Delta t \dot{q}_n + \Phi \Delta t^2 \ddot{q}_n \end{aligned} \tag{27}$$

La figure (1) montre l'évolution de l'amortissement en fonction du paramètre Φ. La simulation concerne une poutre en traction-compression soumise à une vitesse initiale à une extrémité, tandis que l'autre extrémité est maintenue fixe. La géométrie et les conditions d'essai sont les suivantes : longueur = 200 mm, section = 4 mm^2, vitesse initiale à l'extrémité libre = 1000 mms, masse volumique = 8.10^{-9}, le maillage est constitué d'une seule biellette à 2 noeuds avec interpolation linéaire.

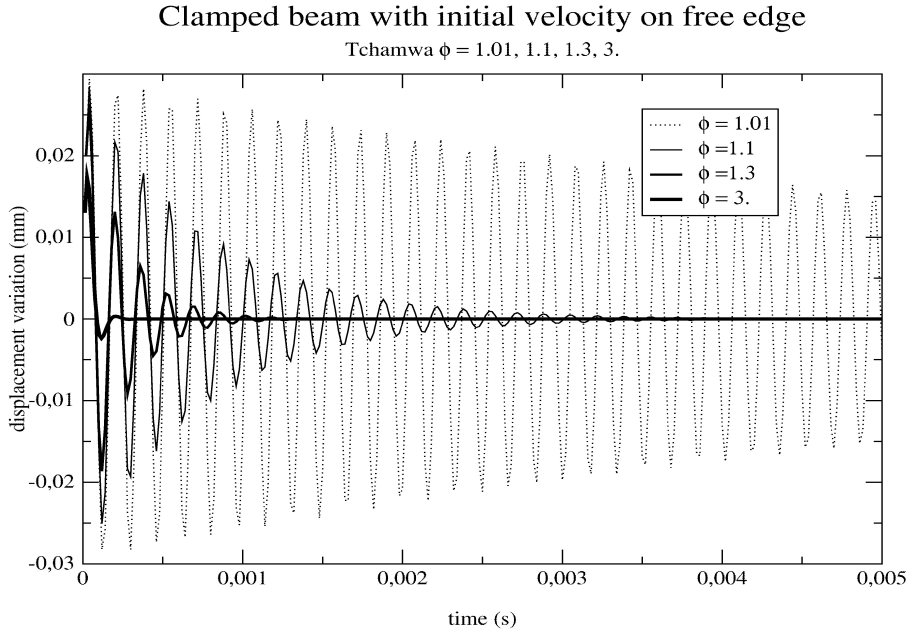

FIGURE 1 – Réponse de 0 à 4.10^{-3} d'une poutre en traction compression, soumise à un échelon de vitesse,discrétisée en 1 élément : influence du paramètre Φ

Dans ce cas d'interpolation, la fréquence maxi que peut représenter le système est également la seule existante. Sachant que l'objectif de l'atténuation est de minimiser l'importance des hautes fréquences, on doit retrouver directement ici cette atténuation. Celle-ci est bien réelle, cependant il est nécessaire d'utiliser une valeur importante de Φ pour obtenir une atténuation appréciable.

L'intérêt du schéma de Tchamwa concerne l'amortissement sélectif des hautes fréquences numériques, tout en évitant de modifier les basses fréquences.

1.6 Schéma explicite de Chung-Lee

L'algorithme proposé par Chung-Lee ([Hulbert and Chung, 1996]) est donné par les expressions suivantes :

$$M\ \ddot{q}_{n+1} + \mathcal{R}_{int}(q_n, \dot{q}_n) = \mathcal{R}_{ext}(q_n, \dot{q}_n) \tag{28}$$

$$q_{n+1} = q_n + \Delta t \dot{q}_n + \Delta t^2(\hat{\beta}\ddot{q}_n + \beta\ddot{q}_{n+1}) \tag{29}$$

$$\dot{q}_{n+1} = \dot{q}_n + \Delta t(\hat{\gamma}\ddot{q}_n + \gamma\ddot{q}_{n+1}) \tag{30}$$

L'analyse de la consistance de l'algorithme montre que la précision est du second ordre lorsque $\hat{\beta} = 1/2 - \beta$, $\gamma = 3/2$ et $\hat{\gamma} = 1 - \gamma$.

L'étude de l'influence des paramètres sur la convergence du schéma numérique conduit au domaine utile de β :

$$1. \leq \beta \leq 28/27 \tag{31}$$

L'amortissement numérique est d'autant meilleur que l'on se rapproche de 28/27. Pour cette valeur, le schéma est particulièrement efficace (cf. [Mahéo, 2006]). Cependant comme pour le schéma de Tchamwa et Wielgosz, les performances dépendent du pas de temps relativement au pas de temps critique ([Mahéo et al., 2009]).

1.6.1 Implantation de l'algorithme de Chung Lee dans Herezh

D'une manière pratique les calculs effectués dans Herezh++ sont les suivants :

1. utilisation de l'équation d'équilibre pour obtenir l'accélération :

$$\ddot{q}_{n(cl)} = [M]^{-1}\left((\mathcal{R}_{ext}(q_n, \dot{q'_n})) - (\mathcal{R}_{int}(q_n, \dot{q'_n}))\right) \tag{32}$$

   Avec $\dot{q'_n}$ une approximation explicite de la vitesse calculée à partir des résultats précédents à l'aide de la formule :

$$\dot{q'_n} = \dot{q}_{n-1} + \Delta t\ \ddot{q}_{n-1} \tag{33}$$

   Les termes du membre de droite de l'expression 32 sont alors entièrement connus à partir des résultats précédents, la solution d'avancement est explicite.

2. calcul de la vitesse notée $\dot{q}(cl)$ pour la différencier de celle DFC :

$$\dot{q}(cl)_{n+1} = \dot{q}(cl)_n + \Delta t(\hat{\gamma}\ddot{q}(cl)_n + \gamma\ddot{q}(cl)_{n+1}) \tag{34}$$

   Comparée au calcul en DFC (formule 18) on s'aperçoit qu'il y a un décalage au niveau de la numérotation de "n" .

3. mise en place des conditions limites sur les positions et/ou les vitesses et/ou les accélérations, en fonction des données fournies par l'utilisateur.

4. Puis au final calcule de la nouvelle position qui permettra de calcul des efforts généralisés internes et externes.

$$q(cl)_{n+1} = q(cl)_{n+1} = q(cl)_n + \Delta t\dot{q}(cl)_n + \Delta t^2(\hat{\beta}\ddot{q}(cl)_n + \beta\ddot{q}(cl)_{n+1}) \tag{35}$$

   Comparée au calcul en DFC (formule 19) on s'aperçoit qu'il y a un décalage au niveau de la numérotation de "n" . Reprenons la formule DFC :

$$\begin{aligned} \dot{q_n} &= \dot{q}_{n-1} + \frac{\Delta t}{2}\ (\ddot{q}_{n-1} + \ddot{q}_n) \\ &= \dot{q}_{n-1} + \frac{\Delta t}{2}\ (\ddot{q}_{n-1} + \ddot{q}_n) \end{aligned} \tag{36}$$

1.7 Méthode proposée par Zhai

Le schéma d'avancement temporel proposé par Zhai [ZHAI, 1996] est une méthode explicite qui s'appuie sur une résolution en deux étapes types : prédiction puis correction. L'avancement temporel est résolu par une technique analogue à la méthode classique des différences finies centrées. Par rapport à cette dernière méthode, la méthode de Zhai introduit un terme d'amortissement des hautes fréquences.

1. prédiction :

$$\begin{aligned} q(z)_{p,n+1} &= q(z)_n + \Delta t \dot{q}(z)_n + \Delta t^2 \left\{(1/2+\Psi)\ddot{q}(z)_n - \Psi \ddot{q}(z)_{n-1}\right\} \\ \dot{q}(z)_{p,n+1} &= \dot{q}(z)_n + \Delta t \left\{(1+\varphi)\ddot{q}(z)_n - \varphi \ddot{q}(z)_{n-1}\right\} \end{aligned} \tag{37}$$

   avec "(z)" désignant les grandeurs introduites par Zhai et "p" pour "predicted". $q(z)_{p,n+1}$ et $\dot{q}(z)_{p,n+1}$ correspondent à la prédiction du déplacement et de la vitesse.
2. calcul des efforts internes et externes correspondants à cette cinématique, puis résolution des équations d'équilibres → prédiction de l'accélération :

$$\ddot{q}(z)_{p,n+1} \tag{38}$$

3. correction du déplacement et de la vitesse avec une formule de type Newmark

$$\begin{aligned} q(z)_{n+1} &= q(z)_n + \Delta t \dot{q}(z)_n + \Delta t^2 \left\{(1/2-\beta)\ddot{q}(z)_n + \beta \ddot{q}(z)_{p,n+1}\right\} \\ \dot{q}(z)_{n+1} &= \dot{q}(z)_n + \Delta t \left\{(1-\gamma)\ddot{q}(z)_n + \gamma \ddot{q}(z)_{p,n+1}\right\} \end{aligned} \tag{39}$$

4. de nouveau, calcul des efforts internes et externes correspondants à cette cinématique corrigée, puis résolution des équations d'équilibres → accélération finale

$$\ddot{q}(z)_{n+1} \tag{40}$$

4 paramètres de contrôle sont disponibles.

Dans la pratique si l'on veut une importante précision, Zhai préconise de retenir $\Psi = \varphi = 1/2$ et les paramètres habituels de Newmark : $\gamma = 1/2$ et $\beta = 1/4$. On obtient la meilleure précision pour $\gamma = 1/2$ et $\beta = 1/12$. Avec ces paramètres on obtient un très faible amortissement et un rayon de convergence environ deux fois plus faible que celui de DFC classique, ce qui n'est pas du tout intéressant.

Par exemple en utilisant comme paramètres : $\varphi = \gamma = 1/2$ et $\Psi = \beta = 1/6$, on obtient un rayon de convergence un peu inférieur à DFC (5 à 10% plus faible), par contre l'atténuation est très importante, du même ordre (voir un peu supérieure) à celle de Chung Lee. En temps de calcul, la méthode est cependant environ deux fois plus lente que celles de Chung Lee ou Tchamwa compte tenue de l'étape de prédiction.

Exemple simple d'application : Soit un cube positionné isostatiquement sur une face, et dont la face opposée est soumise à une rampe de déplacement perpendiculairement à la face. Il s'agit donc d'un essai de traction simple. Le cube est modélisé par un seul hexaèdre, seules les déplacements dans la direction transverse au déplacement imposé, sont issus du calcul d'équilibre, ces déplacements sont directement liés au coefficient de Poisson.

La figure de gauche (2) montre l'évolution de l'accélération suivant la direction transverse au déplacement, la figure de droite est relative à la vitesse. On observe un bruit numérique constant pour les réponses du schéma DFC, atténuée pour les schémas de Zhai ($\varphi = \gamma = 1/2$ et $\Psi = \beta = 1/6$) et Chung Lee.

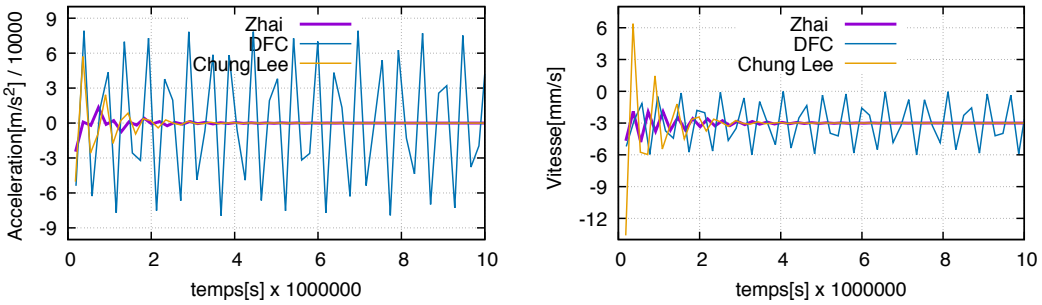

FIGURE 2 – Accélération et vitesse transverse d'un cube en traction dynamique

1.8 Runge-Kutta

1.8.1 Introduction

L'équation (4) est une équation différentielle du second ordre en temps. On peut donc envisager de la résoudre à l'aide des méthodes classiques de la famille de Runge-Kutta (RK) [Engeln-Müllges and Uhlig, 1996],[Press et al., 2002],[Wright, 2002]. L'intérêt de cette investigation est d'étudier l'impact de la précision de l'intégration temporelle de l'équation. Les schémas vus précédemment sont au mieux des schémas du second ordre c'est-à-dire que la solution approchée X_{n+1} correspond au mieux au développement de Taylor au second ordre de $X(t + \Delta t)$ en fonction de Δt. Dans le cas des schémas RK, il est possible d'approcher théoriquement un ordre plus élevé. Il est alors possible d'étudier l'impact de cet ordre supérieur de troncature, comparé aux modèles classiques d'avancement temporel (DFC, Newmark par exemple).

L'objectif est ici d'utiliser le schéma classique de Runge-Kutta (RK) explicite avec pilotage en fonction d'une estimation d'erreur obtenue à l'aide de deux calculs imbriqués.

Ce type de méthodologie est courante pour la résolution de système d'équations différentielles du premier ordre ([Engeln-Müllges and Uhlig, 1996], [Press et al., 2002]), dans le cas où le système est de taille réduite (quelques dizaines d'équations). Dans le cas de la méthode des éléments finis, cette méthodologie n'est habituellement pas employée. Remarquons en particulier que la stabilité de la méthode est difficile a traiter. On peut signaler l'importance des travaux de l'école d'Aukland sur ce sujet, par exemple on peut se référer au document de thèse de W. Wright pour une présentation assez étendue ([Wright, 2002]).

Il est classiquement admis que les méthodes de type RK conduisent à un bon compromis précision - complexité, d'où l'idée d'observer leurs comportements dans le cadre de l'équation d'avancement temporel. L'objectif est ainsi de disposer d'une source de comparaison différente, pour les méthodes principalement étudiées, en particulier le modèle de Tchamwa.

Nous rappelons succinctement la modélisation utilisée, puis des précisions sont apportées quant à l'implantation au sein du code de calcul Herezh++.

1.8.2 Avancement temporel avec le modèle de Runge-Kutta imbriqué

L'équation initiale d'avancement temporel du second ordre est transformée en un couple d'équations du premier ordre selon :

$$\begin{aligned} \dot{V} &= M^{-1}(R_{ext} - R_{int}) \\ \dot{X} &= V \end{aligned} \tag{41}$$

Que l'on peut noter de manière plus générale :

$$\dot{y} = f(t, y) \tag{42}$$

Le vecteur "y" comprend ainsi les vitesses et les positions, la fonction "f" permet d'en calculer sa dérivée première par rapport au temps.

Le nombre d'inconnues du problème est ainsi doublé. Cependant, ces équations peuvent être traitées dans la pratique séquentiellement ce qui minimise l'inconvénient.

Lorsque l'on applique un schéma de type Runge-Kutta il est possible d'utiliser deux ordres successifs de précision, dont les solutions respectives par soustraction permettent d'obtenir une estimation de l'erreur d'intégration. Les opérations intermédiaires pour le calcul des deux ordres successifs sont mutualisées (utilisés deux fois) pour minimiser le coût de calcul. On obtient ainsi les formules classiques de "Prince-Dormand embedding formulas" ou encore de "Fehlberg embedding formulas". Ces résultats étant suffisamment classiques, nous ne rappelons ici que le raisonnement général, mais pour plus de précision on pourra consulter par exemple la référence ([Engeln-Müllges and Uhlig, 1996]) §17.

Par exemple dans le cas de la méthode RK-45 (ordres 4 et 5 emboîtés), on peut écrire (cf.[Press et al., 2002] §16) pour l'ordre 5 :

$$\begin{aligned} k_1 &= h\ f(t_n, y_n) \\ k_2 &= h\ f(t_n + a_2 h, y_n + b_{21} k_1) \\ &.... \\ k_6 &= h\ f(t_n + a_6 h, y_n + b_{61} k_1 + ... + b_{65} k_5) \\ y_{n+1} &= y_n + c_1 k_1 + ... + c_6 k_6 + O(h^6) \end{aligned} \tag{43}$$

où : h est le pas d'avancement en temps choisit, a_i b_{ij} c_i sont des coefficients fixes spécifiques à la méthode. t_n est le temps initial où la solution est supposé connue, l'objectif étant d'obtenir la solution à t_{n+1} c'est-à-dire y_{n+1}. On remarque, que les coefficients k_i peuvent se calculer successivement conduisant à y_{n+1} de manière explicite.

D'une manière analogue pour l'ordre 4 nous avons :

$$\overset{*}{y}_{n+1} = y_n + \overset{*}{c}_1\ k_1 + ... + \overset{*}{c}_6\ k_6 + O(h^5) \tag{44}$$

ce qui conduit à l'estimation d'erreur :

$$err = \sum_{i=1}^{6} (c_i - \overset{*}{c}_i) k_i \tag{45}$$

Cette estimation d'erreur est utilisée pour piloter l'avancement du calcul, en particulier le pas de temps. Dans la pratique, le pilotage n'est pas si simple qu'il peut paraître de prime abord. Il tient compte de la précision disponible sur la machine de calcul, d'un nécessaire équilibrage des différentes équations de (42), des notions : d'erreurs globales (à tout le membre du vecteur "y") ou locales à chaque composante, d'erreurs absolues ou relatives, d'une stratégie pour augmenter ou diminuer le pas d'un calcul à l'autre en fonction des résultats obtenus ...

Dans notre cas, nous nous sommes appuyés d'une part sur les algorithmes proposés dans (cf.[Press et al., 2002] §16.2 et dans ([Engeln-Müllges and Uhlig, 1996]) §17.3, et d'autre part sur l'algorithme "RKF45.CC" que l'on peut consulter à l'adresse ([Watts and Shampine, 2005]).

1.8.3 Implantation

L'implantation comprend deux parties. Tout d'abord, une classe (au sens C++) de méthodes générales de résolution d'un système d'équations différentielles du premier ordre par la méthode de Runge-Kutta imbriqué a été mise en place. Cette classe intègre : les méthodes RK d'ordre 2 et 3 classiques , RK d'ordre 3 et 4 suivant l'algorithme proposé par Fehlberg , RK d'ordre 4 - 5 suivant l'algorithme proposé par Cash-Karp, et enfin la méthode de pilotage.

Ces méthodes sont organisées sous forme de template d'une classe générique qui doit contenir la fonction "f" et le vecteur "y".

La seconde partie de l'implantation concerne la définition de l'algorithme d'avancement temporel sous forme d'une classe dédiée au même titre que l'algorithme de Tchamwa par exemple. L'avancement temporel s'obtient à partir de la fonction "f" calculée d'après (41) et de l'algorithme de pilotage RK. Au cours du calcul de "f", on introduit les conditions limites, et on résout le système par inversion de la matrice "M".

Par rapport aux algorithmes DFC ou Tchamwa, le coût en temps de calcul d'un avancement temporel dépend de l'ordre de la méthode, mais dans tous les cas il est bien supérieur. Par exemple dans le cas RK45, 5 nouvelles évaluations de la fonction "f" (la première provenant du pas précédent) sont nécessaires pour un pas de temps, contrairement au cas DFC ou Tchamwa où une seule évaluation est nécessaire. D'une manière simplifiée, on peut dire que les méthodes DFC et dérivées sont équivalentes à une méthode RK du premier ordre sans vérification de la précision.

1.9 Convergence des différents schémas numériques

Un schéma numérique est dit convergent s'il est à la fois consistant et stable. L'étude de consistance et de stabilité fait appel à la notion de matrice d'amplification et la condition associée sur son rayon spectral.

La consistance permet, dans certains cas, de contraindre les paramètres de contrôle des schémas numériques. La présentation qui suit s'appuie sur des travaux effectués dans le cadre de la thèse d'Anthony Soive.

1.9.1 Consistance

Si l'on écrit un schéma numérique de la forme :

$$M\ddot{q}_{n+1} + \mathcal{R}_{int}(\dot{q}_{n+1}, q_{n+1}) = \mathcal{R}_{ext}(\dot{q}_{n+1}, q_{n+1})$$

$$\dot{q}_{n+1} = f(\dot{q}_n, \ddot{q}_n, \ddot{q}_{n+1})$$

$$q_{n+1} = f(q_n, \dot{q}_n, \dot{q}_{n+1}, \ddot{q}_n, \ddot{q}_{n+1})$$

et si l'on note $u_n^T = [\dot{q}_n, q_n]$, on peut étudier la consistance du schéma de la façon suivante :

On dit qu'un schéma d'intégration est consistant si

$$\lim_{h\to 0} \frac{u_{n+1} - u_n}{h} = \dot{u}_n$$

ce qui entraîne, pour les différents algorithmes explicités précédemment

— pour la méthode de Newmark ou HHT

$$\lim_{h\to 0} \frac{u_{n+1} - u_n}{h} = \lim_{h\to 0} \begin{pmatrix} (1-\gamma)\ddot{q}_n + \gamma\ddot{q}_{n+1} \\ \dot{q}_n + h(\frac{1}{2} - \beta)\ddot{q}_n + h\beta\ddot{q}_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ddot{q}_n \\ \dot{q}_n \end{pmatrix}$$

— pour la méthode de Tchamwa

$$\lim_{h\to 0} \frac{u_{n+1} - u_n}{h} = \lim_{h\to 0} \begin{pmatrix} \lambda\ddot{q}_n \\ \alpha\dot{q}_n + \gamma\dot{q}_{n+1} + h\beta\ddot{q}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda\ddot{q}_n \\ (\alpha+\gamma)\dot{q}_n \end{pmatrix}$$

Ainsi les méthodes de Newmark et de Hilbert, Hughes et Taylor sont consistantes quelques soient la valeur de leurs paramètres. En revanche, la méthode de Tchamwa l'est si $\lambda = 1$ et si $\alpha + \gamma = 1$. L'algorithme de Tchamwa devient alors :

$$\begin{cases} M\ddot{q}_{n+1} + \mathcal{R}_{int}(\dot{q}_{n+1}, q_{n+1}) = \mathcal{R}_{ext}(\dot{q}_{n+1}, q_{n+1}) \\ \dot{q}_{n+1} = \dot{q}_n + h\ddot{q}_n \\ q_{n+1} = q_n + \alpha h\dot{q}_n + \beta h^2\ddot{q}_n + \gamma h(\dot{q}_n + h\ddot{q}_n) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M\ddot{q}_{n+1} + \mathcal{R}_{int}(\dot{q}_{n+1}, q_{n+1}) = \mathcal{R}_{ext}(\dot{q}_{n+1}, q_{n+1}) \\ \dot{q}_{n+1} = \dot{q}_n + h\ddot{q}_n \\ q_{n+1} = q_n + h\dot{q}_n + (\beta+\gamma)h^2\ddot{q}_n \end{cases}$$

1.9.2 Stabilité de la méthode de Tchamwa

Rappelons les expressions des équations de mouvement dans le cadre de petits déplacements :

$$M\ddot{d} + C\dot{d} + Kd = F$$

d étant le déplacement nodal, M la matrice masse, C la matrice d'amortissement et K la matrice de raideur. L'algorithme de Tchamwa devient, après discrétisation temporelle et en notant $\phi = \beta + \gamma$:

$$\begin{cases} M\ddot{q}_{n+1} + C\dot{q}_{n+1} + Kq_{n+1} = F_{n+1} \\ \dot{q}_{n+1} = \dot{q}_n + h\ddot{q}_n \\ q_{n+1} = q_n + h\dot{q}_n + h^2\phi\ddot{q}_n \end{cases}$$

En supposant un amortissement de type Rayleigh et en faisant la décomposition modale de l'équation d'équilibre, on a :

$$\ddot{q}_{n+1} + 2\xi\omega\dot{q}_{n+1} + \omega^2 q_{n+1} = F_{n+1}$$

Le système s'écrit alors

$$\begin{cases} \ddot{q}_{n+1} + 2\xi\omega\dot{q}_{n+1} + \omega^2 q_{n+1} = F_{n+1} \\ \dot{q}_{n+1} = \dot{q}_n(1 - 2\xi h\omega) - h\omega^2 q_n + hF_n \\ q_{n+1} = \dot{q}_n(h - 2\phi\xi h^2\omega) + q_n(1 - \phi h^2\omega^2) + \phi h^2 F_n \end{cases}$$

Si l'on note $u_n = \begin{pmatrix} \dot{q}_n \\ q_n \end{pmatrix}$, A la *matrice d'amplification* et L_n le *vecteur de chargement*, on peut écrire

$$u_{n+1} = Au_n + L_n$$

avec

$$A = \begin{pmatrix} 1 - 2\xi h\omega & -h\omega^2 \\ h(1 - 2\phi\xi h\omega) & 1 - \phi h^2\omega^2 \end{pmatrix}$$

D'autre part, la solution exacte peut s'écrire $u(t_{n+1}) = Au(t_n) + L_n + \tau(t_n)$ où $\tau(t_n)$ est l'erreur de troncature locale. En faisant alors la différence entre la solution exacte et la solution discrétisée, on a

$$e(t_{n+1}) = u(t_{n+1}) - u_{n+1} = A(u(t_n) - u_n) + \tau(t_n)$$

soit encore

$$\begin{aligned} e(t_{n+1}) &= Ae(t_n) + \tau(t_n) \\ &= A\left\{Ae(t_{n-1}) + \tau(t_{n-1})\right\} + \tau(t_n) \\ &= A^2 e(t_{n-1}) + A\tau(t_{n-1}) + \tau(t_n) \\ &= A^{n+1}e(t_0) + \textstyle\sum_{i=0}^{n} A^i \tau(t_{n-i}) \end{aligned}$$

En supposant que l'erreur initiale est nulle, on obtient finalement

$$e(t_{n+1}) = \sum_{i=0}^{n} A^i \tau(t_{n-i}) \tag{46}$$

On dit qu'un schéma numérique est stable s'il existe un pas d'intégration $h_0 > 0$ tel que pour tout $h\epsilon[0, h_0]$, une perturbation finie du vecteur d'état à l'instant t_n n'entraîne qu'une modification non croissante du vecteur d'état $\begin{pmatrix} \dot{q}_{n+j} \\ q_{n+j} \end{pmatrix}$ calculé à un instant ultérieur t_{n+j}.

Il faut alors que le rayon spectral $\rho(A)$, défini par $\rho(A) = max(\lambda^i)$ où λ^i sont les valeurs propres de A, soit strictement inférieur à 1. Les valeurs propres de A sont $\lambda_{1,2} = A_1 + -\sqrt{A_1^2 - A_2}$, avec $A_1 = \frac{1}{2}tr(A)$ et $A_2 = det(A)$.

L'étude de ces valeurs propres permet ainsi de définir une relation entre le temps critique et le paramètre d'amortissement numérique Φ. On obtient finalement en notant $\Omega = \frac{\Delta t \ 2 \ \Pi}{T}$ tel que Δt est le pas de temps, T est la plus petite période du système :

— Pour $\xi = 0$

Condition sur ϕ	condition de stabilité
$\phi \geq 1$	$\Omega < \sqrt{\frac{2}{\phi - \frac{1}{2}}}$

— Pour $\xi \neq 0$

Conditions sur ϕ		Conditions sur ξ	Stabilité $\Omega = \frac{\Delta t \ 2 \ \Pi}{T}$
$\phi = 1 - \frac{2\xi}{\Omega}$		$\forall \xi$	$\Omega < 2$
$\phi > 1 - \frac{2\xi}{\Omega}$	$\phi < \frac{1}{2}$	$\xi \leq \sqrt{1 - 2\phi}$	inconditionnelle
	$\phi > 1$	$\forall \xi$	$\Omega \leq \frac{-\xi + \sqrt{\xi^2 + 2\left(\phi - \frac{1}{2}\right)}}{\phi - \frac{1}{2}}$
	$\frac{1}{2} \leq \phi \leq 1$	$\forall \xi$	$\Omega \leq \frac{-\xi + \sqrt{\xi^2 + 2\left(\phi - \frac{1}{2}\right)}}{\phi - \frac{1}{2}}$
		$\xi \leq \sqrt{2(1-\phi)}$	inconditionnelle
		$\xi > \sqrt{2(1-\phi)}$	$\frac{\xi + \sqrt{\xi^2 - 2(1-\phi)}}{1-\phi} \leq \Omega \leq \frac{\xi - \sqrt{\xi^2 - 2(1-\phi)}}{1-\phi}$

avec

Remarque Dans le cas où $\Phi = 1$ on retrouve la méthode classique des différences finies centrées. On observe que de tous les méthodes c'est la méthode des différences finies centrées qui permet d'avoir un pas de temps critique maximal.

1.10 Amortissement numérique

L'objectif est ici d'introduire un amortissement numérique qui permet de stabiliser soit les hautes fréquences soit même l'ensemble de la structure.

1.10.1 Amortissement de Rayleigh

Une matrice de viscosité C est construite à partir de la matrice de masse M et de la matrice de raideur K. On a $C = \eta(\alpha \ M + \beta \ K)$ qui correspond à la formule classique de Rayleigh, η représente le coefficient de viscosité.

Cette viscosité numérique introduit alors des forces généralisées visqueuses :

$$F_{visqueux} = -\eta(\alpha \ M + \beta \ K)\dot{q} \tag{47}$$

et une énergie visqueuse d'origine numérique :

$$E_{visqueux} = \int_0^t \dot{q}^T \ F_{visqueux} \ dt \tag{48}$$

Dans le cas d'un calcul explicite, la raideur n'est pas explicitement connue. On peut par exemple utiliser alors la relation approchée suivante sur un pas de temps Δt :

$$K_{ii} = |\frac{\delta F_i}{\Delta q_i}| \tag{49}$$

La matrice K ainsi obtenue est diagonale et mesure la raideur tangente du système. Cette expression n'est utilisable que dans le cas où il y a mouvement. Dans le cas où le ddl est immobile, on annule la contribution de K.

Dans Herezh++, l'amortissement complet de Rayleigh n'est possible qu'en implicite où la matrice de raideur est disponible explicitement. En explicite, seule la partie relative à la matrice masse n'est disponible. On se sert néanmoins de l'évaluation approchée de la raideur pour le calcul de l'amortissement critique (cf.1.10.2).

1.10.2 Amortissement critique

Il peut être intéressant d'utiliser une portion de l'amortissement critique qui correspond à l'amortissement maximum sans oscillation. Dans le cas d'un oscillateur masse-ressort à un ddl l'amortissement critique est $C = 2\sqrt{k\ m}$, k étant la raideur du ressort et m étant la masse du ressort.

Dans un calcul explicite, on peut se servir de l'approximation (49) de la raideur pour en déduire un amortissement critique C_i adapté à chaque ddl q_i. Les forces d'origines visqueuses numériques sont alors :

$$F_{visqueux} = -\eta\ C\ \dot{q} \tag{50}$$

η apparaît alors comme la proportion de la viscosité critique.

1.10.3 Bulk viscosity

La méthode du bulk viscosity est une méthode classique qui permet de filtrer automatiquement une partie des hautes fréquences numériques introduites par le schéma numérique d'avancement temporel : par exemple classiquement avec les différences finis centrées. La méthode consiste à introduire un terme de pression hydrostatique P tel que : $P = \rho l(C_1 l I_D^2 - C_2 c I_D)$ si la trace est négative, 0 sinon.

La contrainte finale vaut donc :

$$\boldsymbol{\sigma}_{finale} = \boldsymbol{\sigma} - P\ \boldsymbol{I} = \boldsymbol{\sigma} - \rho l(C_1 l I_D^2 - C_2 c I_D)\ \boldsymbol{I} \tag{51}$$

En fait, le bulk est implanté pour tous les éléments, indépendamment de la loi utilisée. Par contre au niveau de la sortie des résultats, la part de contrainte relative au Bulk est retirée. Ainsi seules les contraintes réelles sont affichées.

Dans le cas d'un choc (ou d'une onde de choc), le coefficient C_1 de la partie quadratique en vitesse de déformation, est sensé contrôler ce qui se passe avant le pic du choc, alors que le coefficient C_2 de la partie linéaire est sensée contrôler ce qui se passe après le passage du pic. Dans le cas du filtrage des hautes fréquences, c'est surtout le paramètre linéaire qui est donc prépondérant.

1.11 Algorithme de Relaxation dynamique

1.11.1 Introduction

Cette partie concerne les algorithmes de relaxation dynamique. Deux types d'amortissement sont proposés : amortissement cinétique et amortissement visqueux. Le premier s'appuie tout d'abord sur les travaux de Barnes puis amélioré par Julien Troufflard (cf. travaux de thèse) et enfin ici étendue à des éléments quelconques cf. travaux de thèse de

Javier Rodriguez Garcia. Pour les détails de la bibliographie, on se reportera aux travaux de thèse de Julien et de Javier puis aux références indiquées. Sont donc indiqués ici les points particuliers, relatifs à l'implantation dans Herezh++ et les éléments théoriques nécessaires.

On considère une simulation d'un phénomène dynamique à l'aide de l'algorithme classique de DFC. L'objectif du calcul est d'obtenir la forme finale de la structure, ceci en supposant que ce résultat ne dépend pas du trajet effectué entre les configurations initiale et finale. Ainsi, dans le cas de grands pas de chargement, on ne peut raisonnablement retenir cette stratégie que dans le cas d'une loi élastique ou hyperélastique. Cependant, on sait que dans le cas de fortes non-linéarités géométriques, la forme finale peut dépendre du trajet même pour un comportement matériel élastique. Ceci constituera donc une limitation. L'algorithme est donc modifié de manière à pouvoir décomposer le chargement en plusieurs incréments (comme dans le cas d'une méthode de Newton).

Compte tenu de l'objectif, et dans le cadre des restrictions présentées, on suppose que la masse n'influence pas le résultat recherché.

L'idée est alors d'adapter pendant le calcul la valeur des composantes de la matrice masse, conjointement à une méthode d'amortissement cinétique ou d'amortissement visqueux, de manière à minimiser le temps de calcul global, ou de façon équivalente, minimiser le nombre de pas de temps conduisant à une solution stable.

1.11.2 Amortissement cinétique et calcul de masses fictives

L'amortissement cinétique consiste à remettre les vitesses à 0, à chaque pic d'énergie cinétique. Dans le cas ou aucune énergie externe n'est fourni, seule reste disponible, l'énergie interne élastique, pour pouvoir évoluer vers la configuration d'équilibre. Lorsqu'il n'y a plus de mouvement, cela signifie que l'équilibre des forces généralisées internes et externes est réalisé : les forces d'accélérations sont nulles. Ces forces d'accélérations sont fonction de la masse.

Barnes propose d'adopter pour un élément triangulaire, une matrice masse diagonale dont les termes m_i sont :

$$mi = \lambda \frac{\Delta t^2}{2}\ k_{imax} \tag{52}$$

avec

$$k_{imax} = \sum_e \frac{ep}{4\ S_0^e}\ \left(\frac{E}{1-\nu^2} + \sigma_x + \sigma_y + \sigma_{xy} \right) \tag{53}$$

où ep est l'épaisseur de l'élément e, S_0^e la surface initiale de l'élément,$\sigma_x\ \sigma_y\ \sigma_{xy}$ sont les composantes du tenseur des contraintes dans un repère orthonormé que l'on suppose lié à l'élément, E et ν sont les coefficients d'une loi élastique isotrope. Le pas de temps est arbitraire, par simplicité il est choisi égal à 1 dans la formule du calcul de la masse. La conséquence est que ce pas de temps n'intervient pas directement au niveau de l'algorithme d'avancement temporel, si ce n'est au niveau du chargement, des conditions limites et du comportement matériel. Dans ce dernier cas on sort du contexte normal de l'utilisation de l'algorithme ! voir les remarques précédentes sur la réversibilité de la loi de comportement.

Julien Troufflard propose de supprimer le terme de surface ce qui permet d'obtenir une grandeur homogène à une masse. Il montre en particulier que dans ce cas la valeur

optimum du coefficient Λ est beaucoup plus stable, ce qui constitue un réel avantage lorsque l'on cherche à définir la valeur de ce paramètre de contrôle.

Dans notre cas, nous proposons d'étendre la formulation d'une part à d'autres éléments et d'autre part à d'autres lois de comportement. L'idée est ainsi d'étudier la faisabilité de cette extension.

Le terme $\frac{E}{1-\nu^2}$ peut-être considéré comme contrôlant le changement de forme ou le changement de volume de l'élément. Il est donc remplacé par une combinaison linéaire du module de compressibilité et du module de cisaillement moyen, disponible pour toutes les lois élastiques et hyper-élastiques : $\alpha\ K + \beta\mu$. Dans un premier temps on pourra choisir par exemple $\alpha = \beta = 1$ ce qui conduit à une grandeur sensiblement identique à la formule initiale à condition que l'incompressibilité ne soit pas trop importante.

Par exemple si $\nu = 0.3$ on obtient : $\alpha\ K + \beta\mu \approx 1.21\ E$ alors qu'avec la formule de Barnes on a : $E/(1. - \nu) \approx 1.1\ E$

Le terme $\sigma_x + \sigma_y + \sigma_{xy}$ peut-être considéré comme représentatif du niveau de contrainte atteint dans le matériau, niveau cumulant les aspects sphérique et déviatorique. Il est donc remplacé par une combinaison d'invariants

$$1/3.(\sigma_I + \sigma_{II} + \sigma_{III}) = \frac{\boldsymbol{I}_\sigma}{3} \quad \text{et} \quad 0.5\ \sigma_{mises}$$

, avec σ_{Ii} les valeurs propres de $\boldsymbol{\sigma}$, et σ_{mises} la contrainte de mises. A priori on prend la valeur absolue de chaque terme de manière à garantir une masse positive.

Au final on obtient :

$$k_{imax} = \sum_e \frac{ep}{4} \left(\alpha\ K + \beta\mu + \gamma \frac{\boldsymbol{I}_\sigma}{3} + \frac{\theta}{2}\ \sigma_{mises}) \right) \tag{54}$$

Les paramètres α, β, γ, θ permettent ainsi de contrôler l'influence de chaque entité.

Dans le cas d'un élément 3D, l'épaisseur est remplacée par la longueur caractéristique suivante : $l_{car} = (volume)^{1/3}$. Le reste de la formule est inchangé par commodité.

Dans le cas d'un élément 1D, l'épaisseur est remplacée par la longueur caractéristique suivante : $l_{car} = volume/(Sectionmoyenne)$. Le reste de la formule est inchangé par commodité.

De manière à étudier le comportement de l'algorithme, différents cas de calcul sont possibles d'une part au niveau du calcul de la masse, et d'autre part au niveau du test de la convergence.

Concernant le calcul de la masse, en prenant en compte tous les éléments "N"entourant un noeud, on considère les cas suivant :

1. la formule (54) est cumulé au noeud selon :

$$k_{noeud} = \sum_{ne=1}^{N} k_{imax}$$

   la valeur finale à un noeud dépend donc du nombre d'éléments qui contiennent le noeud.

2. on retient la valeur maximum de (54), calculé pour tous les éléments qui contiennent le noeud :
$$k_{noeud} = Max_N(k_{imax})$$
3. on retient la valeur moyenne de (54), calculé pour tous les éléments qui contiennent le noeud :
$$k_{noeud} = \frac{1}{N}\sum_{ne=1}^{N} k_{imax}$$
4. idem le cas 3, et de plus on divise par la surface moyenne entourant le noeud, calculée de la manière suivante :
$$k_{noeud} = \sum_{ne=1}^{N} k_{imax} / \frac{S_{ne}}{nbn_{ne}}$$
où S_{ne} est la surface de l'élément et nbn_{ne} est le nombre de noeuds de l'élément.

Concernant la convergence, deux cas sont investigués :

1. la convergence s'appuie sur le résidu en absolu ou relatif suivant la méthode générale utilisée par exemple pour mesurer la convergence dans un calcul statique.
2. la convergence s'appuie sur le déplacement (ou la vitesse) selon les paramètres de l'algorithme de relaxation cinétique.

1.11.3 Amortissement visqueux critique

L'objectif est d'utiliser un amortissement qui permet d'atteindre le plus rapidement possible la solution statique. Tout d'abord on s'intéresse à l'algorithme proposé par P. Underwood [Underwood, 1983].

Matrice masse La première partie concerne le calcul de la matrice masse. Underwood propose d'utiliser le théorème de Gerschgorin qui permet de trouver une borne supérieure à la valeur propre i de la raideur d'où une matrice masse fictive permettant la stabilité qui se calcule sous la forme :

$$m_{ii} \geq \frac{1}{4}(\Delta t)^2 \sum_j |K_{ij}| \tag{55}$$

avec m_{ii} les composantes diagonales de la matrice masse, K_{ij} les composantes (i,j) de la matrice de raideur. D'une manière pratique, dans notre cas, on retient également le max des 3 composantes en dimension 3 (2 ou 1 en dimension 2 ou 1), ceci pour pallier au fait qu'une des 3 raideurs peut éventuellement être nulle, par exemple dans le cas d'une membrane. Ainsi d'une manière pratique dans Herezh la relation implantée permettant le calcul des masses fictives m_{ii}, s'écrit sous la forme de :

$$m_{ii} = \frac{\lambda(\Delta t)^2}{2} S_i \text{ avec } \quad S(i) = MAX_{a=1}^{dim} \sum_{j=1,b=1}^{n,dim} |K(a_i, b_j)| \tag{56}$$

avec "dim" la dimension du problème physique. λ est un paramètre qui doit-être supérieur à 0.5 pour garantir la stabilité du schéma. Underwood propose d'utiliser un temps de 10% supérieur à la limite critique, ce qui revient à prendre une valeur de $\lambda = 0.605 \approx 0.6$

Mise à jour de la matrice masse : D'une manière pratique, si l'on considère la maximum sur les 3 dimensions pour le calcul de la matrice masse (cf. 55) la raideur initiale reste souvent supérieure à la raideur en cours de calcul. Cependant, des non-linéarités de structures (éventuellement de matériau) peuvent faire apparaître un accroissement de la raideur en cours de calcul. Il est alors nécessaire de mettre à jour les masses fictives pour garantir la continuité de la stabilité. Underwood propose d'utiliser un critère qui s'appuie sur "the perturbed apparent frequency error measure" fonctionnant de la manière suivante. On calcule l'erreur ϵ selon :

$$\epsilon = MAX_{i=1}^{nbddl}(\epsilon_i) \text{ avec } \epsilon_i = \frac{\lambda(\Delta t)^2}{2}\frac{|\Delta\ddot{X}_i|}{|\Delta X_i|} \tag{57}$$

avec $\Delta\ddot{X}_i$ l'accroissement de l'accélération pour le ddl i, lors du précédent incrément de temps, et ΔX_i l'accroissement de la position. Puis on effectue le test ϵ ?> 1, si oui, il faut soit recalculer la matrice masse ou sinon diminuer le pas de temps c'est-à-dire augmenter le paramètre λ.

Amortissement visqueux L'amortissement visqueux est introduit à l'aide d'une matrice diagonale.

$$[C] = c[M] \; avec \;\; c = 2\omega_0 \tag{58}$$

ω_0 est supposé être la fréquence la plus basse du système, approchée à l'aide du quotient de Rayleigh's.

$$\omega_0^2 \approx \frac{\Delta X^T K^n \Delta X}{\Delta X^T M \Delta X} \tag{59}$$

Dans le cas où la matrice K^n n'est pas directement accessible, Underwood propose une seconde approximation dans le cadre d'un algorithme d'avancement de type différences finies :

$$\omega_0^2 \approx \frac{\Delta X^T \, {}^l K^n \, \Delta X}{\Delta X^T M \Delta X} \; avec \quad {}^l K_{ii}^n = \frac{\Delta R_{i(statique)}^n}{\Delta t \; \dot{X}_i^{n-1/2}} \tag{60}$$

En fait la dérivée numérique peut s'effectuer soit par rapport à l'incrément de ddl soit par rapport à la vitesse :

$$(2) \; {}^l K_{ii}^n = \frac{\Delta R_{i(statique)}^n}{\Delta X} \tag{61}$$

Si on retient cette dernière expression sera conduirait au calcul de la fréquence minimale :

$$\omega_0^2 \approx \frac{\Delta X^T \Delta R_{i(statique)}^n}{\Delta X^T M \Delta X} \text{ ou bien } \omega_0^2 \approx \frac{\dot{X}^T \Delta R_{i(statique)}^n}{\dot{X}^T M \dot{X}} \tag{62}$$

Underwood propose également deux limitations.

- Dans le cas où la valeur obtenue pour ω_0^2 est négative, il propose de poser $\omega_0^2 = 0$.
- En supposant que l'on a un pas de temps proche du pas critique mis à 1, cela signifie que la fréquence maxi est proche de 2 ($\Delta t \approx 2/\omega_{max}$). Dans ce cas la fréquence minimale doit également être inférieure à 2. Ainsi si l'on a : $\omega_0^2 > 4$, il y a une incohérence. Underwood propose de limiter ω_0 a une valeur typiquement 1.9

Troisième partie

Métriques

2 Particularités liées à la vitesse de déformation virtuelle

La forme variationnelle de l'équation d'équilibre fait apparaître le terme de vitesse de déformation virtuelle $\overset{*}{\boldsymbol{D}}$. La présentation qui suit concerne le calcul de ce terme ainsi que sa variation par rapport aux degrés de liberté.

Tout d'abord, rappelons que la vitesse de déformation peut s'exprimer sous la forme :

$$\boldsymbol{D} = \frac{1}{2}(V_i|_j + V_j|_i)\hat{\vec{g}}^i \otimes \hat{\vec{g}}^j \tag{63}$$

Dans le cas d'une discrétisation classique $\vec{V} = V^{ar}\vec{I}_a\varphi_r$:

$$V_i|_j = \vec{V}_{,j}.\hat{\vec{g}}_i = (V^{ar}\vec{I}_a\varphi_{r,j}).(X^{bs}\vec{I}_b\varphi_{s,i}) = V^{ar}\varphi_{r,j}\varphi_{s,i}X^{as} \tag{64}$$

D'où la vitesse de déformation :

$$D_{ij} = V^{ar}(\varphi_{r,j}\varphi_{s,i} + \varphi_{r,i}\varphi_{s,j})X^{as} \tag{65}$$

Dans le cas de vitesses virtuelles :

$$\overset{*}{D}_{ij} = \overset{*}{V}^{ar}(\varphi_{r,j}\varphi_{s,i} + \varphi_{r,i}\varphi_{s,j})X^{as} \tag{66}$$

Cette expression est linéaire en fonction des degrés de liberté. On en déduit sa variation par rapport aux degrés de liberté.

$$\frac{\partial \overset{*}{D}_{ij}}{\partial X^{bs}} = \delta^{ba}\overset{*}{V}^{ar}(\varphi_{r,j}\varphi_{s,i} + \varphi_{r,i}\varphi_{s,j}) \tag{67}$$

Cette expression est constante tout au long du calcul, et ne dépend que du type d'interpolation. Elle peut donc avantageusement être évaluée et stockée au début du calcul, pour chaque type d'élément dans le cas d'un calcul implicite qui s'appuie sur une matrice tangente analytique, type Newton Raphson.

Quatrième partie

Lois de comportements

3 Loi de Hooke isotrope 3D et 2D

Il s'agit de la loi classique élastique de Hooke qui suppose une relation linéaire entre contraintes et déformations. La loi peut se représenter par exemple à l'aide de deux coefficients de proportionnalité :

$$-P = \frac{trace(\sigma)}{3} = K\ trace(\boldsymbol{\varepsilon}) \ \ et \ \ \boldsymbol{S} = 2\ G\ \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \tag{68}$$

où K est le module de compressibilité et G le module de cisaillement.

On a :

$$K = \frac{E}{3(1-2\ \nu)}\ et\ G = \frac{E}{2(1+\nu)} \tag{69}$$

avec E et ν le module d'Young et le coefficient de Poisson.

La contrainte peu également est calculée via l'expression équivalente suivante :

$$\boldsymbol{\sigma} = \left(\frac{(E\ \nu)}{((1.-2.\nu)\ (1+\nu))}\boldsymbol{I}_{\varepsilon}\right)\boldsymbol{I} + \frac{E}{(1+\nu)}\ \boldsymbol{\varepsilon} \tag{70}$$

L'expression $trace(\varepsilon)$ est sensée représenter la variation relative volumique $\frac{\Delta vol}{vol_0}$. En petite déformation et dans un repère orthonormé, en tenant compte de l'expression approchée : $\lambda_i \approx 1+\varepsilon_{ii}$, on obtient : $\frac{vol-vol_0}{vol_0} \approx \frac{vol-vol_0}{vol} \approx trace(\varepsilon)$, λ_i représentant l'élongation dans la direction "i" (i.e. $\lambda_i = L_i/L_{i0}$).

Dans le cas de l'utilisation de la mesure de déformation logarithmique $e_{ii} = \ln(\lambda_i)$ d'où $\ln(V) = trace(\boldsymbol{e})$, avec $V = vol/vol_0$

Par contre dans le cas des transformations finies (grandes déformations) avec une mesure d'Almansi (mesure par défaut dans Herezh++) ou la mesure classique de Green Lagrange, l'expression représente grossièrement la variation relative de volume. Dans ce dernier contexte, la loi reste utilisable, mais la signification des coefficients change, en particulier le coefficient K ne représente plus exactement un module de compressibilité.

On retiendra donc que les résultats dépendent du type de mesure de déformation utilisé, dans le cas des grandes déformations (ou transformations finies).

Le comportement se décline aisément en 4 cas particuliers :

1. une seule contrainte est non nulle (ex : traction simple) : utilisée par exemple par les éléments biellettes,
2. état de déformation plane : utilisée par exemple par des éléments 2D (triangles, quadrangles)
3. état de contrainte plane : utilisée par exemple par des éléments 2D (triangles, quadrangles)
4. état général 3D : utilisée par exemple par des éléments volumiques.

Dans le cas de la recherche du tenseur contrainte, on dispose du tenseur de déformation, complet pour les cas 3D, 2D en déformation plane et 1D. Pour le cas de contrainte plane, il est possible d'utiliser explicitement le fait que l'effort normal est nul, ce qui permet d'obtenir la déformation normale.

La relation (70) vraie quelque soit l'état élastique dans le cas du modèle de Hooke, permet le calcul de la déformation suivant l'axe 3, compte tenu de la nullité de la contrainte, selon par exemple en mixte :

$$\varepsilon_3^3 = \frac{-\nu}{1-\nu}\ (\varepsilon_1^1 + \varepsilon_2^2) \tag{71}$$

La trace de $\boldsymbol{\varepsilon}$ s'en déduit. Les termes $\sigma_\beta^\alpha, \quad (\alpha,\ \beta\ = 1, 2)$ s'obtiennent alors en utilisant de nouveau la relation (70).

Dans le cas de l'utilisation de la loi en contrainte plane avec des éléments 2D (plaques, coques) l'épaisseur de l'élément varie, et est mise à jour dans le calcul. En particulier l'équilibre mécanique tient compte de la variation de l'épaisseur. On se reportera à (15.1) pour le détail du calcul de la mise à jour de l'épaisseur dans un cas générale. Bien noter que le module de compressibilité utilisé pour la mise à jour de l'épaisseur est toujours, dans le cas de la loi de Hooke, celui calculé par l'expression (69), quelle que soit la mesure de déformation utilisée. Ceci peut entraîner une différence entre les plaques ou poutres en traction, comparées à un calcul en 3D volumique, dans le cas de la mesure d'Almansi, et de grandes déformations. A priori, il est alors préférable d'utiliser une loi hyperélastique. On se reportera à (15.3) pour plus d'information. Noter également qu'il est possible d'utiliser la mesure de déformation logarithmique avec la loi de Hooke. Dans ce cas en traction simple, les calculs 3D et contraintes planes donnent les mêmes résultats (cf. 15.3).

Enfin, il est possible de définir un module d'Young thermodépendant, selon une fonction quelconque, définie soit à l'aide des fonctions analytiques déjà définies dans Herezh++ ou soit via un tableau de points.

3.1 Opérateur tangent $\frac{\partial \sigma^{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}}$

On part de l'expression (70) que l'on réécrit sous la forme condensée :

$$\boldsymbol{\sigma} = (\alpha_1 \boldsymbol{I}_\varepsilon)\, \boldsymbol{I} + \alpha_2\ \boldsymbol{\varepsilon} \tag{72}$$

Ou encore :

$$\sigma^{ij} = \alpha_1 \boldsymbol{I}_\varepsilon \hat{g}^{ij} + \alpha_2\ \varepsilon_{rm}\ \hat{g}^{rj}\ \hat{g}^{mj} \tag{73}$$

On suppose que la mesure de déformation est celle d'Almansi. Dans ce cas nous avons :

$$\begin{aligned} \frac{\partial I_\varepsilon}{\partial \varepsilon_{kl}} &= \hat{g}^{kl} - 2\ \varepsilon^{kl} \\ \frac{\partial \hat{g}^{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}} &= -2\ \hat{g}^{ik}\ \hat{g}^{jl} \end{aligned} \tag{74}$$

D'où le calcul de l'opérateur tangent :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma^{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}} &= \alpha_1\ \frac{\partial I_\varepsilon}{\partial \varepsilon_{kl}}\ \hat{g}^{ij} + \alpha_1 \boldsymbol{I}_\varepsilon\ \frac{\partial \hat{g}^{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}} + \alpha_2\ \delta^{kr}\ \delta^{lm}\ \hat{g}^{ri}\ \hat{g}^{mj} + \alpha_2\ \varepsilon_{rm}\ \frac{\partial \hat{g}^{ri}}{\partial \varepsilon_{kl}}\ \hat{g}^{mj} + \alpha_2\ \varepsilon_{rm}\ \hat{g}^{ri}\ \frac{\partial \hat{g}^{mj}}{\partial \varepsilon_{kl}} \\ &= \alpha_1(\hat{g}^{kl} - 2\ \varepsilon^{kl})\hat{g}^{ij} - 2\alpha_1 \boldsymbol{I}_\varepsilon\ \hat{g}^{ik}\ \hat{g}^{jl} + \alpha_2\ \hat{g}^{ik}\ \hat{g}^{jl} \\ &\quad -2\alpha_2\ \varepsilon_{rm}\ \hat{g}^{rk}\ \hat{g}^{il}\ \hat{g}^{mj} - 2\alpha_2\ \varepsilon_{rm}\ \hat{g}^{ri}\ \hat{g}^{mk}\ \hat{g}^{jl} \\ &= \alpha_1 \hat{g}^{ij}\hat{g}^{kl} - 2\alpha_1 \hat{g}^{ij}\varepsilon^{kl} + (\alpha_2 - 2\alpha_1 \boldsymbol{I}_\varepsilon)\ \hat{g}^{ik}\ \hat{g}^{jl} - 2\alpha_2\ (\hat{g}^{il}\varepsilon^{jk} + \varepsilon^{ik}\ \hat{g}^{jl}) \end{aligned} \tag{75}$$

En notation tensorielle cela donne pour l'opérateur tangent relatif aux variations des coordonnées deux fois contravariantes de la contrainte, par rapport aux coordonnées deux fois covariantes de la déformation, et en ne conservant pour l'opérateur que les termes qui respectent les symétries, les autres termes disparaissant lors de l'application de la méthode de Newton avec le PPV :

$$\left(\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\epsilon}}\right)_{..|..} (sym) = \alpha_1 \boldsymbol{I} \otimes \boldsymbol{I} - 2\alpha_1 \boldsymbol{I} \otimes \boldsymbol{\varepsilon} + (\alpha_2 - 2\alpha_1 \boldsymbol{I}_\varepsilon)\ \boldsymbol{I} \overset{*}{\bar{\otimes}} \boldsymbol{I} - 4\alpha_2\ \boldsymbol{I} \overset{*}{\bar{\otimes}} \boldsymbol{\varepsilon} \tag{76}$$

Avec la notation suivante :

$$\boldsymbol{T''} = \boldsymbol{A} \overset{*}{\bar{\otimes}} \boldsymbol{B} = 1/4.(A^{ik}.B^{jl} + A^{jk}.B^{il} + A^{il}.B^{jk} + A^{jl}.B^{ik})\hat{g}_i \otimes \hat{g}_j \otimes \hat{g}_k \otimes \hat{g}_l \tag{77}$$

Explication :
Les tenseurs de contraintes et de déformation sont symétriques. Dans une méthode de Newton, on va déterminer un incrément de contrainte via la relation :

$$\begin{aligned}
\Delta\sigma^{ij} &= 1/2\left(\Delta\sigma^{ij} + \Delta\sigma^{ij}\right) \\
&= \frac{\partial \sigma^{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}}\ \Delta\varepsilon_{kl} \\
&= 1/2\left(\frac{\partial \sigma^{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}}\ \Delta\varepsilon_{kl} + \frac{\partial \sigma^{ij}}{\partial \varepsilon_{lk}}\ \Delta\varepsilon_{lk}\right) \\
&= 1/4\left(\frac{\partial \sigma^{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}}\ \Delta\varepsilon_{kl} + \frac{\partial \sigma^{ij}}{\partial \varepsilon_{lk}}\ \Delta\varepsilon_{lk} + \frac{\partial \sigma^{ji}}{\partial \varepsilon_{kl}}\ \Delta\varepsilon_{kl} + \frac{\partial \sigma^{ji}}{\partial \varepsilon_{lk}}\ \Delta\varepsilon_{lk}\right) \\
&= 1/4\left(\frac{\partial \sigma^{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}} + \frac{\partial \sigma^{ij}}{\partial \varepsilon_{lk}} + \frac{\partial \sigma^{ji}}{\partial \varepsilon_{kl}} + \frac{\partial \sigma^{ji}}{\partial \varepsilon_{lk}}\right)\ \Delta\varepsilon_{kl}
\end{aligned} \tag{78}$$

Ceci justifie le calcul de l'opérateur tangent, qui permet d'obtenir par produit doublement contracté, le même résultat que l'opérateur complet. D'où la notation "(sym)" qui rappelle que la relation (76) ne correspond pas terme à terme à (75). Par contre, l'opérateur ainsi calculé étant symétrique par rapport à ses deux premiers indices et par rapport à ses deux derniers indices, il est représenté par seulement 36 composantes.
On peut également consulter (27.3) pour une explication plus générale.

3.1.1 Cas uniquement sphérique

Cas où seul l'opérateur de la partie sphérique est conservé. En fait, on peut utiliser les mêmes relations que précédemment, avec comme particularités : $\alpha_1 = K$ et $\alpha_2 = 0$ d'où le résultat :

$$\left(\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\epsilon}}\right)_{..|..} = K\boldsymbol{I} \otimes \boldsymbol{I} - 2K\boldsymbol{I} \otimes \boldsymbol{\varepsilon} + (-2K\boldsymbol{I}_\varepsilon)\ \boldsymbol{I} \overset{*}{\bar{\otimes}} \boldsymbol{I} \tag{79}$$

3.1.2 Cas uniquement déviatorique

Cas où seul l'opérateur de la partie déviatorique est conservé. En fait, on peut utiliser les mêmes relations que précédemment, avec comme particularités : $\alpha_1 = \frac{-2G}{3} = \frac{-E}{3(1+\nu)}$ et $\alpha_2 = 2G$ d'où le résultat en utilisant la formule (76).

4 Comportement hyperélastique

Les éléments théoriques concernant l'ensemble des comportements hyperélastiques implantés dans Herezh++, sont explicités dans le document "hyper-elasticite.pdf" . On se reportera donc à ce document.

5 Comportements hypoélastiques

5.1 Loi 3D isotrope et intégration

Le comportement hypoélastique isotrope implanté est définie par les relations suivantes :

$$\dot{\boldsymbol{S}} = \mu\ \bar{\boldsymbol{D}} \quad \text{et} \quad \dot{I}_\sigma = K_c\ I_{\boldsymbol{D}} \tag{80}$$

avec $\bar{\boldsymbol{D}}$ le déviateur du tenseur vitesse de déformation, $\dot{\boldsymbol{S}}$ une dérivée matérielle du déviateur des contraintes, $\dot{I}_\sigma$ la dérivée de la trace du tenseur des contraintes ($= -3 \times pression$) et $I_{\boldsymbol{D}}$ la trace du tenseur de vitesse de déformation.

Ainsi μ est un module qui est analogue à 2 fois le module classique de cisaillement en petites déformations et K_c est un module qui est analogue à 3 fois le module classique de compressibilité en petites transformations.

On retrouve donc dans ces relations une forme incrémentale de la loi de Hooke. Cependant il faut noter qu'une loi hypoélastique ne conduit pas nécessairement à un comportement réversible. En particulier l'utilisation de modules μ et K_c variables pendant le chargement, permet de simuler une grande variété de comportements, en général non-réversibles.

Dans l'implantation dans Herezh++, les paramètres de la loi μ et K_c, peuvent être, dépendants ou non de la température, et éventuellement dépendant de l'intensité au carré du tenseur de déformation $II_\varepsilon = \varepsilon : \varepsilon$. On pourrait également envisager d'autres types de dépendances, a priori il n'y a pas de limitation.

Trois types de dérivée matérielle sont implantées dans Herezh++ : Jauman (cf. 6.1 et 6.3) (c'est-à-dire 1/2 de la somme des dérivées de Lie en mixte dans les deux sens), de Lie deux fois covariantes (valeur par défaut), et de Lie deux fois contravariantes. Un paramètre de réglage optionnel permet de choisir entre ces 3 cas.

D'une manière pratique, la loi de comportement est intégrée par linéarisation de l'équation constitutive. Considérons un pas de temps Δt et l'accroissement de contrainte correspondant $\Delta\boldsymbol{\sigma}$. Cherchons tout d'abord à intégrer la partie sphérique de la loi :

$$\frac{\Delta I_{\boldsymbol{\sigma}}}{\Delta t} = 3\ K_c \boldsymbol{I}_D \quad \text{d'où} \quad \Delta I_{\boldsymbol{\sigma}} = 3\ K_c\ \Delta t\ \boldsymbol{I}_D \tag{81}$$

avec $\Delta\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_{t+\Delta t} - \boldsymbol{\sigma}_t$.

Le choix du type de dérivée matérielle intervient au niveau du calcul du terme $\boldsymbol{\sigma}_t$ qui représente la grandeur que l'on doit transporter de t à t+Δ t.

Dans le cas d'une dérivée deux fois covariantes nous avons à l'instant final :

$$^{t+\Delta t}_{\ .t}\boldsymbol{\sigma}_{(t)} = \sigma_{ij}(t)\ \hat{\vec{g}}^i \otimes \hat{\vec{g}}^j \tag{82}$$

Pour la dérivée deux fois contravariantes :

$$ {}^{\cdot\cdot}_{t}{}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\sigma}_{(t)} = \sigma^{ij}(t)\ \hat{\vec{g}}_i \otimes \hat{\vec{g}}_j \tag{83} $$

Pour la dérivée de Jauman, on utilise le transport correspondant à la demi-somme des deux résultats précédents.

Dans le cas de la partie déviatorique, le même raisonnement conduit à une relation similaire :

$$ \Delta \boldsymbol{S} = \mu\ \Delta t\ \bar{\boldsymbol{D}} \tag{84} $$

Au final on obtient alors :

$$ I_{(t+\Delta t)}\boldsymbol{\sigma} = K_c\ \Delta t\ \boldsymbol{I}_D + \boldsymbol{I}_{(t)\sigma} \tag{85} $$

et

$$ \boldsymbol{S}_{(t+\Delta t)} = \mu\ \Delta t\ \bar{\boldsymbol{D}} + \boldsymbol{S}_{(t)} \tag{86} $$

5.2 Opérateur tangent $\frac{\partial \sigma^{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}}$

Remarque *Cette partie est construite suivant un canevas analogue au cas de la loi viscoélastique de Maxwell d'où des redondances, qui permettent cependant une lecture indépendantes.*

L'opérateur tangent est utilisé en général (mais pas seulement) pour les équilibres globaux satisfaits de manière implicite via une méthode de Newton. C'est l'algorithme de calcul statique utilisé par défaut dans Herezh++. L'opérateur tangent est par exemple également nécessaire pour un calcul Umat classique, ainsi que pour l'application des contraintes planes et doublement planes.

Dans le cas où d'un calcul Umat classique, les calculs s'effectuent dans une base de travail orthonormée. Actuellement, les cinématiques sont considérées irrotationnelles, ainsi les dérivées temporelles sont directement effectuées dans le repère de travail. L'idée est que le programme qui utilise l'Umat a déjà effectué les transformations de repère.

Dans le cas général (en dehors du cas de l'Umat classique) on doit prendre en compte la variation des bases. Comme pour le cas de l'élasticité linéaire, on suppose que la mesure de déformation est celle d'Almansi (qui est la mesure native d'Herezh).

Le paragraphe 3.1 fournit une partie de la réponse c'est-à-dire les informations liées à la déformation. Concernant la vitesse de déformation en utilisant la relation 104 ce qui conduit à la relation 108 :

$$ \frac{\partial D_{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}} = \frac{1.}{\Delta t}\delta^k_i \delta^l_j $$

D'où pour la trace en tenant compte de l'expression 74, s'écrit 109 :

$$ \begin{aligned} \frac{\partial D^i_i}{\partial \varepsilon_{kl}} &= \frac{\partial D_{ij}\hat{g}^{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}} = \frac{1.}{\Delta t}\delta^k_i\delta^l_j\hat{g}^{ij} + D_{ij}\frac{\partial \hat{g}^{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}} = \frac{1.}{\Delta t}\hat{g}^{kl} - 2\ D_{ij}\ \hat{g}^{ik}\ \hat{g}^{jl} \\ &= \frac{1.}{\Delta t}\hat{g}^{kl} - 2\ D^{kl} \end{aligned} $$

Pour le tenseur vitesse de déformation on aura de manière similaire on obtient la relation 110 :

$$\begin{aligned}\frac{\partial D_i^j}{\partial \varepsilon_{kl}} &= \frac{\partial D_{ie}\hat{g}^{ej}}{\partial \varepsilon_{kl}} = \frac{1}{\Delta t}\delta_i^k\delta_e^l\hat{g}^{ej} + D_{ie}\frac{\partial \hat{g}^{ej}}{\partial \varepsilon_{kl}} = \frac{1}{\Delta t}\delta_i^k\hat{g}^{lj} - 2\ D_{ie}\ \hat{g}^{ek}\ \hat{g}^{jl} \\ &= \frac{1}{\Delta t}\delta_i^k\hat{g}^{lj} - 2\ D_i^k\hat{g}^{jl}\end{aligned}$$

En deux fois contravariants (111) :

$$\begin{aligned}\frac{\partial D^{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}} &= \frac{\partial(\hat{g}^{ie}D_e^j)}{\partial \varepsilon_{kl}} \\ &= \frac{\partial \hat{g}^{ie}}{\partial \varepsilon_{kl}}D_e^j + \hat{g}^{ie}\frac{\partial D_e^j}{\partial \varepsilon_{kl}} \\ &= -2\hat{g}^{ik}\hat{g}^{el}D_e^j + \hat{g}^{ie}\left(\frac{1}{\Delta t}\delta_e^k\hat{g}^{lj} - 2\ D_e^k\hat{g}^{jl}\right) \\ &= -2\hat{g}^{ik}D^{lj} + \left(\frac{1}{\Delta t}\hat{g}^{ik}\hat{g}^{lj} - 2\ D^{ik}\hat{g}^{jl}\right)\end{aligned}$$

et pour la partie sphérique (112) :

$$\begin{aligned}\frac{\partial(\boldsymbol{I}_D\hat{g}^{ij})}{\partial \varepsilon_{kl}} &= \frac{\partial(D_e^e\hat{g}^{ij})}{\partial \varepsilon_{kl}} = \frac{\partial D_e^e}{\partial \varepsilon_{kl}}\hat{g}^{ij} + D_e^e\frac{\partial \hat{g}^{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}} \\ &= \frac{1.}{\Delta t}\hat{g}^{kl}\hat{g}^{ij} - 2\ D^{kl}\hat{g}^{ij} - 2\ D_e^e\hat{g}^{ik}\hat{g}^{jl}\end{aligned}$$

Nous avons maintenant les différents ingrédients pour calculer l'opérateur tangent. Rappelons la forme de la contrainte totale pour une discrétisation temporelle à 1 pas et une intégration implicite :

$$\sigma^{ij} = 1/3\left(K_c\ \Delta t\ \boldsymbol{I}_D + \boldsymbol{I}_{(t)\sigma}\right)\hat{g}^{ij} + \mu\ \left(\ \Delta t\ \left(D^{ij} - 1/3D_e^e\hat{g}^{ij}\right) + S_{(t)}^{ij}\right) \tag{87}$$

Les variations de $\hat{g}^{ij}$ sont données par les relations 74 que l'on rappelle ici :

$$\frac{\partial \hat{g}^{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}} = -2\ \hat{g}^{ik}\ \hat{g}^{jl}$$

Les variations de D^{ij} et D_e^e ont déjà été calculées, reste la variation du terme $S_{(t)}^{ij}$ qui dépend du type de transport effectué. Le chapitre 6.3 décrit le calcul de l'opérateur tangent en fonction du type de transport.

On obtient alors :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma^{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}} &= \frac{K_c}{3}\ \left(\hat{g}^{kl}\hat{g}^{ij} - 2\ \Delta t\ \left(D^{kl}\hat{g}^{ij} + D_e^e\hat{g}^{ik}\hat{g}^{jl}\right)\right) \\ &+\mu\ \left(\hat{g}^{ik}\hat{g}^{lj} - 2\ \Delta t\ \left(\hat{g}^{ik}D^{lj} + D^{ik}\hat{g}^{jl}\right) - \frac{1.}{3}\hat{g}^{kl}\hat{g}^{ij} + \frac{2\ \Delta t}{3}\left(D^{kl}\hat{g}^{ij} + D_e^e\hat{g}^{ik}\hat{g}^{jl}\right)\right) \\ &+\mu\ \frac{\partial S(t)^{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}} \\ &+1/3\ \left(\ \hat{g}^{ij}\frac{\partial \boldsymbol{I}_{(t)\sigma}}{\partial \varepsilon_{kl}} - 2\ \boldsymbol{I}_{\sigma(t)}\ \hat{g}^{ik}\ \hat{g}^{jl}\right)\end{aligned} \tag{88}$$

En notation tensorielle cela donne pour l'opérateur tangent relatif aux variations des coordonnées deux fois contravariantes de la contrainte, par rapport aux coordonnées deux fois covariantes de la déformation, et en ne conservant pour l'opérateur que les termes qui respectent les symétries, les autres termes disparaissant lors de l'application de la méthode de Newton avec le PPV (cf.27) :

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\epsilon}}\right)_{\cdot\cdot|\cdot\cdot} &= \frac{K_c}{3}\left(\boldsymbol{I}\otimes\boldsymbol{I} - 2\,\Delta t\,\left(\boldsymbol{I}\otimes\boldsymbol{D} + \boldsymbol{I}_D\,\boldsymbol{I}\,\overset{*}{\bar{\otimes}}\,\boldsymbol{I}\right)\right)\\ &+\mu\left(\boldsymbol{I}\,\overset{*}{\bar{\otimes}}\,\boldsymbol{I} - 2\,\Delta t\,\left(2\,\boldsymbol{I}\,\overset{*}{\bar{\otimes}}\,\boldsymbol{D}\right) - \frac{1}{3}\boldsymbol{I}\otimes\boldsymbol{I} + \frac{2\,\Delta t}{3}\left(\boldsymbol{I}\otimes\boldsymbol{D} + \boldsymbol{I}_D\,\boldsymbol{I}\,\overset{*}{\bar{\otimes}}\,\boldsymbol{I}\right)\right)\\ &+\mu\left(\frac{\partial\boldsymbol{\sigma}(t)}{\partial\boldsymbol{\epsilon}}\right)_{\cdot\cdot|\cdot\cdot} + \frac{1}{3}\left(\frac{\partial\,(\boldsymbol{I}_{\sigma(t)}\,\boldsymbol{I})}{\partial\varepsilon}\right)_{\cdot\cdot}\end{aligned} \tag{89}$$

Dans cette dernière expression, contrairement à l'expression avec les composantes (88), on a regroupé la variation de la trace de $\sigma(t)$ transportée, car ses différentes expressions suivant le type de transport, sont calculées plus précisément dans le paragraphe 6.3.

Pour optimiser les temps de calcul, les coefficients des tenseurs du quatrième ordre sont regroupés.

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\epsilon}}\right)_{\cdot\cdot|\cdot\cdot} &= \frac{(K_c-\mu)}{3}\,\boldsymbol{I}\otimes\boldsymbol{I} + \left(\frac{-2\,(K_c-\mu)\,\Delta t}{3}\right)\,\boldsymbol{I}\otimes\boldsymbol{D}\\ &+\left(\frac{-2\,(K_c-\mu)\,\Delta t\,\boldsymbol{I}_D}{3}+\mu\right)\,\boldsymbol{I}\,\overset{*}{\bar{\otimes}}\,\boldsymbol{I}\\ &+(-4\,\mu\,\Delta t)\,\boldsymbol{I}\,\overset{*}{\bar{\otimes}}\,\boldsymbol{D}\\ &+\mu\,\left(\frac{\partial\boldsymbol{\sigma}(t)}{\partial\boldsymbol{\epsilon}}\right)_{\cdot\cdot|\cdot\cdot} + \frac{1}{3}\left(\frac{\partial\,(\boldsymbol{I}_{\sigma(t)}\,\boldsymbol{I})}{\partial\varepsilon}\right)_{\cdot\cdot}\end{aligned} \tag{90}$$

On rappelle la notation cf. 578 :

$$\boldsymbol{T}'' = \boldsymbol{A}\,\overset{*}{\bar{\otimes}}\,\boldsymbol{B} = 1/4.(A^{ik}.B^{jl} + A^{jk}.B^{il} + A^{il}.B^{jk} + A^{jl}.B^{ik})\hat{g}_i\otimes\hat{g}_j\otimes\hat{g}_k\otimes\hat{g}_l$$

Dans le cas où seule la partie sphérique de la loi est retenue, ou bien seule la partie déviatorique, on fait l'hypothèse de ne conserver respectivement que les termes facteurs de K_c ou que les termes facteurs de μ. En fait, il s'agit d'une simplification, car le déviateur des contraintes, transporté, peut contenir un terme sphérique non nul suivant le type de transport. On fait l'hypothèse de ne pas en tenir compte dans le calcul de l'opérateur tangent, en supposant que son influence est négligeable.

Remarque Concernant le calcul des énergies, il est fait l'hypothèse dans le post-traitement que l'énergie activée pendant le pas de temps est de type "élastique". En fait, suivant l'évolution des paramètres K_c et μ, la loi peut simuler un comportement qui n'est absolument pas réversible. Il faut alors par exemple se référer au bilan d'énergie sauvegardé sous forme "élastique" entre une charge et une décharge pour statuer plus précisément sur la nature des énergies échangées et donc du type de loi simulé. Cette analyse ne peut pas (a priori) être réalisée pendant le calcul, d'où le rangement de l'énergie activée par défaut dans la zone "énergie élastique".

5.3 Loi 3D orthotrope entraînée et intégration

La modélisation s'appuie sur une analogie avec l'élasticité orthotrope entraînée, présenté en 9. La loi est associée à un repère d'anisotropie, qui est initialement orthonormé puis peut évoluer grâce à une opération de transport. On se reportera à 12 pour le détail des transports disponibles.

Supposons connu un repère d'orthotropie orthonormé nommé $\vec{O}'_a$ par la suite (a= 1..3). Dans ce repère les relations de comportement s'écrivent :

$$\begin{aligned} d\varepsilon_{11} &= \frac{1}{E_1}(d\sigma_{11} - \nu_{12}d\sigma_{22} - \nu_{13}d\sigma_{33}) \\ d\varepsilon_{22} &= \frac{1}{E_2}(-\nu_{21}d\sigma_{11} + d\sigma_{22} - \nu_{23}d\sigma_{33}) \\ d\varepsilon_{33} &= \frac{1}{E_3}(-\nu_{31}d\sigma_{11} - \nu_{32}d\sigma_{22} + d\sigma_{33}) \end{aligned} \tag{91}$$

et

$$d\varepsilon_{ab} = \frac{1}{2.\ G_{ab}}d\sigma_{ab} \quad \text{avec} \quad a \neq b \tag{92}$$

NB : Remarquons que la variance des coordonnées n'a pas d'importance ici initialement, car le repère est orthonormé. Par contre, une fois déformée il faut tenir compte de l'évolution du repère.

D'une manière analogue à l'orthotropie classique on retient les mêmes relations de symétrie simplificatrices :

$$\frac{-\nu_{12}}{E_1} = \frac{-\nu_{21}}{E_2}\ , \quad \frac{-\nu_{13}}{E_1} = \frac{-\nu_{31}}{E_3}\ , \quad \frac{-\nu_{23}}{E_2} = \frac{-\nu_{32}}{E_3} \tag{93}$$

L'intérêt de ces relations est que dans le cas de coefficients matériaux constants, on retrouve par intégrations la loi d'orthotropie entraînée. Néanmoins ces relations ne sont pas obligatoires (elles ne peuvent pas découler d'une hypothèse d'un accroissement d'énergie convexe comme pour l'orthotropie classique), elles sont retenue ici pour simplifier le modèle en diminuant le nombre de paramètre matériau.

Dans un cas général, c'est-à-dire avec des paramètres matériau qui varient en fonction de l'histoire du chargement et du contexte, la loi hypoélastique ne conduit pas à un comportement intégré hyperélastique, ou même réversible. En fait, les paramètres matériau correspondent à un comportement localement tangent, qui intégré, peut permettre de représenter une large gamme de comportements quelconques réversibles ou non.

Remarque Le comportement final intégré pouvant-être assez quelconque, il appartient à l'utilisateur de vérifier la cohérence du choix des paramètres matériau avec les principes de la thermodynamique, en particulier le second principe pour les comportements non réversibles.

6 Loi viscoélastique de Maxwell

6.1 Loi 3D et intégration

D'une manière phénoménologique, la loi isotrope viscoélastique de type Maxwell est la composition en série d'un ressort et d'un amortisseur. Une première extension au compor-

tement classique est la possibilité d'intégrer un comportement élastique pure pour la partie sphérique, ou un comportement visqueux différent de celui pour la partie déviatorique. La partie sphérique élastique peut ainsi être soit identique à une loi de Hooke c'est-à-dire sans viscosité ou soit avec une évolution visqueuse. La partie déviatorique est systématiquement visqueuse. Ainsi la loi s'écrit pour la partie sphérique dans le cas sans viscosité :

$$\boldsymbol{I}_\sigma = \frac{E}{(1-2\nu)}\boldsymbol{I}_\varepsilon \tag{94}$$

$\boldsymbol{I}_\sigma$ et $\boldsymbol{I}_\varepsilon$ étant les traces des tenseurs contraintes et déformations. Et dans le cas avec viscosité :

$$\boldsymbol{I}_D = \frac{1}{3K}\dot{\boldsymbol{I}}_\sigma + \frac{\boldsymbol{I}_\sigma}{\mu_p} \tag{95}$$

Avec $3K = E/(1-2\nu)$

Pour la partie déviatoire on a :

$$\bar{\boldsymbol{D}} = \frac{1}{2G}\dot{\boldsymbol{S}} + \frac{\boldsymbol{S}}{\mu} \tag{96}$$

avec $\bar{\boldsymbol{D}}$ le déviateur du tenseur vitesse de déformation et $\dot{\boldsymbol{S}}$ une dérivée matérielle du déviateur des contraintes. Les paramètres de la loi sont ainsi le module d'Young E, le coefficient de Poisson ν, la viscosité μ , qui peuvent être, dépendants ou non de la température, et éventuellement (mais ce n'est pas obligatoire) une viscosité sur la partie sphérique μ_p.

Trois types de dérivée matérielle sont implantées dans Herezh++ : Jauman (c'est-à-dire 1/2 de la somme des dérivées de Lie en mixte dans les deux sens), de Lie deux fois covariantes (valeur par défaut), et de Lie deux fois contravariantes. Un paramètre de réglage optionnel permet de choisir entre ces 3 cas.

Une deuxième extension à la loi classique est la possibilité de choisir une viscosité non linéaire pour la partie scission. Ceci s'effectue par la définition d'une fonction multiplicative $f(\boldsymbol{II}_{\bar{\boldsymbol{D}}})$ définie à la suite du mot clé "fac_mu_cissionD=". La viscosité indiquée est alors multipliée par $f(\boldsymbol{II}_{tf\bar{o}rD})$ calculée en fonction du taux de cisaillement en cours.

D'une manière pratique, la loi de comportement est intégrée par linéarisation de l'équation constitutive. Considérons un pas de temps Δt et l'accroissement de contrainte correspondant $\Delta\boldsymbol{\sigma}$. Cherchons tout d'abord à intégrer la partie sphérique de la loi (cas d'une viscosité pour la partie sphérique). A partir de (95) nous avons :

$$\frac{\Delta I_{\boldsymbol{\sigma}}}{\Delta t} = 3\ K\ \left(\boldsymbol{I}_D - \frac{\boldsymbol{I}_\sigma}{\mu_p}\right) = 3\ K\ \left(\boldsymbol{I}_D - \frac{\boldsymbol{I}_{(t)\sigma}}{\mu_p} - \frac{\Delta I_{\boldsymbol{\sigma}}}{\mu_p}\right) \tag{97}$$

d'où

$$\Delta I_{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{3\ K\ \Delta t\ \mu_p}{(\mu_p + 3\ K\ \Delta t)}\left(\boldsymbol{I}_D - \frac{\boldsymbol{I}_{(t)\sigma}}{\mu_p}\right) \tag{98}$$

Le choix du type de dérivée matérielle intervient au niveau du calcul du terme $\boldsymbol{\sigma}_t$ qui représente la grandeur que l'on doit transporter de t à t+Δ t.

Dans le cas d'une dérivée deux fois covariantes nous avons à l'instant final :

$$^{t+\Delta t}_{..t}\boldsymbol{\sigma}_{(t)} = \sigma_{ij}(t)\ \hat{\vec{g}}^i \otimes \hat{\vec{g}}^j \tag{99}$$

Pour la dérivée deux fois contravariantes :

$$ {}^{..t+\Delta t}_{t}\boldsymbol{\sigma}_{(t)} = \sigma^{ij}(t)\ \hat{\vec{g}}_i \otimes \hat{\vec{g}}_j \tag{100} $$

Pour la dérivée de Jauman, on utilise le transport correspondant à la demi-somme des deux résultats précédents.

Dans le cas de la partie déviatorique, le même raisonnement conduit à une relation similaire :

$$ \Delta \boldsymbol{S} = \frac{2\ G\ \Delta t\ \mu}{(\mu + 2\ G\ \Delta t)} \left(\bar{\boldsymbol{D}} - \frac{\boldsymbol{S}_{(t)}}{\mu} \right) \tag{101} $$

Au final on obtient alors :

$$ I_{(t+\Delta t)\boldsymbol{\sigma}} = \frac{3\ K\ \Delta t\ \mu_p}{(\mu_p + 3\ K\ \Delta t)} \left(\boldsymbol{I}_D + \frac{1}{3\ K\ \Delta t} \boldsymbol{I}_{(t)\sigma} \right) \tag{102} $$

et

$$ \boldsymbol{S}_{(t+\Delta t)} = \frac{2\ G\ \Delta t\ \mu}{(\mu + 2\ G\ \Delta t)} \left(\bar{\boldsymbol{D}} + \frac{1}{(2\ G\ \Delta t)} \boldsymbol{S}_{(t)} \right) \tag{103} $$

6.2 Opérateur tangent

Deux types d'opérateurs tangents sont nécessaires : la variation des contraintes par rapport aux ddl, et la variation des contraintes par rapport aux composantes de la déformation (pour le fonctionnement Umat par exemple ou encore de contraintes planes...).

Le calcul de la contrainte faisant intervenir la vitesse de déformation, il nous faut connaître sa variation. Pour cela, cette dernière est linéarisée selon :

$$ D_{ij} \approx \frac{\Delta \varepsilon_{ij}}{\Delta t} \tag{104} $$

d'où

$$ \frac{\partial D_{ij}}{\partial ddl} = \frac{1}{\Delta t}\ \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial ddl} \tag{105} $$

D'une manière plus exhaustive, à partir des relations (102) (103), les termes susceptibles de varier, en dehors de la vitesse de déformation, sont : le coefficient de viscosité non linéaire $\mu(\boldsymbol{II}_D)$ et la contrainte $\boldsymbol{\sigma}_{(t)}$ transportée de t à t+Δt.

Pour le premier terme à partir de la définition $\boldsymbol{II}_{\bar{\boldsymbol{D}}} = \boldsymbol{D} : \boldsymbol{D}$ on a :

$$ \frac{\partial \mu}{\partial ddl} = 2.\ \mu'\ \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial ddl} : \boldsymbol{D} \tag{106} $$

avec μ' la dérivée de la fonction μ : $\mu'(x) = d\mu/dx$

Pour le second terme, le résultat dépend du type de transport. Dans tous les cas, la dérivée des composantes transportées, exprimées dans la base de transport, est nulle. Ensuite, lorsque l'on change de base il faut tenir compte de la variation des composantes de la métrique.

Par exemple, supposons que l'on considère un transport deux fois covariants, et que l'on cherche à connaître la variation des composantes mixtes on a :

$$ \frac{\partial \sigma^j_i}{\partial ddl} = \sigma_{ik} \frac{\partial \hat{g}^{kj}}{\partial ddl} \tag{107} $$

6.2.1 Opérateur tangent $\frac{\partial \sigma^{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}}$

Dans le cas où d'un calcul Umat classique, les calculs s'effectuent dans une base de travail orthonormée. Actuellement, les cinématiques sont considérées irrotationnelles, ainsi les dérivées temporelles sont directement effectuées dans le repère de travail. L'idée est que le programme qui utilise l'Umat a déjà effectué les transformations de repère.

Dans le cas général (en dehors du cas de l'Umat classique) on doit prendre en compte la variation des bases. Comme pour le cas de l'élasticité linéaire, on suppose que la mesure de déformation est celle d'Almansi (qui est la mesure native d'Herezh).

Le paragraphe 3.1 fournit une partie de la réponse c'est-à-dire les informations liées à la déformation. Concernant la vitesse de déformation en utilisant la relation 104 :

$$\frac{\partial D_{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}} = \frac{1.}{\Delta t}\delta_i^k \delta_j^l \tag{108}$$

D'où pour la trace en tenant compte de l'expression 74 :

$$\begin{aligned}\frac{\partial D_i^i}{\partial \varepsilon_{kl}} &= \frac{\partial D_{ij}\hat{g}^{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}} = \frac{1.}{\Delta t}\delta_i^k\delta_j^l\hat{g}^{ij} + D_{ij}\frac{\partial \hat{g}^{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}} = \frac{1.}{\Delta t}\hat{g}^{kl} - 2\ D_{ij}\ \hat{g}^{ik}\ \hat{g}^{jl} \\ &= \frac{1.}{\Delta t}\hat{g}^{kl} - 2\ D^{kl}\end{aligned} \tag{109}$$

Pour le tenseur vitesse de déformation on aura de manière similaire :

$$\begin{aligned}\frac{\partial D_i^j}{\partial \varepsilon_{kl}} &= \frac{\partial D_{ie}\hat{g}^{ej}}{\partial \varepsilon_{kl}} = \frac{1}{\Delta t}\delta_i^k\delta_e^l\hat{g}^{ej} + D_{ie}\frac{\partial \hat{g}^{ej}}{\partial \varepsilon_{kl}} = \frac{1}{\Delta t}\delta_i^k\hat{g}^{lj} - 2\ D_{ie}\ \hat{g}^{ek}\ \hat{g}^{jl} \\ &= \frac{1}{\Delta t}\delta_i^k\hat{g}^{lj} - 2\ D_i^k\hat{g}^{jl}\end{aligned} \tag{110}$$

En deux fois contravariants :

$$\begin{aligned}\frac{\partial D^{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}} &= \frac{\partial(\hat{g}^{ie}D_e^j)}{\partial \varepsilon_{kl}} \\ &= \frac{\partial \hat{g}^{ie}}{\partial \varepsilon_{kl}}D_e^j + \hat{g}^{ie}\frac{\partial D_e^j}{\partial \varepsilon_{kl}} \\ &= -2\hat{g}^{ik}\hat{g}^{el}D_e^j + \hat{g}^{ie}\left(\frac{1}{\Delta t}\delta_e^k\hat{g}^{lj} - 2\ D_e^k\hat{g}^{jl}\right) \\ &= -2\hat{g}^{ik}D^{lj} + \left(\frac{1}{\Delta t}\hat{g}^{ik}\hat{g}^{lj} - 2\ D^{ik}\hat{g}^{jl}\right)\end{aligned} \tag{111}$$

et pour la partie sphérique :

$$\begin{aligned}\frac{\partial 1/3 D_e^e\hat{g}^{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}} &= 1/3\frac{\partial D_e^e}{\partial \varepsilon_{kl}}\hat{g}^{ij} + 1/3 D_e^e\frac{\partial \hat{g}^{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}} \\ &= \frac{1.}{3\Delta t}\hat{g}^{kl}\hat{g}^{ij} - 2/3\ D^{kl}\hat{g}^{ij} - 2/3\ D_e^e\hat{g}^{ik}\hat{g}^{jl}\end{aligned} \tag{112}$$

Nous avons maintenant les différents ingrédients pour calculer l'opérateur tangent.

Cas où la partie sphérique est non visqueuse

$$\sigma^{ij} = K\boldsymbol{I}_\varepsilon \hat{g}^{ij} + \beta\left(D^{ij} - 1/3 D^e_e \hat{g}^{ij} - \frac{S^{ij}_{(t)}}{\mu}\right) \tag{113}$$

avec $\frac{2\ G\ \Delta t\ \mu}{(\mu+2\ G\ \Delta t)} = \beta$

Les variations de $\boldsymbol{I}_\varepsilon$ et $\hat{g}^{ij}$ sont données par les relations 74 que l'on rappelle ici :

$$\begin{aligned}\frac{\partial I_\varepsilon}{\partial \varepsilon_{kl}} &= \hat{g}^{kl} - 2\ \varepsilon^{kl} \\ \frac{\partial \hat{g}^{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}} &= -2\ \hat{g}^{ik}\ \hat{g}^{jl}\end{aligned}$$

Les variations de D^{ij} et D^e_e ont déjà été calculées, reste la variation du terme $S^{ij}_{(t)}$ qui dépend du type de transport effectué. Le chapitre 6.3 décrit le calcul de l'opérateur tangent en fonction du type de transport.

On obtient alors :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma^{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}} &= (K - \frac{\beta}{3\Delta t})\ \hat{g}^{ij}\ \hat{g}^{kl} - 2K\hat{g}^{ij}\varepsilon^{kl} + (K\boldsymbol{I}_\varepsilon + \frac{\beta}{\Delta t} - \frac{\beta}{3}\boldsymbol{I}_D)\ \hat{g}^{ik}\ \hat{g}^{jl} \\ &\quad + \frac{2\beta}{3}\hat{g}^{ij}D^{kl} - 2\beta\ (\hat{g}^{il}D^{jk} + D^{ik}\ \hat{g}^{jl}) - \frac{\beta}{\mu}\frac{\partial \sigma(t)^{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}}\end{aligned} \tag{114}$$

En notation tensorielle cela donne pour l'opérateur tangent relatif aux variations des coordonnées deux fois contravariantes de la contrainte, par rapport aux coordonnées deux fois covariantes de la déformation, et en ne conservant pour l'opérateur que les termes qui respectent les symétries, les autres termes disparaissant lors de l'application de la méthode de Newton avec le PPV :

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\epsilon}}\right)_{\cdot\cdot|\cdot\cdot} &= (K - \frac{\beta}{3\Delta t})\boldsymbol{I}\otimes\boldsymbol{I} - 2K\boldsymbol{I}\otimes\boldsymbol{\varepsilon} + (K\boldsymbol{I}_\varepsilon + \frac{\beta}{\Delta t} - \frac{\beta}{3}\boldsymbol{I}_D)\ \boldsymbol{I}\ \overset{*}{\bar{\otimes}}\ \boldsymbol{I} \\ &\quad + \frac{2\beta}{3}\boldsymbol{I}\otimes\boldsymbol{D} - 4\beta\ \boldsymbol{I}\ \overset{*}{\bar{\otimes}}\ \boldsymbol{D} - \frac{\beta}{\mu}\left(\frac{\partial \sigma(t)}{\partial \boldsymbol{\epsilon}}\right)_{\cdot\cdot|\cdot\cdot}\end{aligned} \tag{115}$$

On rappelle la notation cf. 578 :

$$\boldsymbol{T''} = \boldsymbol{A}\ \overset{*}{\bar{\otimes}}\ \boldsymbol{B} = 1/4.(A^{ik}.B^{jl} + A^{jk}.B^{il} + A^{il}.B^{jk} + A^{jl}.B^{ik})\hat{g}_i\otimes\hat{g}_j\otimes\hat{g}_k\otimes\hat{g}_l$$

Cas où la partie sphérique est visqueuse

$$\begin{aligned}\sigma^{ij} &= \frac{I_{(t+\Delta t)\boldsymbol{\sigma}}}{3}\hat{g}^{ij} + \beta\left(D^{ij} - 1/3 D^e_e \hat{g}^{ij} - \frac{S^{ij}_{(t)}}{\mu}\right) \\ &= \frac{\alpha}{3}\left(D^e_e + \frac{1}{3\ K\ \Delta t}\boldsymbol{I}_{(t)\sigma}\right)\hat{g}^{ij} + \beta\left(D^{ij} - 1/3 D^e_e \hat{g}^{ij} - \frac{S^{ij}_{(t)}}{\mu}\right)\end{aligned} \tag{116}$$

avec $\frac{3\ K\ \Delta t\ \mu_p}{(\mu_p+3\ K\ \Delta t)} = \alpha$ et $\frac{2\ G\ \Delta t\ \mu}{(\mu+2\ G\ \Delta t)} = \beta$

Tous les termes constitutifs de σ^{ij} ont une variation connue ce qui permet de calculer l'opérateur tangent final.

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma^{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}} &= \frac{(\alpha-\beta)}{3\Delta t}\ \hat{g}^{ij}\ \hat{g}^{kl} - \frac{2(\alpha+\beta)}{3}\hat{g}^{ij}D^{kl} \\ &+\left(\frac{\alpha \boldsymbol{I}_D}{3} + \frac{\beta}{\Delta t} - \frac{\beta}{3}\boldsymbol{I}_D\right)\ \hat{g}^{ik}\ \hat{g}^{jl} \\ &-2\beta\ (\hat{g}^{il}D^{jk} + D^{ik}\ \hat{g}^{jl}) - \frac{\beta}{\mu}\frac{\partial \sigma(t)^{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}} \\ &+\frac{\alpha}{9K\Delta t}\left(\ \hat{g}^{ij}\frac{\partial \boldsymbol{I}_{\sigma(t)}}{\partial \varepsilon_{kl}} - 2\ \boldsymbol{I}_{\sigma(t)}\ \hat{g}^{ik}\ \hat{g}^{jl}\right)\end{aligned} \tag{117}$$

En notation tensorielle cela donne pour l'opérateur tangent relatif aux variations des coordonnées deux fois contravariantes de la contrainte, par rapport aux coordonnées deux fois covariantes de la déformation, et en ne conservant pour l'opérateur que les termes qui respectent les symétries :

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\epsilon}}\right)_{\cdot\cdot|\cdot\cdot} &= \frac{(\alpha-\beta)}{3\Delta t}\boldsymbol{I}\otimes\boldsymbol{I} - \frac{2(\alpha+\beta)}{3}\boldsymbol{I}\otimes\boldsymbol{D} \\ &+\left(\frac{\alpha \boldsymbol{I}_D}{3} + \frac{\beta}{\Delta t} - \frac{\beta}{3}\boldsymbol{I}_D\right)\ \boldsymbol{I}\ \overset{*}{\bar{\otimes}}\ \boldsymbol{I} - 4\beta\ \boldsymbol{I}\ \overset{*}{\bar{\otimes}}\ \boldsymbol{D} \\ &-\frac{\beta}{\mu}\left(\frac{\partial \sigma(t)}{\partial \boldsymbol{\epsilon}}\right)_{\cdot\cdot|\cdot\cdot} + \frac{\alpha}{9K\Delta t}\left(\frac{\partial\ (\boldsymbol{I}_{\sigma(t)}\ \boldsymbol{I})}{\partial \varepsilon}\right)_{\cdot\cdot}\end{aligned} \tag{118}$$

Dans cette dernière expression, contrairement à l'expression avec les composantes (117), on a regroupé la variation de la trace de $\sigma(t)$ transportée, car ses différentes expressions suivant le type de transport, sont calculées plus précisément dans le paragraphe suivant : 6.3.

6.3 Opérateur tangent pour les tenseurs transportés $\frac{\partial A^{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}}$

Lors de l'utilisation de lois incrémentales s'appuyant sur de calcul de dérivée objective, il est nécessaire de transporter d'un incrément à l'autre, les grandeurs supposées constantes relativement au type de dérivée retenue. Dans cette partie on considère 3 types de transport : transport deux fois covariant cohérent avec la dérivée de Rivlin ou dérivée de Lie deux fois covariantes , transport deux fois contravariants cohérent avec la dérivée d'Oldroyd ou dérivée de Lie deux fois contravariantes , transport mixte cohérent avec la dérivée de Jauman (ou co-rotationnelle) ou mixte de Lie. Pour ces trois transports, nous allons déterminer l'opérateur tangent correspondant à un tenseur $\boldsymbol{A}$ donné. On suppose que la mesure de déformation est celle d'Almansi.

6.3.1 Transport deux fois covariant

D'une manière pratique on suppose un tenseur $\boldsymbol{A}$ dont on connait les coordonnées A^{ij} à l'instant t et qui est transporté à $t+\Delta t$ de manière deux fois covariante. On a

donc ${}^{t+\Delta t}_{..t}A_{ij} = A_{ij}(t)$ d'où ${}^{t+\Delta t}_{..t}A^{ij} = \hat{g}^{ie}A_{ef}(t)\hat{g}^{fj}$, ce qui permet de calculer l'opérateur tangent :

$$\frac{\partial\ {}^{t+\Delta t}_{..t}A^{ij}}{\partial\varepsilon_{kl}} = \frac{\partial\hat{g}^{ie}}{\partial\varepsilon_{kl}}A_{ef}(t)\hat{g}^{fj} + \hat{g}^{ie}A_{ef}(t)\frac{\partial\hat{g}^{fj}}{\partial\varepsilon_{kl}} = \hat{g}^{ik}\hat{g}^{el}A_{ef}(t)\hat{g}^{fj} + \hat{g}^{ie}A_{ef}(t)\hat{g}^{fk}\hat{g}^{jl} \quad (119)$$

En notation tensorielle et en ne conservant pour l'opérateur que les termes qui respectent les symétries :

$$\left(\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}\right)_{..|..} = 2\ \boldsymbol{I} \overset{*}{\bar{\otimes}}\ {}_{..}(\boldsymbol{A}) \quad (120)$$

Concernant la trace on a :

$${}^{t+\Delta t}_{..t}A^{i}_{i} = A_{if}(t)\hat{g}^{fi} \quad (121)$$

d'où

$$\frac{\partial\ {}^{t+\Delta t}_{..t}A^{e}_{e}}{\partial\varepsilon_{kl}} = A_{ef}(t)\frac{\partial\hat{g}^{fe}}{\partial\varepsilon_{kl}} = A_{ef}(t)\hat{g}^{fk}\hat{g}^{el} \quad (122)$$

et

$$\frac{1}{3}\left(\frac{\partial\ {}^{t+\Delta t}_{..t}A^{e}_{e}\ \hat{g}^{ij}}{\partial\varepsilon_{kl}}\right) = \frac{1}{3}\left(A_{ef}(t)\hat{g}^{fk}\hat{g}^{el}\ \hat{g}^{ij} + \ {}^{t+\Delta t}_{..t}A^{e}_{e}\ \hat{g}^{ik}\ \hat{g}^{jl}\right) \quad (123)$$

En notation tensorielle et en ne conservant pour l'opérateur que les termes qui respectent les symétries :

$$\frac{1}{3}\left(\frac{\partial \boldsymbol{I}\ {}^{t+\Delta t}_{..t}A\ \ \boldsymbol{I}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}\right)_{..|..} = \frac{1}{3}\left(\boldsymbol{I} \otimes\ {}_{..}\boldsymbol{A} + \boldsymbol{I}\ {}^{t+\Delta t}_{..t}A\ \ \boldsymbol{I} \overset{*}{\bar{\otimes}} \boldsymbol{I}\right) \quad (124)$$

6.3.2 Transport deux fois contravariants

On suppose un tenseur $\boldsymbol{A}$ dont on connait les coordonnées A^{ij} à l'instant t et qui est transporté à $t+\Delta t$ de manière deux fois contravariants. On a donc ${}^{\cdot\cdot}A^{ij}(t+\Delta t) = A^{ij}(t)$ d'où un opérateur tangent nul :

$$\frac{\partial\ {}^{\cdot\cdot}A^{ij}}{\partial\varepsilon_{kl}} = 0. \quad (125)$$

Concernant la trace on a :

$${}^{..t+\Delta t}_{t}A^{i}_{i} = A^{if}(t)\hat{g}_{fi} \quad (126)$$

d'où en tenant compte qu'avec la déformation d'Almansi : $\hat{g}_{ij} = 2\varepsilon_{ij} + g_{ij}$

$$\frac{\partial\ {}^{..t+\Delta t}_{t}A^{e}_{e}}{\partial\varepsilon_{kl}} = A^{ef}(t)\frac{\partial\hat{g}_{fe}}{\partial\varepsilon_{kl}} = 2\ A^{ef}(t)\delta^{k}_{f}\delta^{l}_{e} = 2\ A^{kl}(t) \quad (127)$$

et

$$\frac{1}{3}\left(\frac{\partial\ {}^{..t+\Delta t}_{t}A^{e}_{e}\ \hat{g}^{ij}}{\partial\varepsilon_{kl}}\right) = \frac{1}{3}\left(A^{kl}(t)\ \hat{g}^{ij} + \ {}^{..t+\Delta t}_{t}A^{e}_{e}\ \hat{g}^{ik}\ \hat{g}^{jl}\right) \quad (128)$$

En notation tensorielle et en ne conservant pour l'opérateur que les termes qui respectent les symétries :

$$\frac{1}{3}\left(\frac{\partial \boldsymbol{I}\ {}^{..t+\Delta t}_{t}A\ \ \boldsymbol{I}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}\right)_{..|..} = \frac{1}{3}\left(\boldsymbol{I} \otimes\ {}^{\cdot\cdot}\boldsymbol{A} + \boldsymbol{I}\ {}^{..t+\Delta t}_{t}A\ \ \boldsymbol{I} \overset{*}{\bar{\otimes}} \boldsymbol{I}\right) \quad (129)$$

6.3.3 Transport mixte

On suppose un tenseur $\boldsymbol{A}$ dont on connait les coordonnées A^{ij} à l'instant t et qui est transporté à $t+\Delta t$ de manière mixte. On a donc ${}_{J}A^{ij}(t+\Delta t) = 1/2({}_{\cdot\cdot}A^{ij}(t+\Delta t)+ {}^{\cdot\cdot}A^{ij}(t))$ d'où l'opérateur tangent :

$$\frac{\partial\ {}_{J}A^{ij}(t+\Delta t)}{\partial \varepsilon_{kl}} = 1/2(\hat{g}^{ik}\hat{g}^{el}A_{ef}(t)\hat{g}^{fj} + \hat{g}^{ie}A_{ef}(t)\hat{g}^{fk}\hat{g}^{jl}) \tag{130}$$

En notation tensorielle et en ne conservant pour l'opérateur que les termes qui respectent les symétries :

$$\left(\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}\right)_{\cdot\cdot|_{\cdot\cdot}} = \boldsymbol{I} \overset{*}{\bar{\otimes}}\ {}_{\cdot\cdot}(\boldsymbol{A}) \tag{131}$$

Concernant la trace on a :

$${}^{t+\Delta t}_{J\ t}A^{i}_{i} = 1/2(A_{if}(t)\hat{g}^{fi} + A^{if}(t)\hat{g}_{fi}) \tag{132}$$

d'où en utilisant les résultats du transport deux fois covariant et deux fois contravariant, on a en notation tensorielle et en ne conservant pour l'opérateur que les termes qui respectent les symétries :

$$\frac{1}{3}\left(\frac{\partial \boldsymbol{I}\ {}^{t+\Delta t}_{J\ t}A\ \boldsymbol{I}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}\right)_{\cdot\cdot|_{\cdot\cdot}} = \frac{1}{6}\left(\boldsymbol{I} \otimes\ {}_{\cdot\cdot}\boldsymbol{A} + \boldsymbol{I}\ {}^{t+\Delta t}_{\cdot\cdot t}A\ \ \boldsymbol{I} \overset{*}{\bar{\otimes}} \boldsymbol{I} + \boldsymbol{I} \otimes\ {}_{\cdot\cdot}\boldsymbol{A} + \boldsymbol{I}\ {}^{t+\Delta t}_{\cdot\cdot t}A\ \ \boldsymbol{I} \overset{*}{\bar{\otimes}} \boldsymbol{I}\right) \tag{133}$$

6.3.4 Paramètres matériaux évolutifs

Il peut-être intéressant de faire varier les paramètres matériaux en fonction de l'évolution du calcul. Dans une première étape deux dépendances sont possibles, via une fonction d'évolution pouvant dépendre :

1. de l'intensité du déviateur de vitesse via la grandeur : $Q_{\bar{\boldsymbol{D}}} = \sqrt{\bar{\boldsymbol{D}} : \bar{\boldsymbol{D}}}$
2. de l'intensité du déviateur de déformation via la grandeur : $\varepsilon_{mises} = \sqrt{}(2./3.\ (\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} : \bar{\boldsymbol{\varepsilon}})$

Se pose alors la difficulté de calculer l'opérateur tangent $\frac{\partial \sigma^{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}}$ dans le cas où les paramètres matériaux évolues.

Supposons que

6.4 Cas des contraintes planes

Il est possible de définir dans certains cas, une expression explicite du calcul de la contrainte et de l'opérateur tangent, pour des conditions de contraintes plane.

6.4.1 Cas avec viscosité sphérique

Dans une première étape, on considère une viscosité sur la partie déviatorique et sur la partie sphérique : équations 102 et 103. En ajoutant la partie sphérique et la partie déviatorique de la contrainte, on obtient le tenseur complet. La condition de contrainte plane s'exprime traditionnellement sur la direction 3, qui pour nous sera orthonormée d'où la variance n'a pas d'importance pour la direction 3.

$$0 = \alpha/3.\left(\boldsymbol{I}_D + \frac{1}{3\ K\ \Delta t}\boldsymbol{I}_{(t)\sigma}\right) + \beta\left(\bar{D}_3^3 + \frac{1}{(2\ G\ \Delta t)}S_{3(t)}^3\right) \tag{134}$$

avec $\frac{3\ K\ \Delta t\ \mu_p}{(\mu_p+3\ K\ \Delta t)} = \alpha$ et $\frac{2\ G\ \Delta t\ \mu}{(\mu+2\ G\ \Delta t)} = \beta$
Sachant que :

$$\boldsymbol{I}_D = D_\gamma^\gamma + D_3^3 \quad \text{et} \quad \bar{D}_3^3 = 2/3D_3^3 - 1/3(D_\gamma^\gamma) \tag{135}$$

l'expression 134 permet de calculer D_3^3

$$\begin{aligned} -\frac{\alpha+2\beta}{3}D_3^3 &= \alpha/3.\left(D_\gamma^\gamma + \frac{1}{3\ K\ \Delta t}\boldsymbol{I}_{(t)\sigma}\right) + \beta\left(-1/3(D_\gamma^\gamma) + \frac{1}{(2\ G\ \Delta t)}S_{3(t)}^3\right) \\ \text{ou encore} \\ D_3^3 &= \frac{1}{\alpha+2\beta}\left((\beta-\alpha)D_\gamma^\gamma - \frac{3\beta}{(2\ G\ \Delta t)}S_{3(t)}^3 - \frac{\alpha}{3\ K\ \Delta t}\boldsymbol{I}_{(t)\sigma}\right) \end{aligned} \tag{136}$$

À partir de cette grandeur on peut déterminer successivement $\boldsymbol{I}_D$ puis $\boldsymbol{D}$ et enfin le tenseur des contraintes à l'aide des relations générales 3D.

La déformation suivant la direction 3 peut s'approcher à l'aide d'une hypothèse de linéarisation :

$$D_{33} \approx \frac{\Delta\epsilon_{33}}{\Delta t} \tag{137}$$

L'opérateur tangent se calcule en tenant compte de :

$$\frac{\partial D_3^3}{\partial ddl} = \frac{1}{\alpha+2\beta}\left((\beta-\alpha)\frac{\partial D_\gamma^\gamma}{\partial ddl} - \frac{3\beta}{(2\ G\ \Delta t)}\frac{\partial S_{3(t)}^3}{\partial ddl} - \frac{\alpha}{3\ K\ \Delta t}\frac{\partial \boldsymbol{I}_{(t)\sigma}}{\partial ddl}\right) \tag{138}$$

Sachant que les termes $\frac{\partial S_{3(t)}^3}{\partial ddl}$ et $\frac{\partial \boldsymbol{I}_{(t)\sigma}}{\partial ddl}$ ne sont dus qu'au mécanisme de transport.

Dans le cas où les paramètres de viscosité sont eux-mêmes dépendant de la déformation sous forme d'une relation par exemple non linéaire il est difficile de tenir compte dans cette relation de la sensibilité à D_3^3. D'où par simplification on ne tient compte que de la dépendance aux termes D_γ^γ ce qui conduira sans doute à une vitesse de convergence dans le cas d'un algorithme de Newton, plus lent que dans un cas 3D.

6.4.2 Cas sans viscosité sphérique

Par rapport à l'étude précédente, la relation 102 est remplacée par 94 que l'on approche par linéarisation :

$$\frac{E}{(1-2\nu)}\boldsymbol{D} = \dot{\boldsymbol{I}}_\sigma \approx \frac{I_{(t+\Delta t)\boldsymbol{\sigma}} - I_{(t)\boldsymbol{\sigma}}}{\Delta t} \tag{139}$$

ou encore

$$I_{(t+\Delta t)\boldsymbol{\sigma}} \approx I_{(t)\boldsymbol{\sigma}} + 3K\Delta t(D^{\gamma}_{\gamma} + D^{3}_{3}) \tag{140}$$

L'assemblage de la partie sphérique à la partie déviatorique permet d'obtenir la forme complète du tenseur des contraintes d'où l'hypothèse de contrainte plane :

$$0 = 1/3I_{(t)\boldsymbol{\sigma}} + K\Delta t(D^{\gamma}_{\gamma} + D^{3}_{3}) + \beta\left(2/3D^{3}_{3} - 1/3(D^{\gamma}_{\gamma}) + \frac{1}{(2\ G\ \Delta t)}S^{3}_{3(t)}\right) \tag{141}$$

et en terme de déformation suivant 3 :

$$D^{3}_{3} = \frac{1}{3K\Delta t + 2\beta}\left((\beta - 3K\Delta t)D^{\gamma}_{\gamma} - I_{(t)\boldsymbol{\sigma}} - \frac{3\beta}{(2\ G\ \Delta t)}S^{3}_{3(t)}\right) \tag{142}$$

Cette expression est analogue à 136 et conduit donc aux calculs de $\boldsymbol{I}_D$ puis $\boldsymbol{D}$ et enfin le tenseur des contraintes. Elle permet également de calculer l'opérateur tangent.

En fait cette expression n'est pas cohérente avec la manière dont est calculée la contrainte dans la pratique à savoir la relation 94 que l'on va réécrire de la manière suivante :

$$\boldsymbol{I}_{\sigma} = \frac{E}{(1-2\nu)}(\varepsilon(t+\Delta t)^{\gamma}_{\gamma} + \varepsilon(t)^{3}_{3} + D^{3}_{3}) \tag{143}$$

De plus, quellesque soient les opérations de transport (de Lie) le tenseur transporté conserve les conditions de contraintes planes. On doit donc avoir $\sigma^{3}_{3(t)} = 0$ d'où $S^{3}_{3(t)} = -I_{(t)\boldsymbol{\sigma}}/3 = -S^{\gamma}_{\gamma(t)}/3$. d'où la forme finale :

$$\begin{aligned} D^{3}_{3} &= \frac{1}{3K\Delta t + 2\beta}\left(\beta D^{\gamma}_{\gamma} - 3K(\varepsilon(t+\Delta t)^{\gamma}_{\gamma} + \varepsilon(t)^{3}_{3}) - \frac{3\beta}{(2\ G\ \Delta t)}S^{\gamma}_{\gamma}(t)\right) \\ &= \frac{1}{3K\Delta t + 2\beta}\left(\beta D^{\gamma}_{\gamma} - 3K(\varepsilon(t+\Delta t)^{\gamma}_{\gamma} + \varepsilon(t)^{3}_{3}) + \frac{\beta}{(2\ G\ \Delta t)}I_{(t)\boldsymbol{\sigma}}\right) \end{aligned} \tag{144}$$

7 Comportement d'hystérésis déviatorique

7.1 Introduction

Le modèle proposé s'appuie sur de nombreux travaux de recherche. Nous proposons, dans ce chapitre, d'en retracer brièvement l'historique. Ce modèle a été initialement implanté dans le logiciel Herezh dans une version écrite en Fortran 77 (f77) (1992-1997) puis dans une version en C++ (2002-...). Les modèles et les algorithmes utilisés reposent principalement sur les travaux de Denis Favier [Favier, 1988a] et de Pierre Pégon [**?**]. Cependant dans le cas du code Herezh++, des développements originaux ont également introduit à travers différentes collaborations avec Guilhem Bless (en particulier concernant une nouvelle technique de détection et de gestion des points d'inversion), Hervé Laurent (loi Hyper-visco-hystérésis), Denis Favier (sur tous les aspects de l'hystérésis), que je tiens à remercier.

7.2 Historique succinct du modèle d'élasto-visco-hystérésis

Le modèle d'élasto-hystérésis a été présenté initialement par Pierre Guélin en 1980 [Guélin, 1980]. Durant une dizaine d'années, il a été approfondi et validé expérimentalement. L'objectif initial était la modélisation des Alliages à Mémoire de Forme (AMF). Un certain nombre d'applications ont ensuite concerné des matériaux divers (inox, matériaux granulaires, élastomères,...). Ces travaux se sont concrétisés par deux documents importants : les thèses d'état de Denis Favier[Favier, 1988a] et de Pierre Pégon [**?**].

La modélisation de phénomènes cycliques est l'objectif principal de ce type de loi. Ce modèle ayant, en effet, peu d'intérêt dans le cas d'un chargement monotone.

L'originalité de ce modèle provient de la prise en compte de la partie d'hystérésis sous forme d'une mémorisation discrète. L'idée principale repose sur des états discrets des variables thermodynamiques globales telles que la puissance ou les énergies mises en jeux. Notons également que l'on cherche avant tout, une modélisation phénoménologique même si le comportement décrit peut s'expliquer et s'analyser au niveau microscopique.

Par rapport aux modèles classiques de plasticité (car l'hystérésis s'apparente à de la plasticité), la modélisation s'appuie sur un concept de décomposition des efforts intérieurs plutôt que sur celui beaucoup plus classique de décomposition des déformations (déformation élastique, déformation plastique visqueuse ...)

The superposition of stresses states that the Cauchy stress tensor $\boldsymbol{\sigma}$ is expressed from the contibutions of :

- an hyperelastic or reversible stress contribution of Mooney-Rivlin, named $\boldsymbol{\sigma}_e$, time and loading path independent,
- a viscoelastic stress contribution, named $\boldsymbol{\sigma}_v$, which can be divided in several particular elementary contributions. This contribution is time dependent,
- a pure hysteresis stress contribution, named $\boldsymbol{\sigma}_h$, only deviatoric. This contribution is time independent but follows incremental parameter. The hysteretic stress contribution depends on the loading path and takes into account an irreversible part for any loading.

The Cauchy stress tensor is then expressed by the relation :

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_e + \boldsymbol{\sigma}_v + \boldsymbol{\sigma}_h \tag{145}$$

The superposition of hyperelasticity, viscosity and hysteresis stress contributions allows reversible, non-reversible and viscous phenomena to be described together. The above relation 145 defines an elasto-visco-hysteresis tensorial scheme, analogous to the elasto-hysteresis one, each contribution being presented in the following part.

7.3 Hysteresis contribution

The hysteresis model, adapted to cyclic loading condition, is composed of an incremental behavior law (constitutive law) and an inversion and crossing point management algorithm during the cyclic evolution path.

For not heavy the notation, the subscript h is not used in this section but all stress depends on this hysteretic contributions in the following.

7.3.1 Cercles neutres

Le terme "cercles neutres" désigne un ensemble d'hypersurfaces dans l'espace des contraintes. Dans le cas particulier des cinématiques irrotationnelles, ces surfaces sont décrites exhaustivement dans le plan déviatoire par des cercles de rayons allant de zéro jusqu'à l'infini et emboitées, comme des poupées russes, les uns à l'intérieur des autres. Ces surfaces sont de même nature mécanique que les surfaces de charge des modèles élastolastiques plus classiques. Ces cercles sont qualifiés de "neutres" parce que la dissipation intrinsèque du modèle est nulle lorsque la contrainte suit un chemin de chargement compris dans l'une de ces surfaces ou sur un de ces cercles. Bien que ces cercles neutres n'interviennent pas explicitement dans l'écriture du modèle d'hystérésis pure, ils sont à la base de sa construction ([Pegon, 1988]). C'est pourquoi nous les présentons ici au lecteur, afin de mieux comprendre les objets, qui vont suivre lors de la présentation de l'algorithme de gestion de la mémoire discrète. Le caractère de cet ensemble de cercles neutres utile au modèle d'hystérésis pure est la position de ces cercles les uns relativement aux autres. Cette position évolue au cours du chargement mécanique comme nous allons l'expliquer à présent. La position initiale, c'est-à-dire pour un matériau vierge de tout chargement mécanique, est représentée à la figure 3, où les cercles sont tous concentriques autour du point de contrainte nulle. La position des cercles est ensuite fonction du chemin suivi par la contrainte depuis l'état vierge du matériau. Tant que la contrainte se déplace vers des cercles toujours plus grands, la position reste inchangée ; c'est le cas des chemins 1 et 2 de la figure 3. Par contre, lorsque la contrainte se dirige vers des cercles plus petits, alors la position change brutalement ou instantanément de sorte que :

- les cercles plus grands ne changent pas de position,
- les cercles plus petits se déplacent pour venir au contact du point courant représentant la contrainte, tout en respectant l'emboîtement des cercles les uns dans les autres.

Ce mouvement est illustré à la figure 4 par les chemins 3 et 4, succédant au chemin 2. Le même raisonnement est appliqué pour les chemins 5 et 6 de la figure 5, succédant au chemin 4. L'évènement décrit par ces mouvements instantanés des cercles neutres, ci-dessus

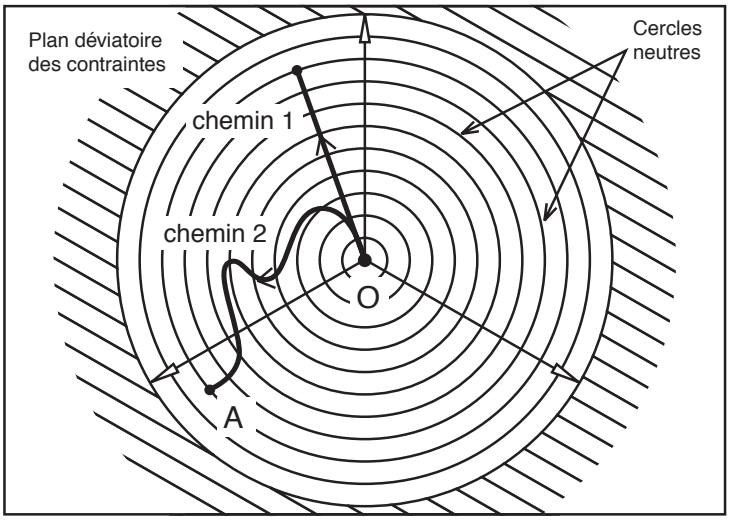

FIGURE 3 – Position des cercles neutres pour un matériau vierge de tout chargement mécanique.

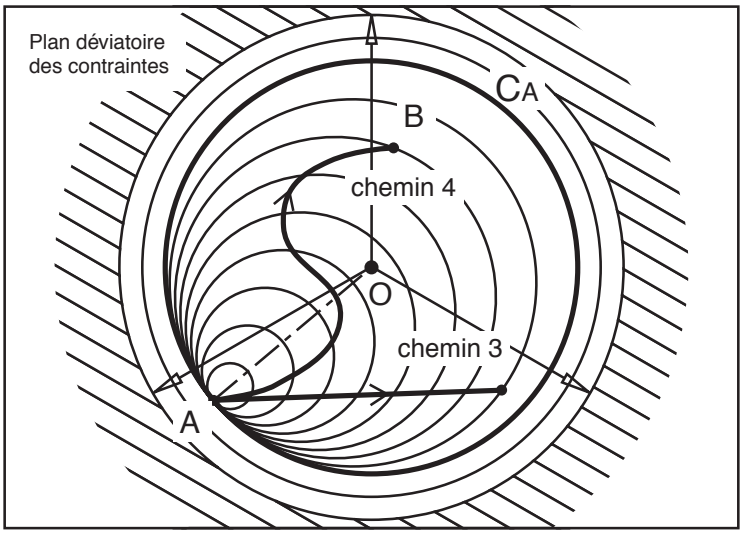

FIGURE 4 – Position des cercles neutres après une *inversion du chargement au point A.*

présentés, est appelé *inversion*, puisqu'il généralise la notion simple d'inversion du chargement mécanique dans le cas unidimensionnel, de la traction par exemple. L'algorithme de gestion de la mémoire discrète vise à mémoriser, entre autres, la contrainte à ces instants d'inversion. Elle sera alors notée par la suite

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{R_i} \tag{146}$$

où R rappelle un caractère de *référence* de cette contrainte qui sera utilisée par l'équation constitutive du modèle et où i est le numéro d'ordre de l'inversion associée, indiquant

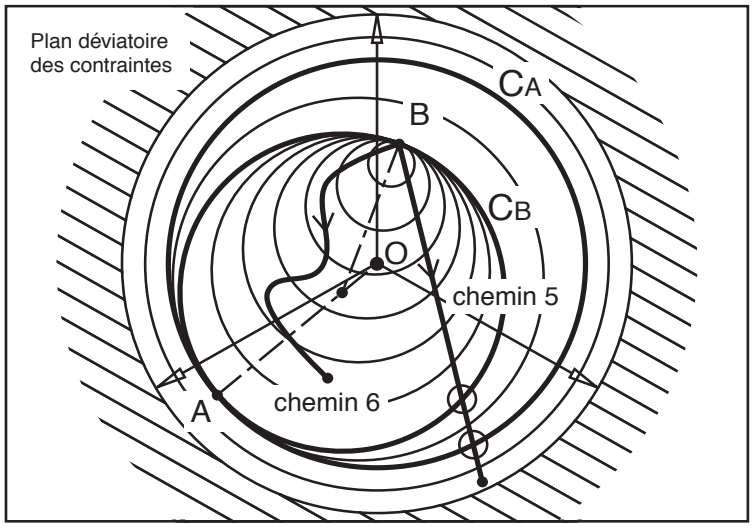

FIGURE 5 – Position des cercles neutres après deux *inversions du chargement aux points A et B*.

par là le nombre d'autres inversions précédemment mémorisées par l'algorithme. L'entier i sera 1 pour le point d'inversion A et 2 pour le point d'inversion B de la figure 5. Une autre contrainte associée à une inversion est utile à l'algorithme de mémorisation. Elle est notée

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{O_i} \ . \tag{147}$$

Elle est la contrainte déviatoire au centre du cercle neutre à l'instant de la $i^{\text{ème}}$ inversion ; le cercle C_A pour la première inversion et le cercle C_B pour la seconde inversion de la figure 5. Nous noterons sans numéro d'ordre i

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}}_R \quad \text{et} \quad \bar{\boldsymbol{\sigma}}_O \tag{148}$$

les contraintes relatives à la *dernière inversion* ayant eu lieu. Enfin, nous noterons

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}}_t \quad (\text{ ou } \bar{\boldsymbol{\sigma}}) \quad , \quad \bar{\boldsymbol{\sigma}}_{O_t} \quad \text{et} \quad R_t \tag{149}$$

respectivement, la contrainte déviatoire actuelle, la contrainte déviatoire au centre du cercle actuellement traversé par $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_t$ et le rayon de ce dernier. Après les *inversions*, un second type d'évènement, appelé *coïncidence*, est privilégié par le mouvement des cercles neutres. Ces évènements ont lieu lorsque la contrainte traverse un cercle associé à une inversion précédente. Deux coïncidences arrivent lors du chemin 5 à la traversée des cercles C_B puis C_A sur la figure 5. La position des cercles neutres change alors instantanément, de sorte que :

- les cercles plus grands ne changent pas de position,
- les cercles plus petits retrouvent leur position précédant l'instant d'inversion associée au cercle traversé.

Tout se passe comme si les traces de l'inversion associée au cercle traversé sont effacées. Par exemple, sur la figure 5, lorsque la contrainte sur le chemin 5 traverse le cercle C_B,

les cercles de rayon inférieur à C_B retrouvent leur position telles que sur la figure 4. Et de même, à la traversée du cercle C_A, les cercles plus petits retrouvent leur position de la figure 3. Le terme *première charge* désigne un chargement mécanique au cours duquel les cercles neutres sont tous concentriques autour de l'origine comme présentée à la figure 3. Un tel type de chargement est rencontré lorsque l'on commence à solliciter un matériau vierge, mais également à la suite de suffisamment de coïncidences pour effacer toute trace d'inversions précédentes. Ainsi, sur la figure 5, lors du chemin 5 et au-delà de la traversée du cercle C_A, le matériau retrouve un chargement de *première charge*. Le terme *trajet radial* désigne une portion de chemin de chargement tel que, dans le plan déviatoire de la contrainte :

— elle soit selon une ligne droite,
— cette ligne droite parte du dernier point d'inversion, autrement dit le point représentant la contrainte $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_R$,
— et dans le cas particulier de la première charge, les trajets radiaux partent de l'origine du plan représentant la contrainte nulle.

Le terme dual de *radial* est *neutre*. Un trajet neutre est une portion de chemin de chargement telle que, dans le plan déviatoire de la contrainte, elle se situe sur ou le long d'un cercle neutre.

7.3.2 Incremental behavior law

From the outset, rheological models containing elastic and slip elements have been considered to be derived from a general pure hysteresis model ([Guélin, 1980]). The material is assumed to be isotropic and the hysteresis contribution is only deviatoric. The constitutive relation is obtained by time integration of relation :

$$\dot{\bar{\boldsymbol{\sigma}}} = 2\mu\bar{\boldsymbol{D}} + \beta\Phi\Delta^t_R\bar{\boldsymbol{\sigma}} \tag{150}$$

avec :

$$\begin{aligned} \Phi &= \Delta^t_R\bar{\boldsymbol{\sigma}} : \bar{\boldsymbol{D}} - \frac{{Q_{\Delta\sigma}}^2}{2.\mu}\frac{\dot{\omega}'}{\omega'} \\ \beta &= -\frac{2\mu}{(w'Q_0)^{np}(Q_{\Delta\sigma})^{2-np}} \\ Q_{\Delta\sigma} &= \sqrt{\Delta^t_R\bar{\boldsymbol{\sigma}} : \Delta^t_R\bar{\boldsymbol{\sigma}}} \end{aligned} \tag{151}$$

sachant que $\Delta^t_R\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_R$ et $w' = w\ cos(\alpha)$

Les notations suivantes sont utilisées :

— R est un indice qui représente un instant de référence, appelé instant d'inversion du chargement,
— t est le pseudo-temps courant (le temps est ici un paramètre d'avancement, son amplitude peut-être choisit de manière arbitraire, dans notre cas on le prendra variant de 0 à 1 sur un pas de temps).

La grandeur Φ représente la dissipation intrinsèque égale à la dissipation d'origine thermique plus la dissipation d'origine entropique. La grandeur $Q_{\Delta\sigma}$ représente la norme de l'accroissement de contrainte depuis l'instant d'inversion R.

Dans cette équation constitutive, les paramètres matériaux sont ainsi :

— μ représentant le module à l'origine du comportement en cisaillement,

— np est le coefficient de Prager, qui gère le passage à la saturation,

— Q_0 est le seuil de saturation en cisaillement.

L'*angle de phase* α est un angle dans le plan déviatoire de la contrainte. À condition d'interpréter $\Delta^t_R\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ comme un vecteur dans ce plan affine allant du point représentant la contrainte $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_R$ à la contrainte actuelle $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$, et aussi $\Delta^O_R\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \bar{\boldsymbol{\sigma}}_O - \bar{\boldsymbol{\sigma}}_R$ comme un vecteur allant de $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_R$ à $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_O$, alors α est l'angle formé par ces deux vecteurs associés à $\Delta^O_R\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ et $\Delta^t_R\bar{\boldsymbol{\sigma}}$.

Le paramètre de Masing w vaut 1 sur le trajet de première charge et 2 sur les autres trajets. Dans le cas de trajet de chargement radiaux, la variation d'angle de phase est nulle ce qui simplifie l'équation constitutive.

Dans le cas où l'angle de phase α vaut $\Pi/2$, le trajet est neutre, et purement réversible :

$$\dot{\bar{\boldsymbol{\sigma}}} = 2\mu\bar{\boldsymbol{D}}\bar{\boldsymbol{\sigma}} \tag{152}$$

En retenant comme produit scalaire le produit doublement contracté et la norme associée : $||\boldsymbol{A}|| = \sqrt{\boldsymbol{A} : \boldsymbol{A}}$, le cosinus de l'angle de phase peut être simplement représenté par la projection, dans l'espace des tenseurs, de $\Delta^t_R\boldsymbol{\sigma}$ sur $\Delta^O_R\bar{\boldsymbol{\sigma}}$, soit :

$$cos(\alpha) = \frac{\Delta^t_R\boldsymbol{\sigma} : \Delta^O_R\bar{\boldsymbol{\sigma}}}{||\Delta^t_R\boldsymbol{\sigma}||\ ||\Delta^O_R\bar{\boldsymbol{\sigma}}||} \tag{153}$$

Remarque Dans le modèle initial ([Favier, 1988a],[Pegon, 1988]) l'angle de phase φ, dans le plan déviatoire, entre la projection d'une direction principale et la direction du déviateur d'un tenseur $\boldsymbol{B}$ était calculé à partir d' invariants à l'aide de la formule classique suivante :

$$cos(3\varphi) = \sqrt{6}\ \frac{\mathrm{tr}\left(\bar{\boldsymbol{B}}.\bar{\boldsymbol{B}}.\bar{\boldsymbol{B}}\right)}{\left(\mathrm{tr}\left(\bar{\boldsymbol{B}}.\bar{\boldsymbol{B}}\right)\right)^{3/2}} \tag{154}$$

Chaque angle de phase ainsi déterminé n'est connu qu'à $\pi/3$ près ce qui complexifie la détermination de l'angle α entre les deux tenseurs $\Delta^t_R\boldsymbol{\sigma}$ et $\Delta^O_R\bar{\boldsymbol{\sigma}}$, d'où l'utilisation dans ce travail de la formule (153) qui ne présente pas ce type de difficulté.

7.3.3 Choix de la dérivée objective

L'équation constitutive (150) est une équation différentielle en temps. De manière à obtenir des grandeurs intégrées objectives, il nous faut retenir un choix de dérivée temporelle objective. Nous retenons pour notre calcul, dans un premier temps, une dérivée corotationnelle de Jaumann.

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{1}{2}(\mathcal{L}_{v_{..}}\boldsymbol{\sigma} + \mathcal{L}_{v}{}^{\cdot\cdot}\boldsymbol{\sigma}) \tag{155}$$

Discussion : Ce choix n'est pas anodin pour les grandes transformations. Dans le cas où l'on utilise une mesure de déformation logarithmique, la dérivée matérielle de la déformation est très proche de la vitesse de déformation $\boldsymbol{D}$ ce qui n'est pas le cas pour les autres mesures. Le fait d'utiliser par exemple la mesure de déformation de Green-Lagrange ou d'Almansi ne pose pas pour autant de problème conceptuel puisque l'équation constitutive proposée ne dépend pas explicitement de la déformation.

Cependant, dans le cas d'une cinématique complexe (en particulier rotationnelle), notons qu'il n'existe qu'un seul repère rigide par rapport auquel l'intégration de la vitesse de déformation donne une mesure de déformation, il s'agit de la mesure de déformation logarithmique. La dérivée associée n'est pas alors la dérivée de Jaumann. Néanmoins, dans le cas de faible rotation, la dérivée de Jaumann en constitue une bonne approximation.

Par contre, dans le cas d'une intégration dans un repère matériel convecté, les dérivées de Lie deux fois covariantes ou deux fois contravariantes permettent d'obtenir aisément de vraies mesures de déformation, ce qui est le cas pour la mesure d'Almansi. On voit donc que d'un point de vue cinématique, les intégrations ou dérivations dans les repères convectés sont particulièrement intéressantes. La difficulté avec l'utilisation de ces mesures de déformation réside alors dans la signification de leurs invariants. En effet, seule la mesure logarithmique permet d'isoler et comptabiliser facilement la déformation volumique par rapport à la déformation de forme. Dans tous les autres cas, l'expression représentant la variation relative de volume en fonction des invariants classiques n'est pas simple ce qui pose des problèmes particulièrement ardus en plasticité classique où le respect d'une déformation volumique plastique nulle est demandé.

Dans le cadre du comportement hystérétique proposé, le comportement irréversible est intimement lié à un comportement réversible. Ainsi, il n'y a pas de décomposition possible (ce qui est voulu d'ailleurs) entre partie plastique isovolume et partie réversible pilotant le changement de volume. Le problème de l'utilisation d'invariants "pratiques" pour la déformation, ne se pose plus. Ainsi le choix d'une mesure d'Almansi qui est de manière exacte l'intégration deux fois covariantes de $\boldsymbol{D}$ ou d'une autre mesure peut dépendre d'autres critères.

Concernant le choix de la dérivée matérielle de la contrainte, il est clair qu'au-delà de considération d'objectivité, qui impose d'avoir une dérivée qui respecte ce principe, il est nécessaire de prendre de plus en compte des considérations physiques pour choisir un type de dérivée. Dans notre cas, de précédentes investigations montrent que la dérivée de Jaumann, conduit à des résultats en général satisfaisants. Mais seule une confrontation finale avec l'expérience et prenant donc en compte la physique du matériau, permettra de valider plus en avant ce choix.

Reste le problème de la cohérence entre le type de dérivée utilisée pour la contrainte et le type de déformation associée à $\boldsymbol{D}$. Si l'on considère, que le choix du type de dérivée matérielle doit également s'appuyer sur la physique du matériau, il est vraisemblable qu'il n'y a pas à chercher de cohérence entre d'une part, les dérivées qui s'appliquent à la contrainte hystérétique, et d'autre part, les dérivées qui s'appliquent à la déformation, qui elles doivent s'appuyer sur des concepts purement géométriques De la même manière, il n'est pas obligatoire de chercher à utiliser la même mesure de déformation pour chaque contribution : visqueuse, hyperélastique, et hystérétique, à condition que toutes les mesures employées soient calculées à partir de la même géométrie initiale et finale. On utilise

ainsi, le fait qu'intrinsèquement, toutes les mesures sont équivalentes.

7.3.4 Algorithme de gestion de la mémoire discrète

L'algorithme présenté est différent de l'algorithme original présenté par exemple par Pierre Pégon ([Pegon, 1988]) et implanté dans la version Fortran77 d'Herezh ([Rio et al., 1995]). L'algorithme s'appuie sur les travaux développés par Guilhem Blès. En particulier, l'idée d'utiliser des hyper-sphères avec différentes bornes a été originalement proposée par Guilhem Blès. L'idée est donc de travailler directement dans l'espace des tenseurs d'ordre 2.

D'une manière analogue au chapitre (7.3.2), on introduit un produit scalaire à l'aide du produit doublement contracté " :" d'où la norme ||.|| et la distance "d" associée.

Au cours d'une transformation, on introduit le tenseur $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{O_i}$, représentant le centre du cercle neutre associé à la $i^{\text{ème}}$ inversion (cf. section 7.3.1) . Ce tenseur satisfait l'équation suivante dans le cas où plusieurs points d'inversions sont enregistrés :

$$\begin{aligned} &\text{Si } i \geqslant 2 \\ &\quad d(\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{O_i}, \bar{\boldsymbol{\sigma}}_{R_{i-1}}) = d(\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{O_i}, \bar{\boldsymbol{\sigma}}_{R_i}) \qquad (156) \\ \text{et} \quad &\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{O_i} = \gamma\ (\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{R_{i-1}} - \bar{\boldsymbol{\sigma}}_{O_{i-1}})\ +\ \bar{\boldsymbol{\sigma}}_{O_{i-1}} \qquad (157) \end{aligned}$$

Pour le premier point, on pose : $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{O_1} = \mathbf{0}$ le tenseur nul.

En fait cette relation, dans le cas d'un espace à 2 dimensions, revient à chercher le centre du cercle passant par les deux points d'inversion successifs et situé sur la droite passant par le précédent centre et point d'inversion. Dans notre cas, nous serons en dimension 9, du fait de l'utilisation des coordonnées mixtes, ce qui conduira à des calculs un peu plus complexes, mais l'idée reste similaire.

La résolution de l'équation (157) conduit à la solution :

$$\gamma = \frac{1}{2}\left(\frac{||(\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{R_i} - \bar{\boldsymbol{\sigma}}_{O_{i-1}})||^2 - ||(\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{R_{i-1}} - \bar{\boldsymbol{\sigma}}_{O_{i-1}})||^2}{(\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{R_{i-1}} - \bar{\boldsymbol{\sigma}}_{O_{i-1}}) : (\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{R_i} - \bar{\boldsymbol{\sigma}}_{R_{i-1}})}\right) \qquad (158)$$

Cette équation doit toujours avoir une solution γ comprise entre 0 et 1 car :

— le produit $(\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{R_{i-1}} - \bar{\boldsymbol{\sigma}}_{O_{i-1}}) : (\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{R_{i-1}} - \bar{\boldsymbol{\sigma}}_{R_i})$ est positif, car on se situe après un point d'inversion,

— de par l'algorithme de gestion des points d'inversions et de coïncidence, on a :

$$\begin{aligned} ||(\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{R_i} - \bar{\boldsymbol{\sigma}}_{O_{i-1}})||^2 - &\quad ||(\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{R_{i-1}} - \bar{\boldsymbol{\sigma}}_{O_{i-1}})||^2 \\ = &\quad (\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{R_i} - \bar{\boldsymbol{\sigma}}_{R_{i-1}}) : ((\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{R_i} - \bar{\boldsymbol{\sigma}}_{O_{i-1}}) + (\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{R_{i-1}} - \bar{\boldsymbol{\sigma}}_{O_{i-1}})) \\ \leqslant &\quad 2.(\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{R_i} - \bar{\boldsymbol{\sigma}}_{R_{i-1}}) : (\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{R_{i-1}} - \bar{\boldsymbol{\sigma}}_{O_{i-1}}) \qquad (159) \end{aligned}$$

Ainsi le tenseur $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{O_i}$ est fonction de $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{R_i}$, $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{R_{i-1}}$ et $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{O_{i-1}}$;

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{O_i} \ = \ \boldsymbol{\mathcal{F}}_O(\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{R_i}, \bar{\boldsymbol{\sigma}}_{R_{i-1}}, \bar{\boldsymbol{\sigma}}_{O_{i-1}})\ , \qquad (160)$$

où la fonction $\boldsymbol{\mathcal{F}}_O$ peut être déduite des relations 157 et 158.

L'algorithme utilise également le terme R_t défini à la section 7.3.1 et qui se calcule ainsi :

$$R_t = ||(\bar{\boldsymbol{\sigma}}_t - \bar{\boldsymbol{\sigma}}_{O_t})|| \quad \text{où} \quad \bar{\boldsymbol{\sigma}}_{O_t} = \boldsymbol{\mathcal{F}}_O(\bar{\boldsymbol{\sigma}}_t, \bar{\boldsymbol{\sigma}}_R, \bar{\boldsymbol{\sigma}}_O) \ . \tag{161}$$

Comme pour l'algorithme précédent ([Pegon, 1988]), la mémoire discrète du modèle d'hystérésis pure fonctionne comme une pile informatique. Représentons cette mémoire pour un cas où sept inversions seraient mémorisées ;

indice d'inversion i	0	1	2	3	4	5	6	$i_{\max} = 7$
$\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{R_i}$	$\nexists$	$\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{R_1}$	$\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{R_2}$	$\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{R_3}$	$\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{R_4}$	$\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{R_5}$	$\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{R_6}$	$\bar{\boldsymbol{\sigma}}_R = \bar{\boldsymbol{\sigma}}_{R_7}$
$\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{O_i}$	$\nexists$	$\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{O_1} = \mathbf{0}$	$\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{O_2}$	$\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{O_3}$	$\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{O_4}$	$\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{O_5}$	$\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{O_6}$	$\bar{\boldsymbol{\sigma}}_O = \bar{\boldsymbol{\sigma}}_{O_7}$
R_i	$\nexists$	R_1	R_2	R_3	R_4	R_5	R_6	$R_{i_{\max}} = R_7$

(162)

A chaque nouvelle mémorisation, la pile s'agrandit en ajoutant une colonne par le côté droit. L'indice $i_{\max}$, nombre d'inversions en mémoire, s'incrémente alors de un. Lorsqu'une inversion mémorisée doit être effacée à l'occasion d'une coïncidence (cf. section 7.3.1) la dernière colonne à droite disparaît et l'indice $i_{\max}$ diminue de la valeur un. L'équation constitutive du modèle (éq. 150) fait intervenir l'information de la fin de la pile, c'est-à-dire la dernière colonne $i_{\max}$. Notons que les termes $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{O_i}$ et R_i peuvent ne pas être mémorisés puisqu'ils se déduisent des termes $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{R_i}$ par les relations suivantes :

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{O_i} \ = \ \boldsymbol{\mathcal{F}}_O(\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{R_i}, \bar{\boldsymbol{\sigma}}_{R_{i-1}}, \bar{\boldsymbol{\sigma}}_{O_{i-1}}) \tag{163}$$

$$R_i = ||(\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{R_i} - \bar{\boldsymbol{\sigma}}_{O_i})|| \ . \tag{164}$$

L'algorithme de gestion de la mémoire discrète, proposé ici, peut alors être formulé ainsi :

Si $i_{\max} = 0$ – Cas de la *première charge* ;

  Si $\Phi \geqslant 0$ – Pas d'évènement pour la mémoire discrète.

  Sinon $(\Phi < 0)$ – Première inversion : incrémentation de $i_{\max}$ ($i_{\max} = 1$) et mémorisation de la contrainte actuelle $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_R = \bar{\boldsymbol{\sigma}}_{R_1} = \bar{\boldsymbol{\sigma}}_t$.

Sinon $(i_{\max} \geqslant 1)$

  Si $R_t < R_{i_{\max}}$ – Pas de coïncidence ;

    Si $\Phi \geqslant 0$ – Pas d'évènement pour la mémoire discrète, si ce n'est de garder les termes mémorisés constants au cours du temps.

    Sinon $(\Phi < 0)$ – Inversion supplémentaire : incrémentation de $i_{\max}$ ($i_{\max} = i_{\max} + 1$) et mémorisation de la contrainte actuelle $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_R = \bar{\boldsymbol{\sigma}}_{R_{i_{\max}}} = \bar{\boldsymbol{\sigma}}_t$.

  Sinon $(R_t \geqslant R_{i_{\max}})$ – Coïncidence : effacement de la mémoire $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_R$ et décrémentation de $i_{\max}$ ($i_{\max} = i_{\max} - 1$).

Fin de l'algorithme.

Remarque Contrairement à la gestion de la mémoire via la fonction d'aide (cf. travaux précédents [Pegon, 1988]) à chaque coïncidence, une seule mémorisation est effacée. Cependant, lors d'un trajet radial, il y a pour une même valeur d'intensité de contrainte, deux coïncidences successives qu'il faut alors détecter. Par contre, lorsque le trajet fait intervenir un angle α non nul, deux coïncidences successives font intervenir des intensités de contraintes différentes.

8 Implantation informatique et intégration de l'équation d'avancement de la loi de comportement dans le code Herezh++

Cette partie concerne l'implantation informatique d'une loi d'élasto ou hyper-visco-hystérésis. Le comportement final intègre trois contributions : hyperélastique, viscoélastique et hystérétique. On se place dans le cadre d'une résolution de l'équilibre global par la méthode de Newton-Raphson. Cependant, ces développements s'étendent sans difficultés aux cas dynamiques d'une formulation explicite, sans calcul de raideur.

8.1 Partie hyperélastique

L'implantation ne pose aucune difficulté particulière. Supposons l'itération "i", la connaissance des coordonnées initiales et finales permet le calcul de la base naturelle à ces deux instants d'où l'on déduit le tenseur $\boldsymbol{B}$, à partir duquel se calcul explicitement le tenseur des contraintes hyperélastiques, ainsi que son évolution tangente.

8.2 Partie hystérésie

L'équation différentielle en t, pseudo-temps, est intégrée selon une méthode implicite. Dans une première étape, l'équation est linéarisée en temps ce qui conduit à une équation non linéaire en contraintes finales. Ensuite, cette équation est résolue par une méthode itérative de type Newton.

Considérons un pas de temps t vers $t+dt$. L'objectif est de déterminer les contraintes à $t+dt$, en fonction des contraintes initiales à t. Du à l'algorithme de pilotage des inversions, il sera également nécessaire de définir des grandeurs additionnelles de contrôle.

8.2.1 Linéarisation temporelle

Le gradient de vitesse se décompose en deux parties : le tenseur vitesse de déformation et le tenseur vitesse de rotation (représenté par le pseudo-vecteur : le rotationnelle). De manière à linéariser l'évolution temporelle sur le pas de temps, il nous faut adopter une hypothèse cinématique. Pour notre part, nous considérerons que la vitesse de déformation est constante sur le pas de temps. Cette hypothèse revient à privilégier les mouvements de corps rigide par rapport aux mouvements de déformation. Ce choix n'est pas unique, en particulier il est possible de considérer une vitesse du déplacement sur un pas de temps constant. Cependant, de précédentes études ont montré que lorsque le pas de temps est faible, le type d'hypothèse retenu n'a a priori aucune incidence sur le résultat final. Nous retenons donc l'hypothèse la plus simple pour la linéarisation ceci en tenant compte d'un type de dérivée de Lie deux fois covariantes pour la déformation $\mathcal{L}_{\cdot\cdot}\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{D}$ où la déformation concernée est celle d'Almansi. Dans ce cas, nous avons sur un pas de temps :

$$\boldsymbol{D} = \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial t}\vec{g}^i \otimes \vec{g}^j \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{D}_{moy} = \frac{\Delta \varepsilon_{ij}}{\Delta t}\vec{g}^i \otimes \vec{g}^j \tag{165}$$

où $\vec{g}^i$ sont les vecteurs de la base duale à la base naturelle associée au paramétrage matériel retenu. D'une manière analogue, la dérivée temporelle de la contrainte, ici celle de Jauman, est linéarisée :

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{1}{2}(\mathcal{L}_{..}\boldsymbol{\sigma} + \mathcal{L}^{\cdot\cdot}\boldsymbol{\sigma}) = \frac{1}{2}(\mathcal{L}_{\cdot}\boldsymbol{\sigma} + \mathcal{L}_{\cdot}\boldsymbol{\sigma}) \quad \rightarrow \quad \dot{\boldsymbol{\sigma}}_{moy} = \frac{1}{2}(\frac{\Delta\sigma^i_{\cdot j}}{\Delta t}\vec{g}_i \otimes \vec{g}^j + \frac{\Delta\sigma_i^{\cdot j}}{\Delta t}\vec{g}^i \otimes \vec{g}_j) \quad (166)$$

Dans cette dernière expression, on peut également se servir de la symétrie formelle : $\sigma^i_{\cdot j} = \sigma^{\cdot i}_j$

Les vecteurs de base sont ceux du temps final. Lorsqu'il y aura un risque de confusion, on indiquera le temps auquel on se réfère.

8.2.2 Équation constitutive linéarisée

L'équation constitutive (150) est linéarisée à partir des expressions précédentes :

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{moy} = 2\ \mu\bar{\boldsymbol{D}}_{moy} + \beta_{moy}\Phi_{moy}\Delta^t_R\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{moy} \quad (167)$$

Les grandeurs moyennes étant les seules utilisées, dans la suite, par simplicité, nous ne mentionnerons plus indice *moy*. De plus, nous observons que le dénominateur Δt est en facteur pour tous les termes, ce qui est logique, il sera donc simplifié dans les différentes expressions.

De manière à simplifier le nombre de types de composantes manipulées, nous allons exprimer l'équation constitutive en composantes mixtes covariantes contravariants. Pour cela, en suivant le raisonnement proposé par Pierre Pégon [Pegon, 1988] (II.32-II.33) nous pouvons remarquer :

— qu'à chaque type de composantes, on peut associer un schéma particulier d'évolution : i.e. l'équation (167) pour chaque type de composante,

— ces deux schémas mixtes conduisent à des solutions non symétriques possédant la relation : $\sigma^{i(2)}_{\cdot j} = \sigma^{\cdot i(1)}_j$. Les indices (1) et (2) indique que chaque grandeur est issue d'une équation d'évolution distincte de l'autre. Par cohérence : $\phi^{(1)} = \phi^{(2)}$

On pose alors : $\boldsymbol{\sigma} = 1/2(\boldsymbol{\sigma}^{(1)} + \boldsymbol{\sigma}^{(2)})$, ce qui conduit à une contrainte symétrique, cohérente avec la dérivée de Jaumann.

Ainsi, il est possible d'utiliser un seul des deux schémas mixtes avec l'équation (167), par exemple pour déterminer $\sigma^{\cdot i(2)}_j$, à partir de laquelle la contrainte finale est obtenue selon :

$$\sigma^{ij} = \frac{1}{2}\left(\sigma_k^{\cdot i(1)}g^{kj} + \sigma_k^{\cdot j(1)}g^{ki}\right) \quad (168)$$

et le schéma retenu s'écrit :

$$\Delta\sigma_i^{\cdot j(1)}\vec{g}^i \otimes \vec{g}_j = (2\ \mu\bar{D}_i^{\cdot j}\Delta t + \beta\Phi^{(1)}\Delta t\Delta^t_R\bar{\sigma}_i^{\cdot j(1)})\vec{g}^i \otimes \vec{g}_j \quad (169)$$

Par la suite, lorsqu'il n'y aura pas de confusion, pour simplifier les expressions nous supprimons l'indice (1).

Dans le cadre d'une résolution par éléments finis avec une formulation en déplacement, en ce qui concerne la loi de comportement, la cinématique est connue à une itération

donnée de Newton-Raphson, et l'inconnue est la contrainte finale. Le problème s'écrit sous la forme d'une recherche de zéro d'une fonction scalaire non linéaire :

$$R(\Delta\sigma_i^{\cdot j}) = \Delta\sigma_i^{\cdot j} - (2\ \mu\bar{\Delta}\varepsilon_i^{\cdot j} + \beta\Phi\Delta t\Delta_R^t\bar{\sigma}_i^{\cdot j}) \tag{170}$$

L'ensemble des Δ sans indice sont à comprendre comme étant $\Delta_t^{t+\Delta t}$.

8.2.3 Résolution numérique de l'équation constitutive linéarisée

L'équation est résolue par une méthode de Newton. Tout d'abord, nous allons expliciter le calcul des différents termes du résidu.

Calculons tout d'abord $\bar{\Delta}\varepsilon_i^{\cdot j}$.

Nous considérons connu les différentes composantes du tenseur métrique et donc le terme $\Delta\varepsilon_{ij}$ d'où :

$$\Delta\varepsilon_i^{\cdot j} = \Delta\varepsilon_{ik}g^{kj} \ \rightarrow\ \boldsymbol{I}_{\boldsymbol{\Delta\varepsilon}} = \Delta\varepsilon_i^{\cdot i} \ \rightarrow\ \bar{\Delta}\varepsilon_i^{\cdot j} = \Delta\varepsilon_{ik}g^{kj} - \frac{\Delta\varepsilon_r^{\cdot r}}{3}g_i^{\cdot j} \tag{171}$$

Concernant le terme $\Phi\Delta t$, en utilisant l'expression précédente :

$$\begin{aligned}\Phi\Delta t &= \Delta_R^t\bar{\boldsymbol{\sigma}} : \bar{\boldsymbol{D}}\ \Delta t - \frac{{Q_{\Delta\sigma}}^2}{2.\mu}\frac{\dot{\omega}'\ \Delta t}{\omega'} \\ &= \Delta_R^t\bar{\boldsymbol{\sigma}} : \bar{\Delta}\boldsymbol{\varepsilon} - \frac{{Q_{\Delta\sigma}}^2}{2.\mu}\frac{\Delta\omega'}{\omega'}\end{aligned} \tag{172}$$

Maintenant, nous nous intéressons au terme β.

La difficulté principale est l'obtention de w', c'est-à-dire le calcul de l'angle de variation de phase α. Pour cela nous utilisons la relation (153). Cette dernière nécessite le calcul des contraintes $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{o_i}$.

La relation (153) donne directement le cosinus de l'angle de variation de phase, d'où la valeur de w'. Les relations (157) et (158) permettent d'obtenir $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{o_i}$ en fonction des données précédentes.

Nous avons donc ainsi de disponible tous les termes constitutifs du résidu. La mise en oeuvre de la méthode de Newton nécessite maintenant le calcul d'un opérateur tangent, ce qui permet la convergence quadratique. Pour ce faire il nous faut calculer la variation des différents termes du résidu par rapport aux composantes de la contrainte, écrite ici sous forme mixte.

8.2.4 Calcul de l'opérateur tangent

À partir de l'expression (170) on a :

$$\frac{\partial R(\Delta\sigma_i^{\cdot j})}{\partial\Delta_R^t\sigma_k^{\cdot l}} = \delta_i^k\delta_l^j(1-\beta\Phi\Delta t) - (\frac{\partial\beta}{\Delta_R^t\sigma_k^{\cdot l}}\Phi\Delta t + \beta\frac{\partial\Phi\Delta t}{\partial\Delta_R^t\sigma_k^{\cdot l}})\Delta_R^t\bar{\sigma}_i^{\cdot j} \tag{173}$$

Dans cette expression le calcul de la variation de $\Phi\Delta t$ ce déduit de l'expression (172) :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Phi \Delta t}{\partial \Delta^t_R \sigma^l_k} = & \quad \bar{\Delta\varepsilon}^k_l \\ & - \frac{\Delta\omega}{\mu\omega'} Q_{\Delta\sigma} \frac{\partial Q_{\Delta\sigma}}{\partial \Delta^t_R \sigma^l_k} \\ & - \frac{{Q_{\Delta\sigma}}^2}{2\mu} \left(\frac{\partial \Delta\omega}{\partial \Delta^t_R \sigma^l_k} \ \frac{1.}{\omega'} - \frac{\Delta\omega}{\omega'^2} \ \frac{\partial \omega'}{\partial \Delta^t_R \sigma^l_k} \right)\end{aligned} \tag{174}$$

Concernant le calcul de la variation de β, comme pour le calcul de β, la difficulté principale est la variation de w' c'est-à-dire la variation du $cos(\alpha)$. La relation (153) donne :

$$\frac{\partial cos(\alpha_t)}{\partial \Delta^t_R \sigma^l_k} = \frac{\Delta^t_R \sigma^k_l}{||\Delta^t_R \boldsymbol{\sigma}|| \ ||\Delta^R_{o_i} \bar{\boldsymbol{\sigma}}||} \left(\frac{\Delta^t_R \boldsymbol{\sigma} : \Delta^R_{o_i} \bar{\boldsymbol{\sigma}}}{||\Delta^t_R \boldsymbol{\sigma}||^2} - 1 \right) \tag{175}$$

Il nous faut également la variation de $Q_{\Delta\sigma}$ déduite de la relation (151) :

$$\frac{\partial Q_{\Delta\sigma}}{\partial \Delta^t_R \sigma^l_k} = \frac{\Delta^t_R \sigma^k_l}{||\Delta^t_R \boldsymbol{\sigma}||} \tag{176}$$

D'où à partir de (151), la relation finale :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \beta}{\partial \Delta^t_R \sigma^l_k} = 2\mu \Bigg(& \left[\frac{np \ w \ Q_0}{(w' Q_0)^{np+1} (Q_{\Delta\sigma})^{2-np}} \right) \left(\frac{\partial cos(\alpha_t)}{\partial \Delta^t_R \sigma^l_k} \right) \\ & + \left(\frac{(2-np)}{(w' Q_0)^{np} (Q_{\Delta\sigma})^{2-np+1}} \right) \left(\frac{\partial Q_{\Delta\sigma}}{\partial \Delta^t_R \sigma^l_k} \right) \Bigg]\end{aligned} \tag{177}$$

8.3 Partie viscoélastique

Les équations sont linéarisées en temps, ici sur un pas de temps, suivant un schéma Euler purement implicite. Le type de dérivée se traduit via le type de transport des contraintes calculées à l'instant t et transportées à l'instant $t + \Delta t$.

9 Loi type Hooke 3D initialement orthotrope, puis entraînée

9.1 Relations générales

Il s'agit de la loi classique d'élasticité linéaire de Hooke en considérant un comportement initialement orthotrope. On pourra se reporter à ([Manach and Rio, 1999]) pour une présentation analogue des concepts utilisés comme base de départ. À mesure que le matériau se déforme, le comportement initialement orthotrope devient anisotrope au travers de l'utilisation d'un repère d'anisotropie matériellement entraîné. On s'intéresse tout d'abord à l'expression de la loi dans le repère d'anisotropie.

Supposons connu un repère d'orthotropie orthonormé nommé $\vec{O}'_a$ par la suite (a= 1..3). Dans ce repère les relations classiques de comportement s'écrivent :

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{11} &= \frac{1}{E_1}(\sigma_{11} - \nu_{12}\sigma_{22} - \nu_{13}\sigma_{33}) \\
\varepsilon_{22} &= \frac{1}{E_2}(-\nu_{21}\sigma_{11} + \sigma_{22} - \nu_{23}\sigma_{33}) \\
\varepsilon_{33} &= \frac{1}{E_3}(-\nu_{31}\sigma_{11} - \nu_{32}\sigma_{22} + \sigma_{33})
\end{aligned} \tag{178}$$

et

$$\varepsilon_{ab} = \frac{1}{2.\ G_{ab}}\sigma_{ab} \quad \text{avec} \quad a \neq b \tag{179}$$

NB : Remarquons que la variance des coordonnées n'a pas d'importance ici initialement, car le repère est orthonormé. Par contre, une fois déformée il faudra tenir compte de l'évolution du repère.

On suppose que l'énergie de déformation est convexe, l'orthotropie classique nécessite alors les relations de symétrie :

$$\frac{-\nu_{12}}{E_1} = \frac{-\nu_{21}}{E_2}\ , \quad \frac{-\nu_{13}}{E_1} = \frac{-\nu_{31}}{E_3}\ , \quad \frac{-\nu_{23}}{E_2} = \frac{-\nu_{32}}{E_3} \tag{180}$$

Le comportement dépend donc de 9 paramètres et d'un repère particulier d'orthotropie.

Si de plus, on souhaite que le potentiel élastique associé soit quadratique défini positif, les coefficients doivent satisfaire aux relations suivantes (cf. [Lemaitre and Chaboche, 2004]) :

$$\begin{aligned}
1. - \nu_{12}.\nu_{21} > 0 \ , \quad 1. - \nu_{23}.\nu_{32} > 0 \ , \quad 1. - \nu_{13}.\nu_{31} > 0 \\
1. - \nu_{12}.\nu_{23}.\nu_{31} - \nu_{21}.\nu_{13}.\nu_{32} - -\nu_{12}.\nu_{21} - \nu_{13}.\nu_{31} - \nu_{23}.\nu_{32} > 0
\end{aligned} \tag{181}$$

En tenant compte des relations (180) :

$$\begin{aligned}
1. > \nu_{12}^2.\frac{E_2}{E_1} \ , \quad 1. > \nu_{23}^2.\frac{E_3}{E_2} \ , \quad 1. > \nu_{13}^2.\frac{E_3}{E_1} \\
1. - \nu_{12}.\nu_{13}.\nu_{23}.\left(\frac{E_3}{E_1} - \frac{E_2}{E_1}.\frac{E_3}{E_2}\right) - \nu_{12}^2.\frac{E_2}{E_1} - \nu_{13}^2.\frac{E_3}{E_1} - \nu_{23}^2.\frac{E_3}{E_2} > 0
\end{aligned} \tag{182}$$

Remarque Le fait d'avoir un potentiel quadratique défini positif a plusieurs avantages. Dans le cas de petites déformations, cela garantit l'unicité de la solution. Les simulations obtenues sont conformes à de nombreux matériaux courants. Cependant, ce n'est pas a priori une condition obligatoire.

9.2 Transformations finies

Au cours de la transformation, on considère une évolution du repère initialement orthotrope.

Deux types de transport sont pris en compte :

— transport covariant puis normalisation des vecteurs

— transport contravariants puis normalisation des vecteurs

Le fait de normaliser les vecteurs de la base permet de garantir que les comportements dans le sens des axes d'orthotropies initiales, demeurent identiques, dans le cas où les couplages dus aux coefficients de Poisson sont négligeables. A priori ce type de comportement n'est correct que pour des déformations modérées. On se reportera à ([Manach and Rio, 1999]) pour des illustrations des limitations du modèle.

Les opérations spécifiques de type de transport sont détaillées en (12).

Les expression 178 et 179 sont alors à utiliser dans le repère transporté $\hat{\vec{O}}'_a$.

9.3 Cas seulement déviatorique ou sphérique

Le découpage en une partie déviatorique et une partie sphérique peut s'effectuer via les relations classiques en utilisant les coordonnées mixtes ce qui permet d'obtenir directement la trace puis la partie déviatorique.

$$\boldsymbol{I}_\sigma = trace(\boldsymbol{\sigma}) = \sigma_i^i \quad \text{d'où} \quad \boldsymbol{S} = \boldsymbol{\sigma} - \frac{\boldsymbol{I}_\sigma}{3}\boldsymbol{Id} \tag{183}$$

9.4 Compressibilité et variation de volume

Contrairement au cas isotrope, la compressibilité est dépendante des directions dans lesquelles le volume change.

La compressibilité est utile pour calculer par exemple les pas de temps critique en dynamique explicite.

Dans Herezh++ deux cas sont considérés. Soit la variation de volume constatée est suffisamment grande pour pouvoir calculer la compressibilité via la définition :

$$\frac{\boldsymbol{I}_\sigma}{3} = -P = K_s \log\left(\frac{vol}{vol_0}\right) = K_s \times \text{variation relative de volume}$$

Soit la variation de volume est nulle et dans ce cas on considère arbitrairement les 3 directions d'orthotropie. Supposons un essai de traction simple suivant l'axe 1, dans ce cas

$$\log\left(\frac{vol}{vol_0}\right) \approx trace(\boldsymbol{\epsilon}) = \left(\frac{1.}{E_1} - \frac{\nu_{21}}{E_2} - \frac{\nu_{31}}{E_3}\right)\sigma_{11} = \left(\frac{1.}{E_1} - \frac{\nu_{21}}{E_2} - \frac{\nu_{31}}{E_3}\right) trace(\boldsymbol{\sigma}) \tag{184}$$

d'où :

$$K_{s1} = \left(\frac{1.}{E_1} - \frac{\nu_{21}}{E_2} - \frac{\nu_{31}}{E_3}\right)^{-1} = \left(\frac{1.}{E_1} - \frac{\nu_{12}}{E_1} - \frac{\nu_{13}}{E_1}\right)^{-1} \tag{185}$$

et idem pour les 2 autres directions. Au final, on retient comme valeur initiale pour la compressibilité, c'est-à-dire la compressibilité pour une déformation nulle, la moyenne dans les trois directions :

$$\begin{aligned} K_s &= \frac{1}{3}\left(K_{s1}+K_{s2}+K_{s3}\right) \\ &= \frac{1}{3}\left(\left(\frac{1.}{E_1}-\frac{\nu_{21}}{E_2}-\frac{\nu_{31}}{E_3}\right)^{-1}+\left(\frac{-\nu_{12}}{E_1}+\frac{1}{E_2}-\frac{\nu_{23}}{E_2}\right)^{-1}+\left(\frac{-\nu_{13}}{E_1}-\frac{\nu_{23}}{E_2}+\frac{1}{E_3}\right)^{-1}\right) \end{aligned} \tag{186}$$

9.5 Opérateur tangent en déformation (transport contravariant)

On considère ici des coefficients matériels fixes où variants peu relativement aux déformations où aux degrés de liberté.

Les relations (178) et (179) donnent les variations du tenseur des contraintes dans le repère transporté.

$$\begin{aligned} d\varepsilon^{11} &= \frac{1}{E_1}(d\sigma^{11}-\nu_{12}\ d\sigma^{22}-\nu_{13}\ d\sigma^{33}) \\ d\varepsilon^{22} &= \frac{1}{E_2}(-\nu_{21}\ d\sigma^{11}+d\sigma^{22}-\nu_{23}\ d\sigma^{33}) \\ d\varepsilon^{33} &= \frac{1}{E_3}(-\nu_{31}\ d\sigma^{11}-\nu_{32}\ d\sigma^{22}+d\sigma^{33}) \end{aligned} \tag{187}$$

et

$$d\varepsilon^{ab}=\frac{1}{2.\ G_{ab}}d\sigma^{ab}\quad\text{avec}\quad a\neq b \tag{188}$$

En inversant les relations, on obtient une relation linéaire à coefficients constants :

$$\frac{\partial\sigma^{ab}}{\partial\varepsilon^{cd}}=H^{ab}_{..cd} \tag{189}$$

qui s'exprime dans le repère transporté $\hat{\vec{O}}'_a$ et son dual.

Le repère n'étant pas fixe, il nous faut connaître sa variation par rapport aux repères de travail : $\hat{\vec{g}}_j$ et $\hat{\vec{g}}^j$ pour accéder à l'opérateur tangent dans le repère naturel.

À l'aide de (262) on peut calculer la variation de σ^{ab} (composantes dans la base convectée) par rapport aux composantes du tenseur de déformation dans la base $\hat{\vec{g}}^j$.

$$\frac{\partial\sigma^{ab}}{\partial\varepsilon_{kl}}=\frac{\partial\sigma^{ab}}{\partial\varepsilon^{cd}}\ \frac{\partial\varepsilon^{cd}}{\partial\varepsilon_{kl}}=H^{ab}_{..cd}\ \frac{\partial\varepsilon^{cd}}{\partial\varepsilon_{kl}} \tag{190}$$

Par définition nous avons dans le sens inverse, c'est-à-dire du repère d'orthotropie convecté vers la base de travail cf. 12.3 :

$$\hat{\vec{g}}_j=\beta'^{.b}_{\ j}\ \hat{\vec{O}}'_b\quad\text{et}\quad\hat{\vec{g}}^j=\gamma'^{j}_{\ .b}\ \hat{\vec{O}}'^b$$

dans cette transformation $[\beta^{.j}_{b}]^T$ joue le rôle de $[\gamma'^{j}_{\ .b}]$:

$$[\gamma'^{j}_{\ .b}]=[\beta^{.j}_{b}]^T\quad\text{ou encore}\ \gamma'^{j}_{\ .b}=\beta^{.j}_{b}$$

Nous avons :

$$\sigma^{ij} = \gamma'^{i}_{.a}\ \sigma^{ab}\ \gamma'^{j}_{.b} \text{ ou bien } [\sigma^{ij}] = [\gamma'^{i}_{.a}]\ \sigma^{ab}\ [\gamma'^{j}_{.b}]^T \text{ ou encore } [\sigma^{ij}] = [\beta^{.i}_{a}]^T\ \sigma^{ab}\ [\beta^{.j}_{b}] \quad (191)$$

d'où :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma^{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}} &= \frac{\partial \gamma'^{i}_{.a}}{\partial \varepsilon_{kl}}\ \sigma^{ab}\ \gamma'^{j}_{.b} + \gamma'^{i}_{.a}\ \frac{\partial \sigma^{ab}}{\partial \varepsilon_{kl}}\ \gamma'^{j}_{.b} + \gamma'^{i}_{.a}\ \sigma^{ab}\ \frac{\partial \gamma'^{j}_{.b}}{\partial \varepsilon_{kl}} \\ &= \frac{\partial \beta^{.i}_{a}}{\partial \varepsilon_{kl}}\ \sigma^{ab}\ \beta^{.j}_{b} + \beta^{.i}_{a}\ \frac{\partial \sigma^{ab}}{\partial \varepsilon_{kl}}\ \beta^{.j}_{b} + \beta^{.i}_{a}\ \sigma^{ab}\ \frac{\partial \beta^{.j}_{b}}{\partial \varepsilon_{kl}} \end{aligned} \quad (192)$$

que l'on peut calculer à l'aide des relations (250,190 et 262).

Remarque

Dans le cas où on voudrait les variations du tenseur des contraintes dans le repère, $\hat{\vec{g}}^j$ nous devrions utiliser la variation de l'inverse de la matrice de passage $\beta^{.i}_{a}$.

$$\sigma_{ij} = \beta'^{.a}_{i}\ \sigma_{ab}\ \beta'^{.b}_{j} = \gamma^{a}_{.i}\ \sigma_{ab}\ \gamma^{b}_{.j} \quad (193)$$

d'où :

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}} = \frac{\partial \beta'^{.a}_{i}}{\partial \varepsilon_{kl}}\ \sigma_{ab}\ \beta'^{.b}_{j} + \beta'^{.a}_{i}\ \frac{\partial \sigma_{ab}}{\partial \varepsilon_{kl}}\ \beta'^{.b}_{j} + \beta'^{.a}_{i}\ \sigma_{ab}\ \frac{\partial \beta'^{.b}_{j}}{\partial \varepsilon_{kl}} \quad (194)$$

que l'on peut calculer à l'aide des relations (257,190 et 262).

9.6 Opérateur tangent en degré de liberté (transport contravariant)

Comme pour le cas précédent, on considère ici des coefficients matériels fixes où variants peu relativement aux degrés de liberté.

Les relations (178) et (179) donnent les variations du tenseur des contraintes dans le repère transporté.

$$\begin{aligned} d\varepsilon^{11} &= \frac{1}{E_1}(d\sigma^{11} - \nu_{12}\ d\sigma^{22} - \nu_{13}\ d\sigma^{33}) \\ d\varepsilon^{22} &= \frac{1}{E_2}(-\nu_{21}\ d\sigma^{11} + d\sigma^{22} - \nu_{23}\ d\sigma^{33}) \\ d\varepsilon^{33} &= \frac{1}{E_3}(-\nu_{31}\ d\sigma^{11} - \nu_{32}\ d\sigma^{22} + d\sigma^{33}) \end{aligned} \quad (195)$$

et

$$d\varepsilon^{ab} = \frac{1}{2.\ G_{ab}} d\sigma^{ab} \quad \text{avec} \quad a \neq b \quad (196)$$

En inversant les relations, on obtient une relation linéaire à coefficients constants :

$$\frac{\partial \sigma^{ab}}{\partial \varepsilon^{cd}} = H^{ab}_{..cd} \quad (197)$$

qui s'exprime dans le repère transporté $\hat{\vec{O}}'_a$ et son dual.

Ces repères n'étant pas fixe, il nous faut connaître leurs variations .

D'où la variation des composantes contravariantes du tenseur des contraintes dans le repère entraîné :

$$\frac{\partial \sigma^{ab}}{\partial ddl} = \frac{\partial \sigma ab}{\partial \varepsilon^{cd}} \frac{\partial \varepsilon^{cg}}{\partial ddl} = H^{ab}_{..cd} \frac{\partial \varepsilon^{cg}}{\partial ddl} \tag{198}$$

et par définition nous avons dans le sens inverse, c'est-à-dire du repère d'orthotropie convecté vers la base de travail cf. 276 :

$$\hat{\vec{g}}_j = \beta'^{.b}_{j} \ \hat{\vec{O}}'_b \ \text{ et } \hat{\vec{g}}^j = \gamma'^{j}_{.b} \ \hat{\vec{O}}^b \tag{199}$$

dans cette transformation $[\beta^{.b}_{j}]^T$ joue le rôle de $[\gamma'^{j}_{.b}]$:

$$[\gamma'^{j}_{.b}] = [\beta^{.b}_{j}]^T \tag{200}$$

Nous avons :

$$\sigma^{ij} = \gamma'^{i}_{.a} \ \sigma^{ab} \ \gamma'^{j}_{.b} \tag{201}$$

d'où :

$$\frac{\partial \sigma^{ij}}{\partial ddl} = \frac{\partial \gamma'^{i}_{.a}}{\partial ddl} \ \sigma^{ab} \ \gamma'^{j}_{.b} + \gamma'^{i}_{.a} \ \frac{\partial \sigma^{ab}}{\partial ddl} \ \gamma'^{j}_{.b} + \gamma'^{i}_{.a} \ \sigma^{ab} \ \frac{\partial \gamma'^{j}_{.b}}{\partial ddl} \tag{202}$$

que l'on peut calculer à l'aide des relations (264, 198 et 283).

9.7 Tests

On considère des tests académiques de traction et cisaillement, avec un seul élément, puis avec un groupe d'éléments. On utilise 3 types d'algorithme :

- implicite quasi-statique et Newton-Raphson, avec l'opérateur tangent direct par rapport aux degrés de liberté.
- Implicite quasi-statique et Newton-Raphson, avec l'opérateur tangent par rapport aux déformations. Cet opérateur est également nécessaire pour l'application des contraintes planes et doublement planes ainsi que pour le critère pli.
- Implicite quasi-statique et relaxation dynamique. Est également représentatif des calculs en explicite.

On regarde :

- la convergence en nombre d'itération,
- le résultat final,
- les temps de calcul.

On se place tout d'abord en petites transformations et on cherche à retrouver un comportement isotrope classique.

Maillage 1 : un cube de 100x100x100 mm, un seul élément : hexaèdre linéaire à 8 points d'intégration. Maillage 2 : un prisme de dimension : 100 x 10 x 40 mm, 5 x 4 x 3 elements) mm, hexaèdre linéaire à 8 points d'intégration.

Loi isoélastique : E=100000 MPa, ν =0.3 Déplacement imposé : 0.1%

Loi ortho-entraînée : (cf. mise en données Herezh++, manuel de l'utilisateur)

```
  E1= 100000 E2= 100000 E3= 100000 \
  nu12= 0.3 nu13= 0.3 nu23= 0.3\
  G12= 3.8462e+04 G13= 3.8462e+04 G23= 3.8462e+04
```

Essai de traction en implicite, méthode de Newton :
Maillage constitué d'une seule hexaèdre, avec une direction d'anisotropie à 45° dans le plan xy

```
fct_repere1  FONCTION_EXPRESSION_LITTERALE_nD
  fct=  1. , 1. , 0. , -1. , 1. , 0.
  fin_parametres_fonction_expression_litterale_
```

précision demandée pour la convergence : 1.e-5

TABLE 1 – Anisotropie à 45° dans le plan xy

traction selon x	isoelas	ortho
nb iteration	2	2
résidu final	4.57928e-07	0.0878818
résidu relatif	1.83556e-12	3.52262e-07
max force int	249476	249478
temps cpu loi	8 mls	56 mls
σ	9.985019975019e+01	9.985096120342e+01
traction selon z	isoelas	ortho
nb iteration	2	2
résidu final	5.15967e-07	0.0387284
résidu relatif	2.0682e-12	1.55239e-07
max force int	249476	249476
temps cpu loi	8 mls	52 mls
σ	9.985019975019e+01	9.985020903861e+01
traction selon y	isoelas	ortho
nb iteration	2	2
résidu final	4.98684e-07	0.0878818
résidu relatif	1.99893e-12	3.52262e-07
max force int	249476	249478
temps cpu loi	8 mls	52 mls
σ	9.985019975019e+01	9.985096120342e+01

Avec une direction d'anisotropie selon les axes de travail :
On introduit un maillage plus dense :

```
# prisme de dimension : 100 x 10 x 40  ( 5 x 4 x 3 elements )
# geometrie prismatique,   decoupage en hexaedre(s),   interpolation lineaire.
```

On reporte arbitrairement la contrainte du point d'intégration 1 à l'élément 1.
Essai de cisaillement : direction d'anisotropie à 0° dans le plan xy

TABLE 2 – traction selon x , anisotropie à 0° dans le plan xy

	isoelas	ortho
nb iteration	2	2
résidu final	4.57928e-07	0.0387284
résidu relatif	1.83556e-12	1.55239e-07
max force int	249476	249476
temps cpu loi	8 mls	56 mls
σ	9.985019975019e+01	9.985020903861e+01

TABLE 3 – traction , anisotropie à 0° dans le plan xy

selon x	isoelas	ortho
nb iteration	3	3
résidu final	0.000276869	0.000139263
résidu relatif	8.32352e-08	4.18668e-08
max force int	3326.35	3326.35
temps cpu loi	666 mls	3811 mls
σ	9.985019871731e+01	9.985019942661e+01

10 Loi type Hooke 2D CP, initialement orthotrope, puis entraînée

10.1 Relations générales

On suit un raisonnement analogue à celui développé en 3D, mais en intégrant une condition de contrainte plane dans la direction 3, qui est supposée normale au plan dans lequel les contraintes sont non nulles. Les notations sont identiques au cas 3D (voir 9 pour plus de précision).

Remarque importante : on considère que le repère d'orthotropie initial est tel que :
— les deux premiers vecteurs sont coplanaires avec la base de travail $\vec{g}_\alpha$, $\alpha = 1, 2$
— le troisième vecteur est normal au deux premiers.

L'état de contrainte plane se traduit par la nullité des composantes de contrainte σ_{i3} et en utilisant les relations 3D : (178) on obtient :

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{11} &= \frac{1}{E_1}(\sigma_{11} - \nu_{12}\sigma_{22}) \\
\varepsilon_{22} &= \frac{1}{E_2}(-\nu_{21}\sigma_{11} + \sigma_{22}) \\
\varepsilon_{33} &= \frac{1}{E_3}(-\nu_{31}\sigma_{11} - \nu_{32}\sigma_{22}) = \frac{-\nu_{13}\sigma_{11}}{E_1} + \frac{-\nu_{23}\sigma_{22}}{E_2}
\end{aligned} \tag{203}$$

et

$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{2.\ G_{12}}\sigma_{12} \tag{204}$$

NB : Remarquons que la variance des coordonnées n'a pas d'importance ici initialement, car le repère est orthonormé. Par contre, une fois déformée il faudra tenir compte de l'évolution du repère.

Comme pour le cas 3D, on suppose que l'énergie de déformation est convexe, l'orthotropie classique nécessite alors les relations de symétrie (180).

Au final le comportement dépend de 6 paramètres et d'un repère particulier d'orthotropie. En effet, par rapport au cas 3D, les paramètres E_3, G_{13} et G_{23} ne sont plus nécessaires.

Si de plus, on souhaite que le potentiel élastique associé soit quadratique défini positif, les coefficients doivent également satisfaire aux relations suivantes (181).

Remarque identique au cas 3D : Le fait d'avoir un potentiel quadratique défini positif a plusieurs avantages. Dans le cas de petites déformations, cela garantit l'unicité de la solution. Les simulations obtenues sont conformes à de nombreux matériaux courants. Cependant, ce n'est pas a priori une condition obligatoire.

Les relations (203) concernent 3 déformations et 2 contraintes. Il est donc possible d'exprimer une des déformations par rapport aux deux autres. On a tout d'abord avec les 2 premières relations :

$$\sigma_{11} = \frac{E_1}{(1 - \nu_{12}\ \nu_{21})}\ (\varepsilon_{11} + \nu_{21}\ \varepsilon_{22}) \text{ et } \sigma_{22} = \frac{E_2}{(1 - \nu_{12}\ \nu_{21})}\ (\nu_{12}\ \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) \tag{205}$$

d'où avec la troisième relation :

$$\varepsilon_{33} = -\frac{1}{1-\nu_{12}.\nu_{21}}\left[(\nu_{13}+\nu_{23}.\nu_{12})\ \varepsilon_{11} + (\nu_{23}+\nu_{13}.\nu_{21})\ \varepsilon_{22}\right] \tag{206}$$

Ainsi la déformation d'épaisseur est une conséquence de la loi de comportement et de la déformation dans le plan des contraintes planes.

Dans la mise en données pour Herezh, on utilise la symétrie des paramètres matériaux : $\nu_{12}/E_1 = \nu_{21}/E_2$ d'où $\nu_{21} = \nu_{12}E_2/E_1$, ce qui permet une mise en données avec 6 paramètres matériaux.

10.2 Transformations finies

Identiques à (9.2).

10.3 Cas seulement déviatorique ou sphérique

Le découpage en une partie déviatorique et une partie sphérique peut s'effectuer via les relations classiques en utilisant les coordonnées mixtes ce qui permet d'obtenir directement la trace puis la partie déviatorique.

$$\boldsymbol{I}_\sigma = trace(\boldsymbol{\sigma}) = \sigma^\alpha_\alpha \quad \text{d'où} \quad \boldsymbol{S} = \boldsymbol{\sigma} - \frac{\boldsymbol{I}_\sigma}{3}\boldsymbol{Id} \tag{207}$$

avec ici en contrainte plane, $\alpha = 1{,}2$

10.4 Compressibilité et variation de volume

Contrairement au cas isotrope, la compressibilité est dépendante des directions dans lesquelles le volume change.

La compressibilité est utile pour calculer par exemple les pas de temps critique en dynamique explicite.

Dans Herezh++ deux cas sont considérés. Soit la variation de volume constatée est suffisamment grande pour pouvoir calculer la compressibilité via la définition :

$$\frac{\boldsymbol{I}_\sigma}{3} = -P = K_s \log\left(\frac{vol}{vol_0}\right) = K_s \times \text{variation relative de volume}$$

Sachant que dans cette variation de volume, la variation d'épaisseur est une conséquence de la déformation dans le plan. Au moment du calcul des contraintes, on ne dispose en entrée que de la cinématique plane et de sa variation dans le plan des contraintes planes, c'est-à-dire $\frac{surf}{surf_0}$ où "surf" est la surface associée au point d'intégration où l'on calcule la contrainte. On se sert alors de (206) pour compléter la variation de volume.

Soit la variation de volume est nulle et dans ce cas on considère arbitrairement les 3 directions d'orthotropie et on considère un essai de traction simple suivant chaque direction, ce qui permet d'obtenir la formule 3D (187).

10.5 Opérateur tangent en déformation (transport contravariant)

On considère ici des coefficients matériels fixes où variants peu relativement aux déformations où aux degrés de liberté.

Les relations (203), (204) et (206) donnent les variations du tenseur des contraintes dans le repère transporté.

$$\begin{aligned} d\varepsilon^{11} &= \frac{1}{E_1}(d\sigma^{11} - \nu_{12}\ d\sigma^{22}) \\ d\varepsilon^{22} &= \frac{1}{E_2}(-\nu_{21}\ d\sigma^{11} + d\sigma^{22}) \\ d\varepsilon_{33} &= -\frac{1}{1-\nu_{12}.\nu_{21}}\left[(\nu_{13}\ d\varepsilon_{11} + \nu_{23}.\nu_{12}) + (\nu_{23} + \nu_{13}.\nu_{21})\ d\varepsilon_{22}\right] \end{aligned} \tag{208}$$

et

$$d\varepsilon^{12} = \frac{1}{2.\ G_{12}} d\sigma^{12} \tag{209}$$

En inversant les relations, on obtient une relation linéaire à coefficients constants :

$$\frac{\partial \sigma^{\alpha\beta}}{\partial \varepsilon^{\gamma\delta}} = H^{\alpha\beta}_{..\gamma\delta} \tag{210}$$

qui s'exprime dans le repère transporté $\hat{\vec{O}}'_\alpha$ et son dual.

NB : Les lettres grecques varient uniquement de 1 à 2

Le repère n'étant pas fixe, il nous faut connaître sa variation par rapport aux repères de travail : $\hat{\vec{g}}_\alpha$ et $\hat{\vec{g}}^\alpha$ pour accéder à l'opérateur tangent dans le repère naturel.

Notons que du fait des types de transport envisagés, les deux premiers vecteurs du repère d'anisotropie, qui définissent en fait le plan d'anisotropie transporté, restent à tous moments dans le plan des contraintes planes. Les variations du plan d'anisotropie ne dépendent que de la déformation dans le plan des conditions de contraintes planes. On obtient donc au final les mêmes relations qu'en 3D (cf. 228), mais avec des indices variant de 1 à 2, c'est-à-dire relatifs à ce qui se passe dans le plan des contraintes planes.

À l'aide de (226) on peut calculer la variation de $\sigma^{\alpha\beta}$ (composantes dans la base convectée) par rapport aux composantes du tenseur de déformation dans la base $\hat{\vec{g}}^\eta$.

$$\frac{\partial \sigma^{\alpha\beta}}{\partial \varepsilon_{\eta\theta}} = \frac{\partial \sigma^{\alpha\beta}}{\partial \varepsilon^{\gamma\delta}} \frac{\partial \varepsilon^{\gamma\delta}}{\partial \varepsilon_{\eta\theta}} = H^{ab}_{..\gamma\delta} \frac{\partial \varepsilon^{\gamma\delta}}{\partial \varepsilon_{\eta\theta}} \tag{211}$$

et au final de manière similaire au cas 3D on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma^{\alpha\beta}}{\partial \varepsilon_{\gamma\delta}} &= \frac{\partial \gamma'^{\alpha}_{.\eta}}{\partial \varepsilon_{\gamma\delta}}\ \sigma^{\eta\theta}\ \gamma'^{\beta}_{.\theta} + \gamma'^{\alpha}_{.\eta} \frac{\partial \sigma^{\eta\theta}}{\partial \varepsilon_{\gamma\delta}}\ \gamma'^{\beta}_{.\theta} + \gamma'^{\alpha}_{.\eta}\ \sigma^{\eta\theta} \frac{\partial \gamma'^{\beta}_{.\theta}}{\partial \varepsilon_{\gamma\delta}} \\ &= \frac{\partial \beta^{.\alpha}_{\eta}}{\partial \varepsilon_{\gamma\delta}}\ \sigma^{\eta\theta}\ \beta^{.\beta}_{\theta} + \beta^{.\alpha}_{\eta} \frac{\partial \sigma^{\eta\theta}}{\partial \varepsilon_{\gamma\delta}}\ \beta^{.\beta}_{\theta} + \beta^{.\alpha}_{\eta}\ \sigma^{\eta\theta} \frac{\partial \beta^{.\beta}_{\theta}}{\partial \varepsilon_{\gamma\delta}} \end{aligned} \tag{212}$$

que l'on peut calculer à l'aide des relations (250,227 et 262). Les relations (250 et 262) sont ici restreintes au plan d'anisotropie, les indices ne variants que de 1 à 2.

10.6 Opérateur tangent en degré de liberté (transport contravariant)

Comme pour le cas précédent, on considère ici des coefficients matériels fixes où variants peu relativement aux degrés de liberté.

Les relations (203) et (204) donnent les variations du tenseur des contraintes dans le repère transporté (224 et 225)

$$\begin{aligned} d\varepsilon^{11} &= \frac{1}{E_1}(d\sigma^{11} - \nu_{12}\ d\sigma^{22} - \nu_{13}\ d\sigma^{33}) \\ d\varepsilon^{22} &= \frac{1}{E_2}(-\nu_{21}\ d\sigma^{11} + d\sigma^{22} - \nu_{23}\ d\sigma^{33}) \\ d\varepsilon_{33} &= -\frac{1}{1-\nu_{12}.\nu_{21}}\left[(\nu_{13}+\nu_{23}.\nu_{12})\ d\varepsilon_{11} + (\nu_{23}+\nu_{13}.\nu_{21})\ d\varepsilon_{22}\right] \end{aligned}$$

et

$$d\varepsilon^{12} = \frac{1}{2.\ G_{12}} d\sigma^{12}$$

En inversant les relations, on obtient une relation linéaire à coefficients constants (226) qui s'exprime dans le repère transporté $\hat{\vec{O}}'_\alpha$ et son dual.

Ces repères n'étant pas fixe, il nous faut connaître leurs variations .

D'où la variation des composantes contravariantes du tenseur des contraintes dans le repère entraîné :

$$\frac{\partial \sigma^{\alpha\beta}}{\partial ddl} = \frac{\partial \sigma^{\alpha\beta}}{\partial \varepsilon^{\eta\theta}} \frac{\partial \varepsilon^{\eta\theta}}{\partial ddl} = H^{\alpha\beta}_{..\eta\theta} \frac{\partial \varepsilon^{\eta\theta}}{\partial ddl} \tag{213}$$

et par définition nous avons dans le sens inverse, c'est-à-dire du repère d'orthotropie convecté vers la base de travail cf. 276 :

$$\hat{\vec{g}}_\alpha = \beta'^{.\gamma}_{\alpha}\ \hat{\vec{O}}'_\gamma \quad \text{et} \quad \hat{\vec{g}}^\alpha = \gamma'^{\alpha}_{.\gamma}\ \hat{\vec{O}}'^\gamma \tag{214}$$

dans cette transformation $[\beta^{.\gamma}_{\alpha}]^T$ joue le rôle de $[\gamma'^{\alpha}_{.\gamma}]$:

$$[\gamma'^{\alpha}_{.\gamma}] = [\beta^{.\gamma}_{\alpha}]^T \tag{215}$$

Nous avons :

$$\sigma^{\alpha\beta} = \gamma'^{\alpha}_{.\eta}\ \sigma^{\eta\gamma}\ \gamma'^{\beta}_{.\gamma} \tag{216}$$

d'où :

$$\frac{\partial \sigma^{\alpha\beta}}{\partial ddl} = \frac{\partial \gamma'^{\alpha}_{.\eta}}{\partial ddl}\ \sigma^{\eta\theta}\ \gamma'^{\beta}_{.\theta} + \gamma'^{\alpha}_{.\eta} \frac{\partial \sigma^{\eta\theta}}{\partial ddl}\ \gamma'^{\beta}_{.\theta} + \gamma'^{\alpha}_{.\eta}\ \sigma^{\eta\theta} \frac{\partial \gamma'^{\beta}_{.\theta}}{\partial ddl} \tag{217}$$

que l'on peut calculer à l'aide des relations (264, 229 et 283). Les relations (264 et 283) sont ici restreintes au plan d'anisotropie, les indices ne variants que de 1 à 2.

11 Loi hypoélastique 3D et 2D CP, initialement orthotrope, puis entraînée

11.1 Relations générales

Les relations utilisées sont déduites du comportement orthotrope 3D et 2D CP entraînée en suivant une démarche analogue au comportement hypoélastique isotrope (cf. 5). Dans le cas 2D CP, la direction 3 est supposée normale au plan dans lequel les contraintes sont non nulles. Les notations sont identiques au cas 3D et 2D CP (voir 9 et 10 pour plus de précision).

Le comportement est incrémental. On suppose connue l'état de contrainte au temps "t" et on cherche l'état de contrainte au temps "$t + \Delta t$".

Dans le repère d'anisotropie $\vec{O}'_a$ les relations incrémentales s'écrivent en 3D par exemple en 2 fois covariants :

$$\begin{aligned} d\varepsilon_{11} &= \frac{1}{E_1}(d\sigma_{11} - \nu_{12}d\sigma_{22} - \nu_{13}d\sigma_{33}) \\ d\varepsilon_{22} &= \frac{1}{E_2}(-\nu_{21}d\sigma_{11} + d\sigma_{22} - \nu_{23}d\sigma_{33}) \\ d\varepsilon_{33} &= \frac{1}{E_3}(-\nu_{31}d\sigma_{11} - \nu_{32}d\sigma_{22} + d\sigma_{33}) \end{aligned} \tag{218}$$

et

$$d\varepsilon_{ab} = \frac{1}{2.\ G_{ab}}d\sigma_{ab} \quad \text{avec} \quad a \neq b \tag{219}$$

En contrainte plane, sachant que la condition de contrainte plane est satisfaite à l'état initiale "t", cela impose que l'incrément de contraintes $d\sigma_{33} = 0$. L'axe 3 étant normé et normal aux deux autres vecteurs, la relation est vrai, quelque soit la variance choisie et quelque soit le type de transport qui utilise l'axe 3.

Les relations deviennent :

$$\begin{aligned} d\varepsilon_{11} &= \frac{1}{E_1}(d\sigma_{11} - \nu_{12}d\sigma_{22}) \\ d\varepsilon_{22} &= \frac{1}{E_2}(-\nu_{21}d\sigma_{11} + d\sigma_{22}) \\ d\varepsilon_{33} &= \frac{1}{E_3}(-\nu_{31}d\sigma_{11} - \nu_{32}d\sigma_{22}) = \frac{-\nu_{13}d\sigma_{11}}{E_1} + \frac{-\nu_{23}d\sigma_{22}}{E_2} \end{aligned} \tag{220}$$

et

$$d\varepsilon_{12} = \frac{1}{2.\ G_{12}}d\sigma_{12} \tag{221}$$

On suppose que l'incrément d'énergie de déformation est convexe ce qui permet d'utiliser les relations de symétrie (180). Dans le cas où les coefficients de la loi de comportement restent fixes, on retrouvera une énergie globale convexe.

Au final le comportement dépend de 9 paramètres en 3D et 7 paramètres en 2D CP, et d'un repère particulier d'orthotropie. Toujours en suivant une démarche analogue aux cas élastiques, si de plus, on souhaite que le potentiel élastique associé soit quadratique défini positif, les coefficients doivent également satisfaire aux relations suivantes (181).

Remarque identique au cas 3D : Le fait d'avoir un potentiel quadratique défini positif a plusieurs avantages. Dans le cas de petites déformations, cela garantit l'unicité de la solution. Les simulations obtenues sont conformes à de nombreux matériaux courants. Cependant, ce n'est pas a priori une condition obligatoire.

Dans le cas 2D CP, il est possible d'exprimer l'incrément de déformation d'épaisseur en fonction des déformations dans le plan :

$$d\varepsilon_{33} = -\frac{1}{1-\nu_{12}.\nu_{21}}\left[(\nu_{13}+\nu_{23}.\nu_{12})\ d\varepsilon_{11} + (\nu_{23}+\nu_{13}.\nu_{21})\ d\varepsilon_{22}\right] \tag{222}$$

Ainsi l'incrément de déformation d'épaisseur est une conséquence de la loi de comportement et des incréments de déformation dans le plan des contraintes planes.

11.2 Transformations finies

Deux transports sont à considérer.

— le transport du repère d'anisotropie. Il s'agit d'un transport de vecteurs. Ceux-ci possèdent une seule variance. Le transport dans notre cas est envisagé sous forme d'un transport particulier qui conserve la norme de certaines directions (celles d'anisotropie) mais pas les angles. On se reportera à (9.2) pour plus de détail.

— le transport des tenseurs. Les tenseurs ont deux variances. Dans notre cas on utilise les transports associés aux dérivées de Lie 2 fois covariantes, 2 fois contravariantes et mixes sous forme de la dérivée de Jauman. On suit donc la même démarche que celle utilisée pour toutes les lois incrémentales implantées dans Herezh. On se reportera par exemple à (5) pour plus de détail à ce sujet.

la suite est en état de construction !!

11.3 Cas seulement déviatorique ou sphérique

Le découpage en une partie déviatorique et une partie sphérique peut s'effectuer via les relations classiques en utilisant les coordonnées mixtes ce qui permet d'obtenir directement la trace puis la partie déviatorique.

$$\boldsymbol{I}_\sigma = trace(\boldsymbol{\sigma}) = \sigma^\alpha_\alpha \quad \text{d'où} \quad \boldsymbol{S} = \boldsymbol{\sigma} - \frac{\boldsymbol{I}_\sigma}{3}\boldsymbol{Id} \tag{223}$$

avec ici en contrainte plane, $\alpha = 1{,}2$

11.4 Compressibilité et variation de volume

Contrairement au cas isotrope, la compressibilité est dépendante des directions dans lesquelles le volume change.

La compressibilité est utile pour calculer par exemple les pas de temps critique en dynamique explicite.

Dans Herezh++ deux cas sont considérés. Soit la variation de volume constatée est suffisamment grande pour pouvoir calculer la compressibilité via la définition :

$$\frac{\boldsymbol{I}_\sigma}{3} = -P = K_s \log\left(\frac{vol}{vol_0}\right) = K_s \times \text{variation relative de volume}$$

Sachant que dans cette variation de volume, la variation d'épaisseur est une conséquence de la déformation dans le plan. Au moment du calcul des contraintes, on ne dispose en entrée que de la cinématique plane et de sa variation dans le plan des contraintes planes, c'est-à-dire $\frac{surf}{surf_0}$ où "surf" est la surface associée au point d'intégration où l'on calcule la contrainte. On se sert alors de (206) pour compléter la variation de volume.

Soit la variation de volume est nulle et dans ce cas on considère arbitrairement les 3 directions d'orthotropie et on considère un essai de traction simple suivant chaque direction, ce qui permet d'obtenir la formule 3D (187).

11.5 Opérateur tangent en déformation (transport contravariant)

On considère ici des coefficients matériels fixes où variants peu relativement aux déformations où aux degrés de liberté.

Les relations (203), (204) et (206) donnent les variations du tenseur des contraintes dans le repère transporté.

$$\begin{aligned}
d\varepsilon^{11} &= \frac{1}{E_1}(d\sigma^{11} - \nu_{12}\ d\sigma^{22}) \\
d\varepsilon^{22} &= \frac{1}{E_2}(-\nu_{21}\ d\sigma^{11} + d\sigma^{22}) \\
d\varepsilon_{33} &= -\frac{1}{1-\nu_{12}.\nu_{21}}\left[(\nu_{13}\ d\varepsilon_{11} + \nu_{23}.\nu_{12}) + (\nu_{23} + \nu_{13}.\nu_{21})\ d\varepsilon_{22}\right]
\end{aligned} \tag{224}$$

et

$$d\varepsilon^{12} = \frac{1}{2.\ G_{12}} d\sigma^{12} \tag{225}$$

En inversant les relations, on obtient une relation linéaire à coefficients constants :

$$\frac{\partial \sigma^{\alpha\beta}}{\partial \varepsilon^{\gamma\delta}} = H^{\alpha\beta}_{..\gamma\delta} \tag{226}$$

qui s'exprime dans le repère transporté $\hat{\vec{O}}'_\alpha$ et son dual.

NB : Les lettres grecques varient uniquement de 1 à 2

Le repère n'étant pas fixe, il nous faut connaître sa variation par rapport aux repères de travail : $\hat{\vec{g}}_\alpha$ et $\hat{\vec{g}}^\alpha$ pour accéder à l'opérateur tangent dans le repère naturel.

Notons que du fait des types de transport envisagés, les deux premiers vecteurs du repère d'anisotropie, qui définissent en fait le plan d'anisotropie transporté, restent à tous moments dans le plan des contraintes planes. Les variations du plan d'anisotropie ne

dépendent que de la déformation dans le plan des conditions de contraintes planes. On obtient donc au final les mêmes relations qu'en 3D (cf. 228), mais avec des indices variant de 1 à 2, c'est-à-dire relatifs à ce qui se passe dans le plan des contraintes planes.

À l'aide de (226) on peut calculer la variation de $\sigma^{\alpha\beta}$ (composantes dans la base convectée) par rapport aux composantes du tenseur de déformation dans la base $\hat{\vec{g}}^{\eta}$.

$$\frac{\partial \sigma^{\alpha\beta}}{\partial \varepsilon_{\eta\theta}} = \frac{\partial \sigma^{\alpha\beta}}{\partial \varepsilon^{\gamma\delta}} \frac{\partial \varepsilon^{\gamma\delta}}{\partial \varepsilon_{\eta\theta}} = H^{ab}_{..\gamma\delta} \frac{\partial \varepsilon^{\gamma\delta}}{\partial \varepsilon_{\eta\theta}} \tag{227}$$

et au final de manière similaire au cas 3D on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma^{\alpha\beta}}{\partial \varepsilon_{\gamma\delta}} &= \frac{\partial \gamma'^{\alpha}_{.\eta}}{\partial \varepsilon_{\gamma\delta}} \sigma^{\eta\theta} \gamma'^{\beta}_{.\theta} + \gamma'^{\alpha}_{.\eta} \frac{\partial \sigma^{\eta\theta}}{\partial \varepsilon_{\gamma\delta}} \gamma'^{\beta}_{.\theta} + \gamma'^{\alpha}_{.\eta} \sigma^{\eta\theta} \frac{\partial \gamma'^{\beta}_{.\theta}}{\partial \varepsilon_{\gamma\delta}} \\ &= \frac{\partial \beta^{.\alpha}_{\eta}}{\partial \varepsilon_{\gamma\delta}} \sigma^{\eta\theta} \beta^{.\beta}_{\theta} + \beta^{.\alpha}_{\eta} \frac{\partial \sigma^{\eta\theta}}{\partial \varepsilon_{\gamma\delta}} \beta^{.\beta}_{\theta} + \beta^{.\alpha}_{\eta} \sigma^{\eta\theta} \frac{\partial \beta^{.\beta}_{\theta}}{\partial \varepsilon_{\gamma\delta}} \end{aligned} \tag{228}$$

que l'on peut calculer à l'aide des relations (250,227 et 262). Les relations (250 et 262) sont ici restreintes au plan d'anisotropie, les indices ne variants que de 1 à 2.

11.6 Opérateur tangent en degré de liberté (transport contravariant)

Comme pour le cas précédent, on considère ici des coefficients matériels fixes où variants peu relativement aux degrés de liberté.

Les relations (203) et (204) donnent les variations du tenseur des contraintes dans le repère transporté (224 et 225)

$$\begin{aligned} d\varepsilon^{11} &= \frac{1}{E_1}(d\sigma^{11} - \nu_{12}\, d\sigma^{22} - \nu_{13}\, d\sigma^{33}) \\ d\varepsilon^{22} &= \frac{1}{E_2}(-\nu_{21}\, d\sigma^{11} + d\sigma^{22} - \nu_{23}\, d\sigma^{33}) \\ d\varepsilon_{33} &= -\frac{1}{1 - \nu_{12}.\nu_{21}} [(\nu_{13} + \nu_{23}.\nu_{12})\, d\varepsilon_{11} + (\nu_{23} + \nu_{13}.\nu_{21})\, d\varepsilon_{22}] \end{aligned}$$

et

$$d\varepsilon^{12} = \frac{1}{2.\, G_{12}} d\sigma^{12}$$

En inversant les relations, on obtient une relation linéaire à coefficients constants (226) qui s'exprime dans le repère transporté $\hat{\vec{O}}'_{\alpha}$ et son dual.

Ces repères n'étant pas fixe, il nous faut connaître leurs variations .

D'où la variation des composantes contravariantes du tenseur des contraintes dans le repère entraîné :

$$\frac{\partial \sigma^{\alpha\beta}}{\partial ddl} = \frac{\partial \sigma^{\alpha\beta}}{\partial \varepsilon^{\eta\theta}} \frac{\partial \varepsilon^{\eta\theta}}{\partial ddl} = H^{\alpha\beta}_{..\eta\theta} \frac{\partial \varepsilon^{\eta\theta}}{\partial ddl} \tag{229}$$

et par définition nous avons dans le sens inverse, c'est-à-dire du repère d'orthotropie convecté vers la base de travail cf. 276 :

$$\hat{\vec{g}}_\alpha = \beta'^{.\gamma}_{\alpha}\ \hat{\vec{O}}'_\gamma \quad \text{et} \quad \hat{\vec{g}}^\alpha = \gamma'^{\alpha}_{.\gamma}\ \hat{\vec{O}}'^\gamma \tag{230}$$

dans cette transformation $[\beta^{.\gamma}_{\alpha}]^T$ joue le rôle de $[\gamma'^{\alpha}_{.\gamma}]$:

$$[\gamma'^{\alpha}_{.\gamma}] = [\beta^{.\gamma}_{\alpha}]^T \tag{231}$$

Nous avons :

$$\sigma^{\alpha\beta} = \gamma'^{\alpha}_{.\eta}\ \sigma^{\eta\gamma}\ \gamma'^{\beta}_{.\gamma} \tag{232}$$

d'où :

$$\frac{\partial \sigma^{\alpha\beta}}{\partial ddl} = \frac{\partial \gamma'^{\alpha}_{.\eta}}{\partial ddl}\ \sigma^{\eta\theta}\ \gamma'^{\beta}_{.\theta} + \gamma'^{\alpha}_{.\eta}\ \frac{\partial \sigma^{\eta\theta}}{\partial ddl}\ \gamma'^{\beta}_{.\theta} + \gamma'^{\alpha}_{.\eta}\ \sigma^{\eta\theta}\ \frac{\partial \gamma'^{\beta}_{.\theta}}{\partial ddl} \tag{233}$$

que l'on peut calculer à l'aide des relations (264, 229 et 283). Les relations (264 et 283) sont ici restreintes au plan d'anisotropie, les indices ne variants que de 1 à 2.

12 Transport d'un repère d'anisotropie

On suppose connu le repère d'anisotropie dans la position initiale. Soit $\vec{O}_a$ les vecteurs du repère. Compte tenu de l'évolution de la matière, le repère est susceptible d'évoluer naturellement. Par exemple s'il y a des déplacements solides, le repère devrait "suivre" la matière. Si de plus, la matière se déforme, une évolution particulière du repère doit éventuellement être prise en compte.

Dans notre cas, on va considérer deux types de transport :

— transport covariant puis normalisation des vecteurs

— transport contravariants puis normalisation des vecteurs

Le fait d'utiliser un transport matériel covariant ou contravariant permet de prendre automatiquement en compte les mouvements de corps rigides, c'est un transport naturel dans le cas de l'utilisation de coordonnées matériels entraînés.

Le fait de normaliser les vecteurs de la base est plus particulier. Cela suppose que l'on tient compte, pour les vecteurs transportés, des changements d'angles entre eux, mais pas des changements de leur longueur.

L'intérêt de ce choix et de permettre de maintenir un comportement identique dans le sens des axes initialement d'anisotropie :

— qu'il y ait une déformation d'élongation ou pas selon ces axes,

— qu'il y ait un changement d'angle ou pas.

12.1 Transport type contravariant

Le repère d'anisotropie initiale doit pouvoir s'exprimer dans le repère naturel :

$$\vec{O}_a = \frac{1.}{||\vec{g}_j||} A_a^{.j}\ \vec{g}_j = \alpha_a^{.j}\ \vec{g}_j \tag{234}$$

Dans le premier type de transport : contravariant, on considère deux étapes. Première étape, les vecteurs $\vec{O}_a$ sont transportés de manière contravariante c'est-à-dire que leurs coordonnées contravariantes demeurent fixes :

$$\hat{\vec{O}}_a = \alpha_a^{.j}\ \hat{\vec{g}}_j \tag{235}$$

seconde étape : les vecteurs sont normalisés :

$$\hat{\vec{O}}'_a = \frac{\alpha_a^{.j}\ \hat{\vec{g}}_j}{||\hat{\vec{O}}_a||} \tag{236}$$

Remarques

— Le calcul de la mise à jour du repère $\hat{\vec{O}}'_a$ nécessite la connaissance des coordonnées locales contravariantes α_a^j du repère initial. Ces coordonnées sont fixes et permettent pour tout nouveau repère naturel $\hat{\vec{g}}_j$ de calculer les coordonnées du nouveau repère transporté $\hat{\vec{O}}'_a$.

— Les vecteurs $\hat{\vec{O}}'_a$ sont normés, mais ne forment pas une base orthonormée, car étant entraînés par la matière, l'angle formé entre deux vecteurs varie. On a :

$$\hat{\vec{O}}'_a.\,\hat{\vec{O}}'_b = \frac{\alpha_a^j\ \hat{\vec{g}}_j}{||\hat{\vec{O}}_a||}.\frac{\alpha_b^i\ \hat{\vec{g}}_i}{||\hat{\vec{O}}_b||} = \frac{\alpha_a^j\ \alpha_b^i\ \hat{g}_{ij}}{||\hat{\vec{O}}_a||\ ||\hat{\vec{O}}_b||} \tag{237}$$

— Les coordonnées locales du repère $\hat{\vec{O}}'_a$ sont tel que :

$$\hat{O'}^i = \hat{\vec{O}}'_a.\hat{\vec{g}}^i = \frac{\alpha_a^j\ \hat{\vec{g}}_j.\hat{\vec{g}}^i}{||\hat{\vec{O}}_a||} = \frac{\alpha_a^i}{\sqrt{\alpha_a^k\ \alpha_a^l\ \hat{g}_{kl}}} = \beta_a^{.i} \tag{238}$$

c'est-à-dire :

$$\hat{\vec{O}}'_a = \hat{O'}^i\ \hat{\vec{g}}_i = \beta_a^{.i}\ \hat{\vec{g}}_i \tag{239}$$

et pour la base duale dont on verra le calcul par la suite :

$$\hat{\vec{O}}'^a = \hat{O'}_i\ \hat{\vec{g}}^i = \gamma_{.i}^a\ \hat{\vec{g}}^i \tag{240}$$

12.2 Transport type covariant

La méthodologie est semblable au cas du transport de type contravariant.

Le repère d'anisotropie est exprimé dans le repère dual à l'aide de ses coordonnées covariantes :

$$\vec{O}_a = \frac{1.}{||\vec{g}^j||} A_{aj}\ \vec{g}^j = \alpha_{aj}\ \vec{g}^j \tag{241}$$

On considère également deux étapes. Première étape, les vecteurs $\vec{O}_a$ sont transportés de manière covariante c'est-à-dire que leurs coordonnées covariantes restent fixes pendant le transport :

$$\hat{\vec{O}}_a = \alpha_{aj}\ \hat{\vec{g}}^j \tag{242}$$

seconde étape : les vecteurs sont normalisés :

$$\hat{\vec{O}}'_a = \frac{\alpha_{aj}\ \hat{\vec{g}}^j}{||\hat{\vec{O}}_a||} \tag{243}$$

Remarques

— Le calcul de la mise à jour du repère $\hat{\vec{O}}'_a$ nécessite la connaissance des coordonnées locales covariantes α_{aj} du repère initial. Ces coordonnées sont fixes et permettent pour tout nouveau repère naturel $\hat{\vec{g}}^j$ de calculer les coordonnées du nouveau repère transporté $\hat{\vec{O}}'_a$.

— comme pour le transport de type contravariant, les vecteurs $\hat{\vec{O}}'_a$ ne sont pas orthogonaux entre eux.

— Initialement nous avons la relation :

$$\alpha_{aj} = \alpha_a^i \; g_{ij} \tag{244}$$

Le transport de type covariant ou contravariant ne conduit pas à des vecteurs identiques. En effet $\alpha_{aj} \; \hat{\vec{g}}^j$ est différent de $\alpha_a^j \; \hat{\vec{g}}_j$ compte tenu de 244 c'est-à-dire :

$$\alpha_{aj} \neq \alpha_a^i \; \hat{g}_{ij} \tag{245}$$

sauf si la métrique n'a pas évolué.

12.3 Formules de changement de base (transport contravariant)

On part des relations :

$$\hat{\vec{O}}'_a = \hat{O'}^i \; \hat{\vec{g}}_i = \beta'^{.i}_{a} \; \hat{\vec{g}}_i \text{ et } \hat{\vec{O}}'^a = \hat{O'}_i \; \hat{\vec{g}}^i = \gamma'^{a}_{.i} \; \hat{\vec{g}}^i \tag{246}$$

Nous avons également les relations inverses :

$$\hat{\vec{g}}_j = \beta'^{.b}_{j} \; \hat{\vec{O}}'_b \text{ et } \hat{\vec{g}}^j = \gamma'^{j}_{.b} \; \hat{\vec{O}}'^b \tag{247}$$

qui conduisent à :

$$\beta'^{.b}_{j} = \hat{\vec{g}}_j . \hat{\vec{O}}'^b = \hat{\vec{g}}_j . \left(\gamma'^{a}_{.i} \; \hat{\vec{g}}^i \right) = \gamma'^{a}_{.j} \text{ c'est-à-dire } \beta'^{.b}_{j} = \gamma'^{b}_{.j} \text{ et } [\beta'^{.b}_{j}] = [\gamma'^{b}_{.j}]^T \tag{248}$$

De manière analogue nous avons :

$$\gamma'^{j}_{.b} = \hat{\vec{g}}^j . \hat{\vec{O}}'_b = \hat{\vec{g}}^j . \left(\beta'^{.i}_{a} \; \hat{\vec{g}}_i \right) = \beta'^{.j}_{a} \text{ c'est-à-dire } \gamma'^{j}_{.b} = \beta'^{.j}_{a} \text{ et } [\gamma'^{j}_{.b}] = [\beta'^{.j}_{a}]^T \tag{249}$$

12.4 Variations des déformations d'Almansi dans le repère entraîné par rapport à celles exprimées dans $\hat{\vec{g}}^j$

Ces variations sont utiles pour le calcul de l'opérateur tangent : contraintes/déformations.

Dans le cas d'une mesure de déformation d'Almansi, nous connaissons la variation des composantes de la métrique par rapport à la déformation (cf. [Rio, 2015] : $\partial \hat{g}_{mn} / \partial \varepsilon_{kl} = 2. \; \delta^k_m \; \delta^l_n$.

D'où à partir de l'expression (238) :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \beta'^{.i}_{a}}{\partial \varepsilon_{kl}} &= \frac{\partial \beta'^{.i}_{a}}{\partial \hat{g}_{mn}} \; \frac{\partial \hat{g}_{mn}}{\partial \varepsilon_{kl}} \\
&= \frac{\partial \left(\alpha'^{.i}_{a} \left(\alpha'^{.f}_{a} \alpha'^{.e}_{a} \hat{g}_{ef} \right)^{-\frac{1}{2}} \right)}{\partial \hat{g}_{mn}} \; \frac{\partial \hat{g}_{mn}}{\partial \varepsilon_{kl}} \\
&= -\frac{\alpha'^{.i}_{a}}{2} \frac{\alpha'^{.m}_{a} \; \alpha'^{.n}_{a}}{\left(\alpha'^{.e}_{a} \alpha'^{.f}_{a} \hat{g}_{ef} \right)^{\frac{3}{2}}} \; 2. \; \delta^k_m \; \delta^l_n \\
&= -\frac{\alpha'^{.i}_{a} \; \alpha'^{.k}_{a} \; \alpha'^{.l}_{a}}{\left(\alpha'^{.e}_{a} \alpha'^{.f}_{a} \hat{g}_{ef} \right)^{\frac{3}{2}}}
\end{aligned} \tag{250}$$

expression dans laquelle il n'y a pas de sommation relativement à l'indice "a".

Nous avons également besoin de la variation de l'inverse de la matrice de passage $\beta_{\cdot a}^{\cdot i}$.

Par définition :

$$[\beta_{\cdot j}^{\cdot a}]^{-1}\ [\beta_{\cdot a}^{\cdot i}] = [Id] \tag{251}$$

d'où

$$\frac{\partial [\beta_{\cdot j}^{\cdot a}]^{-1}}{\partial \varepsilon_{kl}}\ [\beta_{\cdot a}^{\cdot i}] + [\beta_{\cdot j}^{\cdot a}]^{-1}\ \frac{\partial [\beta_{\cdot a}^{\cdot i}]}{\partial \varepsilon_{kl}} = [0] \tag{252}$$

ou encore

$$\frac{\partial [\beta_{\cdot j}^{\cdot b}]^{-1}}{\partial \varepsilon_{kl}} = -[\beta_{\cdot j}^{\cdot a}]^{-1}\ \frac{\partial [\beta_{\cdot a}^{\cdot i}]}{\partial \varepsilon_{kl}}\ [\beta_{\cdot i}^{\cdot b}]^{-1} \tag{253}$$

Pour avoir une expression par composante on note : $[\beta'^{\cdot a}_{\cdot j}] = [\beta_{\cdot j}^{\cdot a}]^{-1}$ et ainsi :

$$\frac{\partial [\beta'^{\cdot b}_{\cdot j}]}{\partial \varepsilon_{kl}} = -[\beta'^{\cdot a}_{\cdot j}]\ \frac{\partial [\beta_{\cdot a}^{\cdot i}]}{\partial \varepsilon_{kl}}\ [\beta'^{\cdot b}_{\cdot i}] \tag{254}$$

et par définition nous avons :

$$\hat{\vec{g}}_j = \beta'^{\cdot b}_{\cdot j}\ \hat{\vec{O}}'_b = \gamma_{\cdot j}^{b}\ \hat{\vec{O}}'_b \text{ c'est-à-dire } [\beta'^{\cdot b}_{\cdot j}] = [\gamma_{\cdot j}^{b}]^T \tag{255}$$

ce qui donne ainsi la variation de γ

$$\begin{aligned} \frac{\partial [\gamma_{\cdot j}^{b}]^T}{\partial \varepsilon_{kl}} &= \frac{\partial [\beta'^{\cdot b}_{\cdot j}]}{\partial \varepsilon_{kl}} \\ &= -[\beta'^{\cdot a}_{\cdot j}]\ \frac{\partial [\beta_{\cdot a}^{\cdot i}]}{\partial \varepsilon_{kl}}\ [\beta'^{\cdot b}_{\cdot i}] \\ &= -[\gamma_{\cdot j}^{a}]^T\ \frac{\partial [\beta_{\cdot a}^{\cdot i}]}{\partial \varepsilon_{kl}}\ [\gamma_{\cdot i}^{b}]^T \end{aligned} \tag{256}$$

et en indices :

$$\frac{\partial \gamma_{\cdot j}^{b}}{\partial \varepsilon_{kl}} = -\gamma_{\cdot j}^{a}\ \frac{\partial \beta_{\cdot a}^{\cdot i}}{\partial \varepsilon_{kl}}\ \gamma_{\cdot i}^{b} = \frac{\partial \beta'^{\cdot b}_{\cdot j}}{\partial \varepsilon_{kl}} \tag{257}$$

Localement, dans le repère d'anisotropie entraîné, nous utilisons des coordonnées contravariantes.

En appelant ε^{ab} les composantes du tenseur de déformation dans le repère, $\hat{\vec{O}}'_a$ on a :

$$\varepsilon^{ab} = \gamma_{\cdot n}^{a}\ \hat{g^{ni}}\ \varepsilon_{ij}\ \hat{g^{jm}}\ \gamma_{\cdot m}^{b} = \gamma_{\cdot n}^{a}\ \varepsilon^{nm}\ \gamma_{\cdot m}^{b} \tag{258}$$

Pour obtenir les variations par rapport aux coordonnées ε_{kl} on commence par calculer les variations des coordonnées contravariantes dans le repère de travail.

$$\frac{\partial \varepsilon^{nm}}{\partial \varepsilon_{kl}} = \frac{\partial \hat{g^{ni}}}{\partial \varepsilon_{kl}}\ \varepsilon_{ij}\ \hat{g^{jm}} + \hat{g^{ni}}\ \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}}\ \hat{g^{jm}} + \hat{g^{ni}}\ \varepsilon_{ij}\ \frac{\partial \hat{g^{jm}}}{\partial \varepsilon_{kl}} \tag{259}$$

Sachant que :

$$\frac{\partial \hat{g}^{ni}}{\partial \epsilon_{kl}} = -2\hat{g}^{nk}\hat{g}^{il} \text{ et } \frac{\partial \hat{g}^{jm}}{\partial \epsilon_{kl}} = -2\hat{g}^{jk}\hat{g}^{ml} \tag{260}$$

d'où

$$\begin{aligned}\frac{\partial \varepsilon^{nm}}{\partial \varepsilon_{kl}} &= -2\hat{g}^{nk}\hat{g}^{il}\ \varepsilon_{ij}\ g^{\hat{j}m} + g^{\hat{n}i}\ \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}}\ g^{\hat{j}m} - 2\ g^{\hat{n}i}\ \varepsilon_{ij}\ \hat{g}^{jk}\hat{g}^{ml} \\ &= -2\hat{g}^{nk}\ \varepsilon^{lm} + g^{\hat{n}k}\ g^{\hat{l}m} - 2\ \varepsilon^{nk}\ \hat{g}^{ml} \\ &= -2\ \left(\hat{g}^{nk}\ \varepsilon^{lm} + \varepsilon^{nk}\ \hat{g}^{ml}\right) + g^{\hat{n}k}\ g^{\hat{l}m} \end{aligned} \tag{261}$$

En tenant compte de cette expression et des formules de changement de base on obtient ainsi la variation des composantes de déformation exprimées dans le repère transporté, par rapport aux composantes de déformation exprimées dans le repère dual $\hat{\vec{g}}^{j}$:

$$\frac{\partial \varepsilon^{ab}}{\partial \varepsilon_{kl}} = \frac{\partial \gamma^{a}_{.n}}{\partial \varepsilon_{kl}}\ \varepsilon^{nm}\ \gamma^{b}_{.m} + \gamma^{a}_{.n}\ \frac{\partial \varepsilon^{nm}}{\partial \varepsilon_{kl}}\ \gamma^{b}_{.m} + \gamma^{a}_{.n}\ \varepsilon^{nm}\ \frac{\partial \gamma^{b}_{.m}}{\partial \varepsilon^{kl}} \tag{262}$$

12.5 Variations par rapport aux degrés de liberté cinématiques

On reprend l'expression 238 :

$$\hat{\vec{O}}'_a = \beta^{.i}_{a}\ \hat{\vec{g}}_i \tag{263}$$

On notera certaine fois simplement ∂ au lieu de $\frac{\partial}{\partial ddl}$ par simplifier les notations.
La variation de $\beta^{.i}_{a}$ peut se calculer via : de l'expression (238) :

$$\begin{aligned}\partial\beta^{.i}_{a} &= \frac{\partial\left(\alpha^{.i}_{a}\left(\alpha^{.f}_{a}\alpha^{.e}_{a}\hat{g}_{ef}\right)^{-\frac{1}{2}}\right)}{\partial ddl} \\ &= -\frac{\alpha^{.i}_{a}}{2}\frac{\alpha^{.l}_{a}\ \alpha^{.m}_{a}}{\left(\alpha_{a}{}^{.e}\ \alpha_{a}{}^{.f}\ \hat{g}_{ef}\right)^{\frac{3}{2}}}\ \partial\hat{g}_{lm}\end{aligned} \tag{264}$$

expression dans laquelle il n'y a pas de sommation relativement à l'indice "a".

On en déduit la variation du vecteur $\hat{\vec{O}}'_a$:

$$\frac{\partial\,\hat{\vec{O}}'_a}{\partial ddl} = \frac{\partial\beta^{.i}_{a}}{ddl}\ \hat{\vec{g}}_i + \beta^{.i}_{a}\ \frac{\partial\hat{\vec{g}}_i}{\partial ddl} \tag{265}$$

Par définition de la base duale :

$$\hat{\vec{O}}'^{a} = \gamma^{a}_{.i}\ \hat{\vec{g}}^{\ i} \text{ avec } \hat{\vec{O}}'_a.\,\hat{\vec{O}}'^{b} = \delta^{.b}_{a} \tag{266}$$

d'où

$$-\frac{\partial\,\hat{\vec{O}}'_a}{\partial ddl}.\,\hat{\vec{O}}'^{b} = \hat{\vec{O}}'_a.\frac{\partial\,\hat{\vec{O}}'^{b}}{\partial ddl} \tag{267}$$

Le terme de droite correspond donc par définition à la coordonnée covariante "a" du vecteur $\frac{\partial\,\hat{\vec{O}}'^{b}}{\partial ddl}$ d'où le vecteur variation :

$$\frac{\partial\,\hat{\vec{O}}'^{b}}{\partial ddl} = \left(-\frac{\partial\,\hat{\vec{O}}'_a}{\partial ddl}.\,\hat{\vec{O}}'^{b}\right)\ \ \hat{\vec{O}}'^{a} \tag{268}$$

Concernant les variations du tenseur des contraintes dans le repère, $\hat{\vec{g}}^j$ nous devons utiliser la variation de l'inverse de la matrice de passage $\beta_{a}^{.i}$.

Par définition :

$$[\beta_{a}^{.i}]^{-1}\ [\beta_{b}^{.i}] = [\delta_{a}^{b}] \tag{269}$$

d'où

$$\frac{\partial [\beta_{a}^{.i}]^{-1}}{\partial ddl}\ [\beta_{b}^{.i}] + [\beta_{a}^{.i}]^{-1}\ \frac{\partial [\beta_{b}^{.i}]}{\partial ddl} = [0] \tag{270}$$

ou encore

$$\frac{\partial [\beta_{a}^{.i}]^{-1}}{\partial ddl} = -[\beta_{a}^{.i}]^{-1}\ \frac{\partial [\beta_{b}^{.i}]}{\partial ddl}\ [\beta_{c}^{.j}]^{-1} \tag{271}$$

Pour avoir une expression par composante on pourrait noter : $[\beta'^{.a}_{i}] = [\beta_{a}^{.i}]^{-1}$ mais en fait il s'agit tout simplement de la matrice $[\gamma_{i}^{.a}]^T$ car par définition on a (cf. 543) : $[\beta_{b}^{.i}]^{-1} = [\gamma_{.b}^{i}]^T$. Notons également, (cf. remarque 543) que tous les indices sont muets, seules leurs positions a de l'importance.

et ainsi :

$$\frac{\partial [\gamma_{i}^{.a}]^T}{\partial ddl} = \frac{\partial [\beta'^{.b}_{j}]}{\partial ddl} = -[\beta'^{.a}_{j}]\ \frac{\partial [\beta_{a}^{.i}]}{\partial ddl}\ [\beta'^{.b}_{i}] = -[\gamma_{i}^{.a}]^T\ \frac{\partial [\beta_{b}^{.j}]}{\partial ddl}\ [\gamma_{k}^{.c}]^T \tag{272}$$

$$\frac{\partial [\gamma_{i}^{.a}]}{\partial ddl} = -\left[[\gamma_{i}^{.a}]^T\ \frac{\partial [\beta_{b}^{.j}]}{\partial ddl}\ [\gamma_{k}^{.c}]^T\right]^T = -[\gamma_{k}^{.c}]\ \left[\frac{\partial [\beta_{b}^{.j}]}{\partial ddl}\right]^T\ [\gamma_{i}^{.a}] \tag{273}$$

Une autre méthode pour arriver au même résultat est de noter que compte tenu du fait de la relation définissant les vecteurs $\hat{\vec{O}}'_b$ et $\hat{\vec{O}}'^b$ et en tenant compte de 543 nous avons :

$$\hat{\vec{g}}_j = \gamma_{.j}^{b}\ \hat{\vec{O}}'_b \text{ et } \hat{\vec{g}}^i = \beta_{a}^{.i}\ \hat{\vec{O}}'^a \tag{274}$$

ce qui conduit à la relation importante :

$$\hat{\vec{g}}_j.\hat{\vec{g}}^i = \delta_{j}^{i} = \gamma_{.j}^{a}.\beta_{a}^{.i} \tag{275}$$

Remarque Si l'on notait $\hat{\vec{g}}_j = \beta'^{.b}_{j}\ \hat{\vec{O}}'_b$ et $\hat{\vec{g}}^j = \gamma'^{j}_{.b}\ \hat{\vec{O}}'^b$ il faut remarquer qu'en notation matricielle, compte tenu de 274 :

$$[\gamma_{.j}^{b}]^T = [\beta'^{.b}_{j}] \quad \text{et } [\beta_{a}^{.j}]^T = [\gamma'^{j}_{.b}] \tag{276}$$

qui correspond à la notation indicielle :

$$\gamma_{.j}^{b} = \beta'^{.b}_{j} \quad \text{et } \beta_{a}^{.j} = \gamma'^{j}_{.b} \tag{277}$$

Sachant que par ailleurs on peut écrire :

$$\hat{\vec{O}}'_b.\ \hat{\vec{O}}'^a = \delta_{b}^{a} = \beta_{b}^{.i}\ \gamma_{.i}^{a} \tag{278}$$

cela conduit à :

$$0 = \frac{\partial \beta_b^{.i}}{\partial ddl}\ \gamma_{.i}^a + \beta_b^{.i}\ \frac{\partial \gamma_{.i}^a}{\partial ddl}$$

vrai quelque soient "a" et "b" d'où

$$0 = \gamma_{.j}^b\ \frac{\partial \beta_b^{.i}}{\partial ddl}\ \gamma_{.i}^a + \gamma_{.j}^b\ \beta_b^{.i}\ \frac{\partial \gamma_{.i}^a}{\partial ddl}$$

après sommation sur b et pour i=j

$$\frac{\partial \gamma_{.i}^a}{\partial ddl} = -\gamma_{.j}^b\ \frac{\partial \beta_b^{.i}}{\partial ddl}\ \gamma_{.i}^a \tag{279}$$

ce qui correspond à la formule matricielle 272.

Maintenant on peut calculer la variation des déformations.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\epsilon} &= \varepsilon^{ab}\ \hat{\vec{O}}'_a \otimes \hat{\vec{O}}'_b = \varepsilon_{ij}\ \hat{\vec{g}}^i \otimes \hat{\vec{g}}^j \\ &= \varepsilon^{ij}\ \hat{\vec{g}}_i \otimes \hat{\vec{g}}_j \end{aligned} \tag{280}$$

d'où

$$\begin{aligned} \beta_a^{.i}\beta_b^{.j}\varepsilon^{ab} &= \varepsilon^{ij} \\ &\text{ou encore} \\ \left[\beta_a^{.i}\right]^T \left[\varepsilon^{ab}\right] \left[\beta_b^{.j}\right] &= \left[\varepsilon^{ij}\right] \\ &\textit{et} \\ \left[\varepsilon^{ab}\right] &= \left[\beta_a^{.i}\right]^{-T} \left[\varepsilon^{ij}\right] \left[\beta_b^{.j}\right]^{-1} \end{aligned} \tag{281}$$

et en tenant compte de 544 :

$$\left[\varepsilon^{ab}\right] = \left[\gamma_{.i}^a\right] \left[\varepsilon^{ij}\right] \left[\gamma_{.j}^b\right]^T \tag{282}$$

et pour les variations :

$$\partial \left[\varepsilon^{ab}\right] = \partial \left[\gamma_{.i}^a\right] \left[\varepsilon^{ij}\right] \left[\gamma_{.j}^b\right]^T + \left[\gamma_{.i}^a\right] \partial \left[\varepsilon^{ij}\right] \left[\gamma_{.j}^b\right]^T + \left[\gamma_{.i}^a\right] \left[\varepsilon^{ij}\right] \partial \left[\gamma_{.j}^b\right]^T \tag{283}$$

13 Anisotropie : opérateur de projection

13.1 Introduction

L'idée de l'opération de projection provient initialement des travaux de thèse de Denis Favier ([Favier, 1988b]). L'objectif est de considérer une anisotropie particulière qui s'effectue sur la base d'un comportement de référence isotrope, qui est ensuite "projeté" dans la configuration réelle au travers d'un repère particulier d'anisotropie et d'une fonction particulière.

Ce cadre très général est dans notre cas, spécialisé à un comportement qui s'inspire des critères de plasticité anisotropes, et plus particulièrement celui du critère de Hill

([Lemaitre and Chaboche, 2004]). L'idée de ce critère est de remplacer le critère de Mises $\boldsymbol{S} : \boldsymbol{S} = 1$ par $\boldsymbol{S} : \boldsymbol{H} : \boldsymbol{S} = 1$ où $\boldsymbol{H}$ est un tenseur du 4ième ordre.

Dans le cas de l'analyse de Hill, le critère est construit de manière à ce que l'on ait automatiquement :

$$trace(\boldsymbol{H} : \boldsymbol{\sigma}) = 0 \tag{284}$$

Dans notre cas, nous ne souhaitons pas conserver cette limitation pour $\boldsymbol{H}$ de manière à généraliser une transformation $\boldsymbol{H}..\boldsymbol{\sigma}$ qui apparaît ainsi comme une transformation linéaire générale dans un espace tensoriel d'ordre 2.

13.2 Tenseur des contraintes

Soit une loi de comportement existante isotrope qui permet de calculer un tenseur de contrainte de référence $\boldsymbol{\sigma}_{(ref)}$. À partir du tenseur $\boldsymbol{H}$, on en déduit le tenseur final des contraintes :

$$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{D}, ...) = \boldsymbol{H}..\boldsymbol{\sigma}_{(ref)}(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{D}, ...) \tag{285}$$

Le tenseur $\boldsymbol{H}$ est défini dans son repère principal qui est défini à partir du repère d'anisotropie.

Les directions principales du tenseur $\boldsymbol{H}$ dans l'espace tensoriel d'ordre 2, sont les tenseurs de base : $\boldsymbol{C}(i,j) = \vec{O'}_i \otimes \vec{O'}_j$ i,j= 1..3. de telle sorte que l'on a :

$$\boldsymbol{H}..\boldsymbol{C}(i,j) = \lambda(i,j) \;\; \boldsymbol{C}(i,j) \text{ avec } i,j = 1..3 \tag{286}$$

Ainsi dans cette base principale les composantes de $\boldsymbol{H}$ sont telles que :

- elles sont toutes nulles sauf les composantes : $H^{ii}_{..ii}$ i=1,2,3 et $H^{ij}_{..ij}$ $i \neq j$ et i,j=1,2,3
- pour des raisons de symétrie du tenseur final de contrainte on a : $H^{ij}_{..ij} = H^{ji}_{..ji} = H^{ij}_{..ji} = H^{ji}_{..ij}$

Les composantes de $\boldsymbol{H}$ dépendent donc uniquement de 6 scalaires :
$\lambda(1,1), \lambda(2,2), \lambda(3,3), \lambda(1,2), \lambda(1,3), \lambda(2,3)$

Dans le cadre d'une transformation finie, il faut adjoindre à cette équation constitutive une équation d'évolution pour $\boldsymbol{H}$. On considère ici les 2 types de transport décrit en chapitre (12). On s'y reportera pour les détails du transport et les mécanismes de changement de repère et de dérivation.

L'idée est ainsi de considérer un transport matériel $\boldsymbol{H}$ qui s'effectue directement à partir du transport de la base $\vec{O'}_a$ avec les particularités suivantes :

- le transport est matériel via l'utilisation d'une base matérielle naturelle $\vec{g}_i$ et sa base duale,
- la direction des vecteurs $\vec{O'}_a$ (ou $\vec{O'}^a$ suivant le choix retenu) est convectée
- par contre les vecteurs de base d'anisotropie, restent normalisés

Ainsi le tenseur $\boldsymbol{H}$ demeure constant dans un repère matériel entraîné dans le cas d'un mouvement solide. Dans le cas d'une déformation finie, il est sensible aux variations d'angles du repère $\vec{O'}_a$. Il n'est pas sensible aux variations de longueurs dans les directions entraînées de $\vec{O'}_a$.

D'une manière pratique on a le choix le repère dans lequel calculer le tenseur des contraintes. On fait le choix d'utiliser le repère matériel de travail pour éviter le transport

des grandeurs internes définies au point d'intégration et associées à la loi de comportement isotrope. On doit donc calculer le tenseur $\boldsymbol{H}$ dans le repère de travail.

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{H} &= \left(\sum_{a=1}^{3} H^{aa}_{..aa}\vec{O}'_a \otimes \vec{O}'_a \otimes \vec{O}'^a \otimes \vec{O}'^a\right) + \left(\sum_{a,b=1;a\neq b}^{3} H^{ab}_{..ab}\vec{O}'_a \otimes \vec{O}'_b \otimes \vec{O}'^a \otimes \vec{O}'^b\right) \\
&= \left(\sum_{a=1}^{3} \lambda(a,a)\vec{O}'_a \otimes \vec{O}'_a \otimes \vec{O}'^a \otimes \vec{O}'^a\right) + \left(\sum_{a,b=1;a\neq b}^{3} \lambda(a,b)\vec{O}'_a \otimes \vec{O}'_b \otimes \vec{O}'^a \otimes \vec{O}'^b\right) \\
&= \left(\sum_{a=1;}^{3}\sum_{b=1;}^{3} \lambda(a,b)\vec{O}'_a \otimes \vec{O}'_b \otimes \vec{O}'^a \otimes \vec{O}'^b\right) \qquad (287)
\end{aligned}$$

avec la particularité que $\lambda(a,b) = \lambda(b,a)$

En tenant compte de (246) :

$$H^{ij}_{..kl} = \left(\sum_{a=1;}^{3}\sum_{b=1;}^{3} \lambda(a,b)\beta^{.i}_{a}\beta^{.j}_{b}\gamma^{a}_{.k}\gamma^{b}_{.l}\right) \qquad (288)$$

D'où le tenseur des contraintes :

$$\sigma^{ij} = H^{ij}_{..kl}\ \sigma^{kl}_{(ref)} = \left(\sum_{a=1;}^{3}\sum_{b=1;}^{3} \lambda(a,b)\beta^{.i}_{a}\beta^{.j}_{b}\gamma^{a}_{.k}\gamma^{b}_{.l}\right)\ \sigma^{kl}_{(ref)} \qquad (289)$$

Il peut-être intéressant d'avoir accès aux contraintes exprimées dans le repère d'anisotropie. Notons cependant que ce repère n'est pas orthogonal ! mais il est normé. Compte tenu de (247) et (248) :

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\sigma} &= \sigma^{ij}\hat{\vec{g}}_i \otimes \hat{\vec{g}}_j = \sigma^{ij}\ \gamma^{a}_{.i}\ \gamma^{b}_{.j}\ \hat{\vec{O}}'_a \otimes \hat{\vec{O}}'_b \\
&= \sigma^{ab}\ \hat{\vec{O}}'_a \otimes \hat{\vec{O}}'_b \qquad (290)
\end{aligned}$$

13.2.1 Traitement des énergies

Le calcul de l'évolution des énergies et puissances dû à l'opération de projection, est a priori indéterminé. Il nous faut introduire une hypothèse supplémentaire.

Les éléments dont on dispose :

— l'incrément de déformation $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}$ et la vitesse de déformation $\boldsymbol{D}$,

— le tenseur de contrainte de référence $\boldsymbol{\sigma}_{(ref)}$ et les énergies $e_{(elastique)}$ $e_{(plastique)}$ $e_{(visqueux)}$ et puissances associées $P_{(elastique)}$ $P_{(plastique)}$ $P_{(visqueux)}$

— le tenseur de contrainte projeté $\boldsymbol{\sigma}$.

D'autre part on peut calculer

— la puissance totale de référence $P_{(totale\ de\ ref)} = \boldsymbol{\sigma}_{(ref)} : \boldsymbol{D}$ qui doit-être égale à $P_{(elastique\ de\ ref)} + P_{(plastique\ de\ ref)} + P_{(visqueux\ de\ ref)}$

— la puissance totale finale : $P_{(totale)} = \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{D}$ qui doit-être égale à la répartition de puissance que l'on cherche $P_{(elastique)} + P_{(plastique)} + P_{(visqueux)}$

La répartition de puissance dépend du type de comportement que l'on cherche à représenter.

Dans notre cas, en l'absence d'information particulière on fait l'hypothèse forte que l'opération de projection ne modifie pas la répartition des puissances du comportement de référence entre elles, mais seulement leur niveau. On se sert alors du rapport global des puissances pour adapter le niveau final des puissances individuelles.

$$\begin{aligned} r &= \frac{P_{(totale)}}{P_{(totale\ de\ ref)}} \\ &\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} P_{(elastique)} = r\ P_{(elastique\ de\ ref)} \\ P_{(plastique)} = r\ P_{(plastique\ de\ ref)} \\ P_{(visqueux)} = r\ P_{(visqueux\ de\ ref)} \end{array} \right. \end{aligned} \tag{291}$$

Concernant les énergies, on approche les énergies individuelles finales en linéarisant l'incrément de déformation :

$$\left\{ \begin{array}{l} e^{t+\Delta t}_{(elastique)} = e^{t}_{(elastique)} + P_{(elastique)}\ \Delta t \\ e^{t+\Delta t}_{(plastique)} = e^{t}_{(plastique)} + P_{(plastique)}\ \Delta t \\ e^{t+\Delta t}_{(visqueux)} = e^{t}_{(visqueux)} + P_{(visqueux)}\ \Delta t \end{array} \right. \tag{292}$$

13.2.2 Compressibilité et variation de volume

De manière analogue au cas de l'orthotropie entraînée (cf. 9.4) la compressibilité est dépendante des directions dans lesquelles le volume change. On va donc ici suivre une démarche assez semblable au cas de l'orthotropie entraînée.

Rappelons que la compressibilité est utile pour calculer par exemple les pas de temps critique en dynamique.

Dans Herezh++ deux cas sont considérés. Soit la variation de volume constatée est suffisamment grande pour pouvoir calculer la compressibilité via la définition :

$$\frac{\boldsymbol{I}_{\sigma(ref)}}{3} = -P = K_s \log\left(\frac{vol}{vol_0}\right) = K_s \times \text{variation relative de volume}$$

Soit la variation de volume est nulle et dans ce cas en l'absence d'information supplémentaire on va considérer le cas particulier d'une déformation purement sphérique. Le tenseur de contrainte de référence doit alors être également sphérique : $\boldsymbol{\sigma}_{(ref)} = -p_{(ref)}\ \boldsymbol{I}d$, de trace $= -3.p_{(ref)}$

En appelant $g"_{ab} = \vec{\hat{O}}'_a . \vec{\hat{O}}'_b$ les composantes deux fois covariantes du tenseur métrique dans la base d'orthotropie et $g"^{ab} = \vec{\hat{O}}'^a . \vec{\hat{O}}'^b$ celles contravariantes on peut calculer la trace du tenseur de contrainte projeté :

$$\begin{aligned} trace(\boldsymbol{\sigma}) &= g"_{ab}\ \sigma^{ab} = g"_{ab}\ \left(\lambda(a,b)\vec{O}'_a \otimes \vec{O}'_b \otimes \vec{O}'^a \otimes \vec{O}'^b\right) .. \left(\sigma^{ab}_{(ref)}\ \vec{O}'_a \otimes \vec{O}'_b\right) \\ &= g"_{ab}\ \left(\lambda(a,b)\ \sigma^{ab}_{(ref)}\right) \\ &= g"_{ab}\ \left(\lambda(a,b)\ (-p_{(ref)})\ g"^{ab}\right) \end{aligned} \tag{293}$$

On suppose que la loi de référence fournit un module de compressibilité :

$$K_{(ref)s} = \frac{(-p_{(ref)})}{\log\left(\frac{vol}{vol_0}\right)} = \frac{\boldsymbol{I}_{\sigma(ref)}}{3\,\log\left(\frac{vol}{vol_0}\right)}$$

Compte tenu de (293) on peut en déduire un module de compressibilité :

$$\begin{aligned} K_s &= \frac{\boldsymbol{I}_{\sigma}}{3\,\log\left(\frac{vol}{vol_0}\right)} \\ &= \frac{1}{3} g"_{ab}\ \left(\lambda(a,b)\ g"^{ab}\right) \frac{(-p_{(ref)})}{\log\left(\frac{vol}{vol_0}\right)} \\ &= \frac{1}{3} g"_{ab}\ \left(\lambda(a,b)\ g"^{ab}\right) K_{(ref)s} \end{aligned} \tag{294}$$

Remarque

1. Le module ainsi déterminé est correct pour une variation de volume pure. Il n'est pas correct pour une direction quelconque. Mais la notion même de variation de volume dépendante de la direction, n'est sans doute pas simple à utiliser.
2. Lorsque la déformation totale est nulle, le repère initial d'orthotropie est supposé orthogonal. Dans ce cas particulier $g"_{ab} = g"^{ab} = \delta_{ab}$. On obtient alors :

$$K_s = \frac{(\lambda(1,1) + \lambda(2,2) + \lambda(3,3))}{3}\ K_{(ref)s} \tag{295}$$

13.3 Cisaillement et variation de forme

L'idée est ici de calculer un module qui rend compte globalement de la variation de forme. Pour cela on considère arbitrairement que cette grandeur est représentée par le rapport de l'intensité du déviateur des contraintes sur l'intensité du déviateur des déformations.

$$G_s = 0.5\ \frac{||\boldsymbol{S} : \boldsymbol{S}||}{||\bar{\boldsymbol{\epsilon}} : \bar{\boldsymbol{\epsilon}}||} \tag{296}$$

NB : Cette grandeur correspond au module de cisaillement d'une loi élastique pour laquelle $\nu = 0.5$

G_s est utile pour calcul par exemple la vitesse approchée des ondes de cisaillement ce qui permet d'en déduire un pas de temps critique en dynamique explicite.

Dans Herezh++ deux cas sont considérés. Soit la variation de forme constatée, représentée par $\bar{\boldsymbol{\epsilon}}$ est suffisamment grande pour pouvoir calculer G_s via sa définition (296).

Soit la variation de forme est nulle et dans ce cas en l'absence d'information supplémentaire on va considérer le cas particulier d'une déformation purement déviatorique en considérant les 3 variations d'angle dans le repère d'anisotropie. Le tenseur de contrainte de référence doit alors être également déviatorique.

Supposons par exemple un cisaillement dans le plan 1-2 d'orthotropie. En l'absence de déformation, le repère initial est considéré orthonormé et les composantes des tenseurs sont du type :

$$[\varepsilon_{ab}] = e \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad et \quad [\sigma^{ab}_{ref}] = \tau_{ref} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{297}$$

après projection on obtient :

$$[\sigma^{ab}] = \tau_{ref} \begin{bmatrix} 0 & B12 & 0 \\ B12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{298}$$

d'où un module de cisaillement dans le plan 1-2 :

$$G_s(12) = 0.5 \, \frac{\sqrt{2} \mid B12 \; \tau_{ref} \mid}{\sqrt{2} \mid e \mid} = 0.5 \mid B12 \mid G_{s(ref)} \tag{299}$$

On voit que ce résultat dépend du plan considéré ce qui est logique compte tenu de l'anisotropie induite. Pour un état initial de déformation nulle, on fait le choix d'un module moyen :

$$G_s = \frac{1}{2} \, \frac{\mid B12 \mid + \mid B13 \mid + \mid B23 \mid}{3} \, G_{s(ref)} \tag{300}$$

13.4 Opérateur tangent en déformation (transport contravariant)

On part de l'expression indicielle (289)

$$\sigma^{ij} = \left(\sum_{a=1;}^{3} \sum_{b=1;}^{3} \lambda(a,b) \beta^{.i}_{a} \beta^{.j}_{b} \gamma^{a}_{.k} \gamma^{b}_{.l} \right) \; \sigma^{kl}_{(ref)}$$

d'où

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma^{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}} \quad = \quad & \sum_{a=1;}^{3} \sum_{b=1;}^{3} \lambda(a,b) [\\ & \left(\frac{\partial \beta^{.i}_{a}}{\partial \varepsilon_{kl}} \beta^{.j}_{b} \gamma^{a}_{.m} \gamma^{b}_{.n} \right. \\ & + \beta^{.i}_{a} \frac{\partial \beta^{.j}_{b}}{\partial \varepsilon_{kl}} \gamma^{a}_{.m} \gamma^{b}_{.n} \\ & + \beta^{.i}_{a} \beta^{.j}_{b} \frac{\partial \gamma^{a}_{.m}}{\partial \varepsilon_{kl}} \gamma^{b}_{.n} \\ & \left. + \; \beta^{.i}_{a} \beta^{.j}_{b} \gamma^{a}_{.m} \frac{\partial \gamma^{b}_{.n}}{\partial \varepsilon_{kl}} \right) \sigma^{mn}_{(ref)} \\ & + \left(\beta^{.i}_{a} \beta^{.j}_{b} \gamma^{a}_{.m} \gamma^{b}_{.n} \right) \; \frac{\partial \sigma^{mn}_{(ref)}}{\partial \varepsilon_{kl}}] \end{aligned} \tag{301}$$

L'opérateur tangent de la contrainte de référence est supposé connu. Les variations des coordonnées $\beta^{.i}_{a}$ et $\gamma^{a}_{.m}$ sont données par les expressions : (250) et (256) .

13.5 Opérateur tangent en degré de liberté (transport contravariant)

On part de la relation (**??**) :

$$\frac{\partial \sigma^{ab}}{\partial \varepsilon^{cd}} = H^{ab}_{..ab} \; \frac{\partial \sigma^{ab}_{(ref)}}{\partial \varepsilon^{cd}} = T^{ab}_{..cd}$$

qui s'exprime dans le repère transporté $\hat{\vec{O}}'_a$ et son dual.

Le repère n'étant pas fixe, il nous faut connaître sa variation par rapport aux repères de travail : $\hat{\vec{g}}_j$ et $\hat{\vec{g}}^j$ pour accéder à l'opérateur tangent dans le repère naturel.

Comme pour le cas précédent, on considère ici des coefficients matériels fixes où variants peu relativement aux degrés de liberté.

D'où la variation des composantes contravariantes du tenseur des contraintes dans le repère entraîné :

$$\frac{\partial \sigma^{ab}}{\partial ddl} = \frac{\partial \sigma^{ab}}{\partial \varepsilon^{cd}} \; \frac{\partial \varepsilon^{cg}}{\partial ddl} = T^{ab}_{..cd} \; \frac{\partial \varepsilon^{cg}}{\partial ddl} \tag{302}$$

et par définition nous avons dans le sens inverse, c'est-à-dire du repère d'anisotropie convecté vers la base de travail cf. 276 :

$$\hat{\vec{g}}_j = \beta'^{.b}_{j} \; \hat{\vec{O}}'_b \quad \text{et} \quad \hat{\vec{g}}^j = \gamma'^{j}_{.b} \; \hat{\vec{O}}'^b \tag{303}$$

dans cette transformation $[\beta^{.b}_{j}]^T$ joue le rôle de $[\gamma'^{j}_{.b}]$:

$$[\gamma'^{j}_{.b}] = [\beta^{.b}_{j}]^T \tag{304}$$

Nous avons :

$$\sigma^{ij} = \gamma'^{i}_{.a} \; \sigma^{ab} \; \gamma'^{j}_{.b} \tag{305}$$

d'où :

$$\frac{\partial \sigma^{ij}}{\partial ddl} = \frac{\partial \gamma'^{i}_{.a}}{\partial ddl} \; \sigma^{ab} \; \gamma'^{j}_{.b} + \gamma'^{i}_{.a} \; \frac{\partial \sigma^{ab}}{\partial ddl} \; \gamma'^{j}_{.b} + \gamma'^{i}_{.a} \; \sigma^{ab} \; \frac{\partial \gamma'^{j}_{.b}}{\partial ddl} \tag{306}$$

que l'on peut calculer à l'aide des relations (264, 302 et 283).

14 Loi Hypo-élastique initialement orthotrope, puis entraînée

14.1 Relations générales

La construction de la loi s'appuie sur des concepts déjà introduit :

— hypo-élasticité (cf. 5) qui consiste à calculer la variation de la contrainte à partir de la variation de la déformation. Numériquement cela conduit sur un pas de temps, à calculer une contrainte finale à partir de la contrainte initiale et de son accroissement fonction de $\mathbf{\Delta}\varepsilon$ sur le pas de temps.

— le transport de grandeurs tensorielles (cf. par exemple 6.3) : ici il s'agit du transport du tenseur contrainte calculé à t et devant être utilisé à $t + \Delta t$.

— l'anisotropie induite par un comportement initialement orthotrope dans un repère particulier, qui ensuite est entraîné par la matière (cf. 12)

La construction de la loi suit une méthodologie analogue à celle de la loi de "Hooke initialement orthotrope puis entraînée" cf. 9.

On s'intéresse tout d'abord à l'expression de la loi dans le repère d'anisotropie. Il s'agit ici de calculer l'incrément de contrainte sur un pas de temps Δt.

Supposons connu un repère d'orthotropie orthonormé nommé $\vec{O}'_a$ par la suite (a= 1..3). Dans ce repère les relations de comportement s'écrivent :

$$\begin{aligned}
\dot{\varepsilon}_{11} &= \frac{1}{E_1}(\dot{\sigma}_{11} - \nu_{12}\dot{\sigma}_{22} - \nu_{13}\dot{\sigma}_{33}) \\
\dot{\varepsilon}_{22} &= \frac{1}{E_2}(-\nu_{21}\dot{\sigma}_{11} + \dot{\sigma}_{22} - \nu_{23}\dot{\sigma}_{33}) \\
\dot{\varepsilon}_{33} &= \frac{1}{E_3}(-\nu_{31}\dot{\sigma}_{11} - \nu_{32}\dot{\sigma}_{22} + \dot{\sigma}_{33})
\end{aligned} \tag{307}$$

et

$$\dot{\varepsilon}_{ab} = \frac{1}{2.\ G_{ab}}\dot{\sigma}_{ab} \quad \text{avec} \quad a \neq b \tag{308}$$

En pratique, ces expressions seront utilisées sous forme incrémentale sur le pas de temps Δt :

$$\begin{aligned}
\Delta_t^{t+\Delta t}\varepsilon_{11} &= \frac{1}{E_1}(\Delta_t^{t+\Delta t}\sigma_{11} - \nu_{12}\Delta_t^{t+\Delta t}\sigma_{22} - \nu_{13}\Delta_t^{t+\Delta t}\sigma_{33}) \\
\Delta_t^{t+\Delta t}\varepsilon_{22} &= \frac{1}{E_2}(-\nu_{21}\Delta_t^{t+\Delta t}\sigma_{11} + \Delta_t^{t+\Delta t}\sigma_{22} - \nu_{23}\Delta_t^{t+\Delta t}\sigma_{33}) \\
\Delta_t^{t+\Delta t}\varepsilon_{33} &= \frac{1}{E_3}(-\nu_{31}\Delta_t^{t+\Delta t}\sigma_{11} - \nu_{32}\Delta_t^{t+\Delta t}\sigma_{22} + \Delta_t^{t+\Delta t}\sigma_{33})
\end{aligned} \tag{309}$$

et

$$\Delta_t^{t+\Delta t}\varepsilon_{ab} = \frac{1}{2.\ G_{ab}}\Delta_t^{t+\Delta t}\sigma_{ab} \quad \text{avec} \quad a \neq b \tag{310}$$

En inversant ses relations on obtient l'accroissement $\Delta_t^{t+\Delta t}\sigma_{ab}$ des composantes du tenseur des contraintes en fonction de l'accroissement des composantes du tenseur des

déformations. Toutes ces composantes sont exprimées dans le repère d'anisotropie. Par changement de base, les composantes $\Delta_t^{t+\Delta t}\sigma^{ij}$ de l'accroissement des contraintes sont alors exprimées dans le repère de travail $\hat{\vec{g}}_i$ et la contrainte finale s'obtient alors via :

$$\sigma^{ij}(t+\Delta t) = \Delta_t^{t+\Delta t}\sigma^{ij} + transport_t^{t+\Delta t}\sigma^{ij}(t) \tag{311}$$

Trois types de transport sont pris en compte dans Herezh++ : le transport deux fois covariant qui est cohérent avec la dérivée de Rivlin, le transport deux fois contravariants qui est cohérent avec la dérivée d'Oldroyd et le transport mixte qui est cohérent avec la dérivée de Jauman. On se reportera à 6.3 pour une présentation détaillée.

Remarques

— Les paramètres sont notés par analogie avec la loi de Hooke anisotrope. Néanmoins il faut noter qu'ils représentent ici un comportement tangent, contrairement au cas de la loi de Hooke où ils représentent un comportement sécant.

— Dans le cas où ces paramètres sont constants on obtient un comportement élastique réversible. Par contre lorsque ces paramètres varient, ce qui est un des intérêts d'une loi hypo-élastique, la réponse obtenue n'est a priori pas réversible. À l'aide de paramètres ainsi variables, il est possible de représenter des comportements très divers, la difficulté étant alors d'identifier correctement l'évolution de ces paramètres matériels.

— La variance des coordonnées n'a pas d'importance ici initialement, car le repère est orthonormé. Par contre, une fois déformée il faut tenir compte de l'évolution du repère.

Toujours par analogie avec la loi de Hooke anisotrope, on suppose que l'accroissement d'énergie de déformation sur un pas de temps, est convexe, ce qui conduit aux relations de symétrie :

$$\frac{-\nu_{12}}{E_1} = \frac{-\nu_{21}}{E_2}\ , \quad \frac{-\nu_{13}}{E_1} = \frac{-\nu_{31}}{E_3}\ , \quad \frac{-\nu_{23}}{E_2} = \frac{-\nu_{32}}{E_3} \tag{312}$$

Au final, le comportement dépend donc de 9 paramètres et d'un repère particulier d'orthotropie.

14.2 Transformations finies

Au cours de la transformation, on considère une évolution du repère initialement orthotrope.

Deux types de transport sont pris en compte (à ne pas confondre avec le transport des tenseurs). On se reportera à (12) pour la description détaillée.

Les expression 309 et 310 sont alors à utiliser dans le repère transporté $\hat{\vec{O}}'_a$.

14.3 Cas seulement déviatorique ou sphérique

Cf. 9.3

14.4 Compressibilité et variation de volume

On suit la même procédure que dans le cas d'un comportement de Hooke anisotrope entraîné : cf. 9.4.

14.5 Opérateur tangent en déformation (transport contravariant)

On part de l'expression 311 :

$$\sigma^{ij}(t+\Delta t) = \Delta_t^{t+\Delta t}\sigma^{ij} + transport_t^{t+\Delta t}\sigma^{ij}(t)$$

et on cherche à calculer l'opérateur tangent par rapport aux composantes de la déformation : $\frac{\partial \sigma^{ij}(t+\Delta t)}{\partial \varepsilon^{kl}}$, $\sigma^{ij}(t+\Delta t)$ étant les composantes dans la base naturelle $\hat{\vec{g}}_i$ et ε^{kl} étant les composantes dans la base duale $\hat{\vec{g}}^i$. Rappelons que dans Herezh++ la base naturelle est associée à un paramétrage matériel : celui des éléments finis de référence et que ces deux bases sont duales l'une de l'autre dans les opérations de produit scalaire. Il s'agit de bases curvilignes, a priori non normées, non orthogonales.

L'opérateur tangent nécessite le calcul de l'opérateur tangent correspondant à la partie transport des composantes $\sigma^{ij}(t)$ du tenseur des contraintes, calculées à l'incrément précédent. Cette partie est détaillée en 6.3, on s'y reportera pour les détails des calculs.

Il reste donc le calcul de $\frac{\partial \Delta_t^{t+\Delta t}\sigma^{ij}}{\partial \varepsilon^{kl}}$. Compte tenu de l'analogie que l'on a adoptée avec l'orthotropie élastique entraînée, on suit une procédure et des hypothèses analogues.

Tout d'abord on considère "sur un pas de temps", des coefficients matériels fixes où variants peu relativement aux déformations où aux degrés de liberté.

Les relations (307) et (308) donnent les variations du tenseur des contraintes dans le repère transporté. Comme il s'agit d'un transport contravariant du repère d'orthotropie, on exprime ces relations en coordonnées contravariantes.

$$\begin{aligned}
\Delta_t^{t+\Delta t}\varepsilon^{11} &= \frac{1}{E_1}(\Delta_t^{t+\Delta t}\sigma^{11} - \nu_{12}\Delta_t^{t+\Delta t}\sigma^{22} - \nu_{13}\Delta_t^{t+\Delta t}\sigma^{33}) \\
\Delta_t^{t+\Delta t}\varepsilon^{22} &= \frac{1}{E_2}(-\nu_{21}\Delta_t^{t+\Delta t}\sigma^{11} + \Delta_t^{t+\Delta t}\sigma^{22} - \nu_{23}\Delta_t^{t+\Delta t}\sigma^{33}) \\
\Delta_t^{t+\Delta t}\varepsilon^{33} &= \frac{1}{E_3}(-\nu_{31}\Delta_t^{t+\Delta t}\sigma^{11} - \nu_{32}\Delta_t^{t+\Delta t}\sigma^{22} + \Delta_t^{t+\Delta t}\sigma^{33})
\end{aligned} \tag{313}$$

et

$$\Delta_t^{t+\Delta t}\varepsilon^{ab} = \frac{1}{2.\ G_{ab}}\Delta_t^{t+\Delta t}\sigma^{ab} \quad \text{avec} \quad a \neq b \tag{314}$$

En inversant les relations, on obtient une relation linéaire à coefficients supposés constants :

$$\Delta_t^{t+\Delta t}\sigma^{ab} = H^{ab}_{..cd}\ \Delta_t^{t+\Delta t}\varepsilon^{cd} \tag{315}$$

ou encore :

$$\Delta_t^{t+\Delta t}\sigma^{ab} = H^{ab}_{..cd}\ \Delta_t^{t+\Delta t}\varepsilon^{cd} \tag{316}$$

qui s'exprime dans le repère transporté $\hat{\vec{O}}'_a$ et son dual.

Le repère n'étant pas fixe, il nous faut connaître sa variation par rapport aux repères de travail : $\hat{\vec{g}}_j$ et $\hat{\vec{g}}^j$ pour accéder à l'opérateur tangent dans le repère naturel. Les relations (250) donnent ces variations.

On peut alors suivre le même raisonnement qu'en (191) en remplaçant la contrainte par son accroissement. Par les formules de changement de base on a :

$$\Delta_t^{t+\Delta t}\sigma^{ij} = \gamma'^{i}_{.a}\ \Delta_t^{t+\Delta t}\sigma^{ab}\ \gamma'^{j}_{.b} \text{ ou bien } \Delta_t^{t+\Delta t}[\sigma^{ij}] = [\gamma'^{i}_{.a}]\ [\Delta_t^{t+\Delta t}\sigma^{ab}]\ [\gamma'^{j}_{.b}]^T$$

ou encore

$$\Delta_t^{t+\Delta t}[\sigma^{ij}] = [\beta^{.i}_{a}]^T\ [\Delta_t^{t+\Delta t}\sigma^{ab}]\ [\beta^{.j}_{b}] \tag{317}$$

d'où de manière analogue à la formule (228) :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Delta_t^{t+\Delta t}\sigma^{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}} &= \frac{\partial \gamma'^{i}_{.a}}{\partial \varepsilon_{kl}}\ \Delta_t^{t+\Delta t}\sigma^{ab}\ \gamma'^{j}_{.b} + \gamma'^{i}_{.a}\ \frac{\partial \Delta_t^{t+\Delta t}\sigma^{ab}}{\partial \varepsilon_{kl}}\ \gamma'^{j}_{.b} + \gamma'^{i}_{.a}\ \Delta_t^{t+\Delta t}\sigma^{ab}\ \frac{\partial \gamma'^{j}_{.b}}{\partial \varepsilon_{kl}} \\ &= \frac{\partial \beta^{.i}_{a}}{\partial \varepsilon_{kl}}\ \Delta_t^{t+\Delta t}\sigma^{ab}\ \beta^{.j}_{b} + \beta^{.i}_{a}\ \frac{\partial \Delta_t^{t+\Delta t}\sigma^{ab}}{\partial \varepsilon_{kl}}\ \beta^{.j}_{b} + \beta^{.i}_{a}\ \Delta_t^{t+\Delta t}\sigma^{ab}\ \frac{\partial \beta^{.j}_{b}}{\partial \varepsilon_{kl}}\end{aligned} \tag{318}$$

Dans cette expression, il nous faut déterminer la variation de $\Delta_t^{t+\Delta t}\sigma^{ab}$ (composantes dans la base convectée) par rapport aux composantes du tenseur de déformation dans la base $\hat{\vec{g}}^j$.

À l'aide de (316) on peut en déduire :

$$\frac{\partial \Delta_t^{t+\Delta t}\sigma^{ab}}{\partial \varepsilon_{kl}} = H^{ab}_{..cd}\ \frac{\partial \Delta_t^{t+\Delta t}\varepsilon^{cd}}{\partial \varepsilon_{kl}} \tag{319}$$

Reste à déterminer le terme $\frac{\partial \Delta_t^{t+\Delta t}\varepsilon^{cd}}{\partial \varepsilon_{kl}}$.

On applique la formule de changement de base (258) pour l'accroissement de déformation :

$$\Delta_t^{t+\Delta t}\varepsilon^{ab} = \gamma^{a}_{.n}\ \hat{g^{ni}}\ \Delta_t^{t+\Delta t}\varepsilon_{ij}\ \hat{g^{jm}}\ \gamma^{b}_{.m} = \gamma^{a}_{.n}\ \Delta_t^{t+\Delta t}\varepsilon^{nm}\ \gamma^{b}_{.m} \tag{320}$$

d'où en variation

$$\frac{\Delta_t^{t+\Delta t}\varepsilon^{ab}}{\partial \varepsilon_{kl}} = \frac{\partial \gamma^{a}_{.n}}{\partial \varepsilon_{kl}}\ \Delta_t^{t+\Delta t}\varepsilon^{nm}\ \gamma^{b}_{.m} + \gamma^{a}_{.n}\ \frac{\partial \Delta_t^{t+\Delta t}\varepsilon^{nm}}{\partial \varepsilon_{kl}}\ \gamma^{b}_{.m} + \gamma^{a}_{.n}\ \Delta_t^{t+\Delta t}\varepsilon^{nm}\ \frac{\partial \gamma^{b}_{.m}}{\partial \varepsilon_{kl}} \tag{321}$$

Dans cette expression, $\frac{\partial \gamma^{a}_{.n}}{\partial \varepsilon_{kl}}$ se calcule avec les relations (250) et (257). Reste le terme $\frac{\partial \Delta_t^{t+\Delta t}\varepsilon^{nm}}{\partial \varepsilon_{kl}}$. On a :

$$\frac{\partial \Delta_t^{t+\Delta t}\varepsilon^{nm}}{\partial \varepsilon_{kl}} = \frac{\partial \hat{g}^{ni}}{\partial \varepsilon_{kl}}\ \Delta_t^{t+\Delta t}\varepsilon_{ij}\ \hat{g}^{jm} + \hat{g}^{ni}\ \frac{\partial \Delta_t^{t+\Delta t}\varepsilon_{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}}\ \hat{g}^{jm} + \hat{g}^{ni}\ \Delta_t^{t+\Delta t}\varepsilon_{ij}\ \frac{\partial \hat{g}^{jm}}{\partial \varepsilon_{kl}}$$

Or nous avons la relation :

$$\frac{\partial \Delta_t^{t+\Delta t}\varepsilon_{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}} = \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}} = \delta^k_i\ \delta^l_j \tag{322}$$

d'où

$$\frac{\partial \Delta_t^{t+\Delta t}\varepsilon^{nm}}{\partial \varepsilon_{kl}} = \frac{\partial \hat{g^{ni}}}{\partial \varepsilon_{kl}}\ \Delta_t^{t+\Delta t}\varepsilon_{ij}\ \hat{g^{jm}} + \hat{g^{ni}}\ \delta_i^k\ \delta_j^l\ \hat{g^{jm}} + \hat{g^{ni}}\ \Delta_t^{t+\Delta t}\varepsilon_{ij}\ \frac{\partial \hat{g^{jm}}}{\partial \varepsilon_{kl}}$$
$$= \frac{\partial \hat{g^{ni}}}{\partial \varepsilon_{kl}}\ \Delta_t^{t+\Delta t}\varepsilon_{ij}\ \hat{g^{jm}} + \hat{g^{nk}}\ \hat{g^{lm}} + \hat{g^{ni}}\ \Delta_t^{t+\Delta t}\varepsilon_{ij}\ \frac{\partial \hat{g^{jm}}}{\partial \varepsilon_{kl}} \quad (323)$$

et en intégrant explicitement les variations de la métrique on obtient une formule semblable à (261) :

$$\frac{\partial \Delta_t^{t+\Delta t}\varepsilon^{nm}}{\partial \varepsilon_{kl}} = -2\ \left(\hat{g}^{nk}\ \Delta_t^{t+\Delta t}\varepsilon^{lm} + \Delta_t^{t+\Delta t}\varepsilon^{nk}\ \hat{g}^{ml}\right) + \hat{g^{nk}}\ \hat{g^{lm}} \quad (324)$$

ce qui finalise le calcul de l'opérateur tangent : $\frac{\partial \sigma^{ij}(t+\Delta t)}{\partial \varepsilon^{kl}}$, $\sigma^{ij}(t+\Delta t)$

14.6 Opérateur tangent en degré de liberté (transport contravariant)

Comme pour le cas précédent, on considère ici sur un pas de temps, des coefficients matériels fixes où variants peu relativement aux degrés de liberté.

On part de l'expression 311 :

$$\sigma^{ij}(t+\Delta t) = \Delta_t^{t+\Delta t}\sigma^{ij} + transport_t^{t+\Delta t}\sigma^{ij}(t)$$

et on cherche à calculer l'opérateur tangent par rapport aux composantes de la déformation : $\frac{\partial \sigma^{ij}(t+\Delta t)}{\partial ddl}$, $\sigma^{ij}(t+\Delta t)$ étant les composantes dans la base naturelle $\hat{\vec{g}}_i$ et ε^{kl} étant les composantes dans la base duale $\hat{\vec{g}}^i$.

L'opérateur tangent nécessite le calcul de l'opérateur tangent correspondant à la partie transport des composantes $\sigma^{ij}(t)$ du tenseur des contraintes, calculées à l'incrément précédent.

On peut noter :

$$\frac{\partial transport_t^{t+\Delta t}\sigma^{ij}(t)}{\partial ddl} = \frac{\partial transport_t^{t+\Delta t}\sigma^{ij}(t)}{\partial \varepsilon_{kl}}\ \frac{\partial \varepsilon_{kl}}{\partial ddl} \quad (325)$$

avec $\frac{\partial transport_t^{t+\Delta t}\sigma^{ij}(t)}{\partial \varepsilon_{kl}}$ détaillée en 6.3 .

Il reste donc le calcul de $\frac{\partial \Delta_t^{t+\Delta t}\sigma^{ij}}{\partial ddl}$. Ce terme peut également s'obtenir via un raisonnement analogue au calcul de l'opérateur tangent par rapport aux déformations. On aura au final successivement :

$$\frac{\partial \Delta_t^{t+\Delta t}\sigma^{ij}}{\partial ddl} = \frac{\partial \beta_a^{\cdot i}}{\partial ddl}\ \Delta_t^{t+\Delta t}\sigma^{ab}\ \beta_b^{\cdot j} + \beta_a^{\cdot i}\ \frac{\partial \Delta_t^{t+\Delta t}\sigma^{ab}}{\partial ddl}\ \beta_b^{\cdot j} + \beta_a^{\cdot i}\ \Delta_t^{t+\Delta t}\sigma^{ab}\ \frac{\partial \beta_b^{\cdot j}}{\partial ddl} \quad (326)$$

$$\frac{\partial \Delta_t^{t+\Delta t}\sigma^{ab}}{\partial ddl} = H_{..cd}^{ab}\ \frac{\partial \Delta_t^{t+\Delta t}\varepsilon^{cd}}{\partial ddl} \quad (327)$$

$$\frac{\Delta_t^{t+\Delta t}\varepsilon^{ab}}{\partial ddl} = \frac{\gamma^a_{.n}}{\partial ddl}\ \Delta_t^{t+\Delta t}\varepsilon^{nm}\ \gamma^b_{.m} + \gamma^a_{.n}\ \frac{\Delta_t^{t+\Delta t}\varepsilon^{nm}}{\partial ddl}\ \gamma^b_{.m} + \gamma^a_{.n}\ \Delta_t^{t+\Delta t}\varepsilon^{nm}\ \frac{\gamma^b_{.m}}{\partial ddl} \tag{328}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Delta_t^{t+\Delta t}\varepsilon^{nm}}{\partial ddl} &= \frac{\partial \hat{g}^{ni}}{\partial ddl}\ \Delta_t^{t+\Delta t}\varepsilon_{ij}\ \hat{g}^{jm} + \hat{g}^{ni}\ \frac{\partial \Delta_t^{t+\Delta t}\varepsilon_{ij}}{\partial ddl}\ \hat{g}^{jm} + \hat{g}^{ni}\ \Delta_t^{t+\Delta t}\varepsilon_{ij}\ \frac{\partial \hat{g}^{jm}}{\partial ddl} \\ &= \frac{\partial \hat{g}^{ni}}{\partial ddl}\ \Delta_t^{t+\Delta t}\varepsilon_{ij}\ \hat{g}^{jm} + \hat{g}^{ni}\ \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial ddl}\ \hat{g}^{jm} + \hat{g}^{ni}\ \Delta_t^{t+\Delta t}\varepsilon_{ij}\ \frac{\partial \hat{g}^{jm}}{\partial ddl}\end{aligned} \tag{329}$$

Les termes : $\frac{\partial \beta^{;i}_a}{\partial ddl}$ et $\frac{\gamma^a_{.n}}{\partial ddl}$ sont accessibles avec les relations (264) et (279)
Les termes : $\frac{\partial \varepsilon_{kl}}{\partial ddl}$ et $\frac{\partial \hat{g^{ni}}}{\partial ddl}$ sont accessibles par la cinématique.

14.7 Energies

Une loi de type hypo-élastique anisotrope telle que définie dans Herezh++ peut dans certain cas représenter un comportement élastique voir hyper-élastique. Mais dans un cas général où les coefficients matériaux évoluent, la loi peut représenter un comportement quelconque. Aussi, on ne peut pas, sauf cas particulier, établir une distinction entre les différents types d'énergies (ou puissances) associées à la loi (élastique, plastique, visqueux). Compte tenu de cette indétermination et de l'origine de loi, on considère dans Herezh++, arbitrairement l'énergie comme élastique.

Cinquième partie

Contraintes planes

15 Prise en compte de la variation de dimension transversale pour poutre, plaques et coques

15.1 Prise en compte de la variation d'épaisseur pour plaques et coques

Dans le cas d'étirement important de la surface médiane pour des éléments membranes plaques et coques, il est nécessaire de prendre en compte la variation d'épaisseur résultante. Nous allons tout d'abord étudier plusieurs possibilités théoriquement disponibles pour déterminer cette variation, puis la méthode implantée dans herezh++ est présentée.

On considère que l'on dispose du coefficient de compressibilité sécant "K_s" ou tangent "K_t" correspondant au module de compressibilité classique, d'où les relations possibles suivantes :

$$\frac{\boldsymbol{I}_\sigma}{3} = -P = K_s \, \frac{(vol - vol_0)}{vol} = K_s \times \text{variation relative de volume} \tag{330}$$

$$\frac{\dot{\boldsymbol{I}}_\sigma}{3} = -\dot{P} = K_t \, \frac{\dot{vol}}{vol} = K_s \times \text{taux de variation relative de volume} \tag{331}$$

Supposons que l'on cherche à utiliser la première relation et que l'on dispose du champ de contrainte obtenu à l'aide d'un comportement de contraintes planes. Nous avons : $vol = h \; . \; S$ avec h l'épaisseur et S la surface. Ces grandeurs sont disponibles par exemple à chaque point d'intégration. On peut donc également écrire :

$$\frac{(vol - vol_0)}{vol} = \frac{(h \, \sqrt{g} - h_0 \, \sqrt{g_0}}{h \, \sqrt{g}} \tag{332}$$

en remarquant que pour les plaques et coques $\sqrt{g}$ correspond au jacobien de surface, c'est-à-dire la surface élémentaire sur laquelle on effectue le calcul. d'où :

$$h = \frac{(h_0 \, \sqrt{g_0})}{\sqrt{g}} \left(\frac{3 \; K_s}{(3 \; K_s - \boldsymbol{I}_\sigma)} \right) = \frac{(h_0 \, \sqrt{g_0})}{\sqrt{g}} \left(\frac{K_s}{(K_s + P)} \right) \tag{333}$$

Cette formule permet également d'obtenir la sensibilité de l'épaisseur aux degrés de liberté (ddl) en supposant que le coefficient de compressibilité sécant soit constant.

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial ddl} &= -(h_0 \, \sqrt{g_0} \; 3 \; K_s) \left(\frac{1}{|g| \; (3 \; K_s - \boldsymbol{I}_\sigma)} \, \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial ddl} + \frac{-1}{\sqrt{g} \; (3 \; K_s - \boldsymbol{I}_\sigma)^2} \, \frac{\partial \boldsymbol{I}_\sigma}{\partial ddl} \right) \\ &= -(h_0 \, \sqrt{g_0} \; K_s) \left(\frac{1}{|g| \; (K_s + P)} \, \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial ddl} + \frac{1}{\sqrt{g} \; (K_s + P)^2} \, \frac{\partial P}{\partial ddl} \right) \end{aligned} \tag{334}$$

Dans le cas de beaucoup de matériaux métalliques, l'utilisation du module sécant que l'on peut considéré constant semble être une bonne approximation du comportement réel. Par contre pour des matériaux très compressibles (comparativement au cisaillement) cette hypothèse peut se révéler grossière.

Dans le cas d'une compressibilité non constante, il est préférable d'utiliser le module tangent, correspondant au module de compressibilité classique. En utilisant la seconde expression (331), on obtiendra une somme de type logarithmique, d'où au final :

$$\frac{\boldsymbol{I}_\sigma}{3} = -P = \int_0^t \frac{d\boldsymbol{I}_\sigma}{3} = \int_0^t K_t(t') \ \frac{dvol}{vol} \tag{335}$$

Dans le cas d'un module tangent constant, on aura :

$$\frac{\boldsymbol{I}_\sigma}{3} = -P = K_t \ \log\left(vol\right) \tag{336}$$

En considérant une discrétisation du temps en incrément discret Δt il est possible d'adopter une formule de récurrence permettant de calculer l'épaisseur finale en fonction de l'épaisseur en début d'incrément. En utilisant par exemple une forme d'Euler implicite : $-\dot{P}(t+\Delta t) \approx -\frac{P(t+\Delta t)-P(t)}{\Delta t}$ et $\dot{vol}(t+\Delta t) \approx \frac{vol(t+\Delta t)-vol(t)}{\Delta t}$, cela conduit à :

$$\begin{aligned} -P(t+\Delta t)+P(t) &= K_t \ \frac{(vol(t+\Delta t)-vol(t))}{vol(t+\Delta t)} = K_t \ \left(1. - \frac{h(t) \ S(t)}{h(t+\Delta t) \ S(t+\Delta t)}\right) \\ &= K_t \ \left(1. - \frac{h(t) \ \sqrt{g}(t)}{h(t+\Delta t) \ \sqrt{g}(t+\Delta t)}\right) \end{aligned} \tag{337}$$

ou encore :

$$h(t+\Delta t) = \frac{(h(t) \ \sqrt{g(t)})}{\sqrt{g(t+\Delta t)}} \left(\frac{K_t}{(K_t + (P(t+\Delta t) - P(t)))}\right) \tag{338}$$

Cette dernière formule est tout à fait analogue à la formule (333) en remplaçant le temps "0" par le temps "t" et en utilisant le module tangent, qui peut-être vu comme un module sécant local. Le calcul de variation conduit donc à une formule identique à (334)

$$\begin{aligned} \frac{\partial h(t+\Delta t)}{\partial ddl} &= -(h(t) \ \sqrt{g(t)} \ K_t) \left(\frac{1}{|g(t+\Delta t)| \ (K_t + P(t+\Delta t))} \ \frac{\partial \sqrt{g(t+\Delta t)}}{\partial ddl}\right. \\ &\left. - \frac{1}{\sqrt{g(t+\Delta t)} \ (K_t + P(t+\Delta t))^2} \ \frac{\partial P(t+\Delta t)}{\partial ddl}\right) \end{aligned} \tag{339}$$

La formule (338) a nécessité la discrétisation du taux de pression et du taux de variation de volume, elle est donc approchée, en particulier le résultat final dépend de la taille des pas de temps. Par contre elle permet d'être utilisable quelque soit l'ampleur de la variation de volume et en particulier si le module de compressibilité évolue au cours du chargement. De plus, en pratique les pas de temps utilisés sont en pratique faible ce qui atténue l'importance de la discrétisation en temps. Pour ces raisons, ce sont les expressions (338) et (339) qui sont utilisées dans Herezh++ pour tous les éléments membranes et coques.

Limitations numériques :

Au cours du calcul numérique, il est important de pouvoir limiter si possible les incohérences. Dans le cas du calcul de l'épaisseur, on doit obtenir une nouvelle épaisseur "positive". Cela conduit à une condition sur l'incrément de pression.

On doit avoir :

$$\frac{h(t)\ \sqrt{g}(t)}{h(t+\Delta t)\ \sqrt{g}(t+\Delta t)} > 0 \text{ d'où } 1. - \frac{-P(t+\Delta t)+P(t)}{K_t} > 0 \tag{340}$$

ou encore

$$-P(t+\Delta t)+P(t) < K_t \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{I}_\sigma(t+\Delta t) - \boldsymbol{I}_\sigma(t) < 3\ K_t \tag{341}$$

Habituellement, pour les matériaux solides, cette condition est largement satisfaite compte tenu du fait que le module K_t est d'un ordre de grandeur bien plus grand que celui de $\boldsymbol{I}_\sigma$.

15.2 Prise en compte de la variation de section pour des poutres

Dans le cas d'étirement important de la ligne médiane pour des éléments 1D (type biellette par exemple), il est nécessaire de prendre en compte la variation de section résultante. Le calcul suit une démarche très similaire au cas de la variation d'épaisseur du paragraphe précédent que l'on suppose lu. Les choix étant les mêmes pour l'implantation, on se contente de présenter les résultats.

On considère que l'on dispose du coefficient de compressibilité tangent "K_t" correspondant au module de compressibilité classique, d'où la relation.

$$\frac{\dot{\boldsymbol{I}}_\sigma}{3} = -\dot{P} = K_t\ \frac{\dot{vol}}{vol} = K_t \times \text{taux de variation relative de volume} \tag{342}$$

Nous avons : $vol = L\ .\ S$ avec "L" est la longueur de la ligne moyenne et S la surface. Ces grandeurs sont disponibles par exemple à chaque point d'intégration. Dans le cas des éléments 1D, $\sqrt{g}$ correspond au jacobien de surface, c'est-à-dire la longueur élémentaire sur laquelle on effectue le calcul.

Comme dans le cas de l'épaisseur, on utilise une méthode de mise à jour incrémental de la section. D'où en utilisant par exemple une forme d'Euler implicite : $-\dot{P}(t+\Delta t) \approx -\frac{P(t+\Delta t)-P(t)}{\Delta t}$ et $\dot{vol}(t+\Delta t) \approx \frac{vol(t+\Delta t)-vol(t)}{\Delta t}$, cela conduit à :

$$\begin{aligned} -P(t+\Delta t)+P(t) &= K_t\ \frac{(vol(t+\Delta t)-vol(t))}{vol(t+\Delta t)} = K_t\ \left(1. - \frac{L(t)\ S(t)}{L(t+\Delta t)\ S(t+\Delta t)}\right) \\ &= K_t\ \left(1. - \frac{S(t)\ \sqrt{g}(t)}{S(t+\Delta t)\ \sqrt{g}(t+\Delta t)}\right) \end{aligned} \tag{343}$$

ou encore :

$$\begin{aligned} S(t+\Delta t) &= \frac{(S(t)\ \sqrt{g(t)})}{\sqrt{g(t+\Delta t)}} \left(\frac{K_t}{(K_t + (P(t+\Delta t)-P(t)))}\right) \\ &= \frac{(S(t)\ \sqrt{g(t)})}{\sqrt{g(t+\Delta t)}} \left(\frac{3.K_t}{(3.K_t - \boldsymbol{I}_\sigma(t+\Delta t) + \boldsymbol{I}_\sigma(t))}\right) \end{aligned} \tag{344}$$

Cette formule permet également d'obtenir la sensibilité de la section aux degrés de liberté (ddl) en supposant que le coefficient de compressibilité soit constant.

$$\begin{aligned}\frac{\partial S}{\partial ddl} &= -(S_t\ \sqrt{g_t}\ 3\ K_t)\left(\frac{1}{|g|\ (3\ K_t - \boldsymbol{I}_\sigma)}\ \frac{\partial\sqrt{g}}{\partial ddl} + \frac{1}{\sqrt{g}\ (3\ K_s - \boldsymbol{I}_\sigma)^2}\ \frac{\partial \boldsymbol{I}_\sigma}{\partial ddl}\right) \\ &= -(S_t\ \sqrt{g_t}\ K_s)\left(\frac{1}{|g|\ (K_t + P)}\ \frac{\partial\sqrt{g}}{\partial ddl} + \frac{1}{\sqrt{g}\ (K_t + P)^2}\ \frac{\partial P}{\partial ddl}\right) \end{aligned} \tag{345}$$

avec pour simplifier la notation : $S = S(t + \Delta t)$ et $\sqrt{g} = \sqrt{g(t + \Delta t)}$

La formule (344) a nécessité la discrétisation du taux de pression et du taux de variation de volume, elle est donc approchée, en particulier le résultat final dépend de la taille des pas de temps. Par contre elle permet d'être utilisable quelque soit l'ampleur de la variation de volume et en particulier si le module de compressibilité évolue au cours du chargement. De plus, en pratique les pas de temps utilisés sont en pratique faible ce qui atténue l'importance de la discrétisation en temps.

15.3 Comparaison 3D contraintes planes

La figure (6) présente la comparaison entre 3D et contraintes planes pour une loi de Hooke. Il s'agit d'un essai de traction simple d'une barre soit modélisée avec un seul élément hexaédrique, soit un élément 1D avec des conditions de contraintes planes qui pilotent sa variation de section, avec des conditions de blocages isostatiques. Dans la plage d'étude, jusqu'à 10% environ ce qui constitue une plage a priori déjà très importante pour la loi de Hooke, on observe que dans le cas où la mesure de déformation utilisée est la mesure logarithmique, les réponses 1D et 3D sont identiques. Par contre avec la mesure d'Almansi on observe une légère différence $\approx 0.5\%$ due au fait que la trace du tenseur de déformation s'éloigne de la valeur de log(V) à mesure que l'intensité de la déformation augmente.

15.4 Calcul du module de compressibilité

L'accès à ce module est nécessaire pour la mise à jour des épaisseurs en contraintes planes, des sections pour d'éléments 1D, et également pour le calcul des pas de temps critiques dans le cas où celui-ci est déterminé à l'aide de la vitesse des ondes volumiques.

15.4.1 Cas des lois hyper-élastiques Favier et Orgeas

On part des deux relations suivantes

$$\frac{\boldsymbol{I}_\sigma}{3} = -P = K_s\ log(\frac{\sqrt{g}}{\sqrt{g_0}}) \tag{346}$$

$$\frac{\dot{\boldsymbol{I}}_\sigma}{3} = -\dot{P} = K_t\ \frac{\dot{\sqrt{g}}\ \sqrt{g_0}}{\sqrt{g}} \tag{347}$$

En fait on peut se poser la question du choix de la mesure de la déformation volumique. Une mesure du type $\frac{(vol - vol_0)}{vol}$ ou $\frac{(vol - vol_0)}{vol_0}$, est intéressante car simple, mais pose le pb

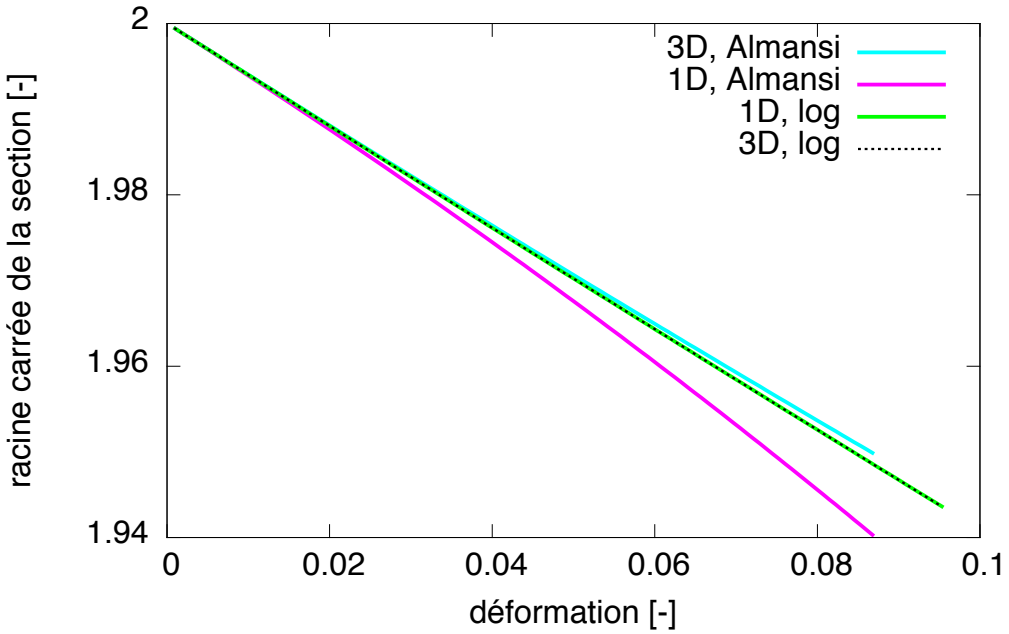

FIGURE 6 – Comparaison pour un essai de traction simple, sur la variation de la dimension transversale, entre 1D avec contraintes planes, et 3D

des grandes déformations pour lesquels on a une variation qui est très différente entre extension et compression. L'usage de la mesure log, conduit à balayer des valeurs de $-\infty$ à $+\infty$ ce qui qui donne une "certaine" symétrie à la mesure d'où une certaine commodité.

En appelant $V = vol/vol_0 = \sqrt{g}/\sqrt{g_0}$, le module de compressibilité correspond à :

$$K_s = \frac{V \frac{\partial w}{\partial V} + w}{ln(V)} \tag{348}$$

Le problème est qu'à l'origine, $ln(V)$ est nulle. Il faut donc éventuellement, recourir à une autre formule spécifique à l'origine s'il y a division par $ln(V)$.

Un premier cas de potentiel est donné par la formule suivante :

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \frac{K_{rev}}{6} \ln^2(V) \\ \frac{\partial \omega_1}{\partial V} &= \frac{K_{rev}}{3} \frac{\ln V}{V} \\ \frac{\partial^2 \omega_1}{\partial V^2} &= \frac{K_{rev}}{3} \frac{(1 - \ln V)}{V^2} \end{aligned} \tag{349}$$

ce qui conduit à la relation :

$$\begin{aligned} -p &= V\frac{\partial w}{\partial V} + w = \frac{K_{rev}\ ln(V)}{3}\left(\frac{\ln(V)}{2} + 1\right) \\ &\approx K_{rev}\ e = \frac{K_{rev}}{3}\ \boldsymbol{I}_\varepsilon \end{aligned} \tag{350}$$

D'une manière plus précise, le module de compressibilité sera dans ce cas :

$$K_s = \frac{K_{rev}}{3}\left(\frac{\ln(V)}{2}+1\right) \tag{351}$$

On voit qu'ici il n'y a pas de problème à l'origine !

Dans le cas où le module dépend de la température et d'une fonction quelconque, multiplicatrice de V, on a les nouvelles formules :

$$\begin{aligned}\omega_1 &= \frac{K_{rev}}{6}\ \ln^2(V)\times f(T)\times g(V)\\ \frac{\partial\omega_1}{\partial V} &= \frac{K_{rev}}{3}\ \frac{\ln V}{V}\times f(T)\times g(V)+\frac{K_{rev}}{6}\ \ln^2(V)\times f(T)\times\frac{\partial g(V)}{\partial V}\end{aligned} \tag{352}$$

d'où le calcul de la pression :

$$\begin{aligned}-p &= V\frac{\partial w}{\partial V}+w\\ &= \frac{K_{rev}}{3}\ \ln V\times f(T)\times g(V)+\frac{K_{rev}}{6}\ \ln^2(V)\times f(T)\times\frac{\partial g(V)}{\partial V}\\ &\quad +\frac{K_{rev}}{6}\ \ln^2(V)\times f(T)\times g(V)\end{aligned} \tag{353}$$

En divisant par $\ln V$ on obtient le module sécant :

$$\begin{aligned}K_s &= \frac{K_{rev}}{3}\ \times f(T)\times g(V)+\frac{K_{rev}}{6}\ \ln(V)\times f(T)\times\frac{\partial g(V)}{\partial V}\\ &\quad +\frac{K_{rev}}{6}\ \ln(V)\times f(T)\times g(V)\end{aligned} \tag{354}$$

15.4.2 Cas de la loi isoélastique ISO_ELAS_ESPO1D

Dans cette loi, la contrainte est calculée selon : $\sigma = E(\varepsilon)\varepsilon = f(|\varepsilon|)E\varepsilon$ avec "f" une fonction quelconque. Les modules de compressibilité et de cisaillement sont déterminés à l'aide de formules analogues au cas de l'élasticité linéaire de Hooke :

$$K=\frac{f(|\varepsilon|)E\varepsilon}{3(1-2\ \nu)}\ \text{ et } G=\frac{f(|\varepsilon|)E\varepsilon}{2(1+\nu)} \tag{355}$$

15.4.3 Cas de la loi isoélastique ISO_ELAS_SE1D

Dans cette loi, la contrainte est calculée selon : $\sigma = f(\epsilon)$ avec "f" une fonction quelconque. Les modules de compressibilité et de cisaillement sont déterminés à l'aide de formules analogues au cas de l'élasticité linéaire de Hooke :

$$K=\frac{E\varepsilon}{3(1-2\ \nu)}\ \text{ et } G=\frac{E\varepsilon}{2(1+\nu)} \tag{356}$$

avec un calcul de E qui dépends de cas particulier.

Lorsque $|\varepsilon| > e$, "e" étant un nombre petit (1.E-10), on adopte :

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon} \tag{357}$$

Sinon lorsque $|\varepsilon| < e$ on utilise une petite déformation par défaut :

$$E = \frac{f(e \times signe(\varepsilon))}{e \times signe(\varepsilon)} \tag{358}$$

16 Lois de contraintes planes

Ce type de loi est particulièrement adapté aux membranes, plaques et coques. On considère que la direction normale à la surface est 3. Ainsi la condition s'énonce sous la forme d'une contrainte mathématique : $\sigma^{33} = 0$. On considère également que la direction 3 est normée, la variance selon la direction 3 est donc sans importance d'où la condition finale :

$$\sigma^{33} = \sigma_{33} = \sigma_3^{.3} = \sigma_{.3}^3 = 0 \tag{359}$$

La membrane (plaque ou coque) est décrite via une interpolation dans le plan de la membrane. Les déformations naturellement disponibles via la cinématique, sont donc les déformations dans ce plan que l'on notera $\varepsilon_{\alpha\beta}$ avec α, β= 1, 2 . L'épaisseur constitue une inconnue supplémentaire du problème. Cette épaisseur est reliée avec la déformation ε_{33} de telle manière à satisfaire la relation 359 via par exemple $\sigma^{33}(\varepsilon_{33}) = 0$.

16.1 Méthode par perturbation (explicite)

L'idée de cette première méthode considérée est relativement triviale. Par exemple pour un pas de temps "t" à "$(t + \Delta t)$" la méthode est la suivante :

1. Calcul de la contrainte à $t + \Delta t$ à l'aide de la loi de comportement : $\sigma^{\alpha\beta} = f(\varepsilon_{\gamma\eta}(t + \Delta t), \varepsilon_{33}(t))$
2. Comme on doit avoir $\sigma_3^3 = 0$, calcul de la trace prise en compte pour le calcul d'équilibre à savoir : σ_α^α,
3. Calcul de la variation de volume via la compressibilité en utilisant la relation 336, d'où la variation d'épaisseur qui est sensée correspondre à la condition de contrainte plane.
4. Mise à jour de l'épaisseur $h(t + \Delta t)$ et de la déformation d'épaisseur : $\varepsilon_{33}(t + \Delta t)$
5. Calcul de l'équilibre en utilisant les $\sigma^{\alpha\beta}(t+\Delta t)$ précédemment calculées et la nouvelle épaisseur $h(t + \Delta t)$.

16.2 Méthode de Newton (implicite)

L'idée est ici d'intégrer de manière implicite l'équation non linéaire correspondant à la condition de contrainte plane. L'algorithme est alors itératif, mais dans la pratique la convergence observée est très rapide : 1 à 2 itérations en moyenne.

L'équation $\sigma^{33}(\varepsilon_{33}) = 0$ est résolue par une méthode de Newton.

1. Initialisation du processus avec les déformations dans le plan $\varepsilon_{\gamma\eta}(t+\Delta t)$ qui sont constantes pendant les itérations et $\varepsilon_{33}^{(1)}(t+\Delta t) = \varepsilon_{33}(t)$, n=1
2. faire tant que $||\sigma^{33}(t+\Delta t)|| >$ une précision donnée
   (a) Calcul de $\sigma^{ij(n)}$ et de $\frac{\partial \sigma^{ij(n)}}{\partial \varepsilon_{kl}}$
   (b) Calcul de $\delta\varepsilon_{33} = -\left[\frac{\partial \sigma^{33(n)}}{\partial \varepsilon_{33}}\right]^{-1} \sigma^{33(n)}$
   (c) $\varepsilon_{33(n+1)} = \delta\varepsilon_{33} + \varepsilon_{33(n)}$ et n=n+1
   (d) Mise à jour de l'épaisseur.

   À la fin du processus, après convergence, on dispose :
   — d'un champ de contraintes 3D qui satisfait la condition de contrainte plane
   — de la déformation d'épaisseur et de l'épaisseur correspondante.
3. On calcule le nouvel opérateur tangent par rapport aux déformations planes puis par rapport aux ddl, qui intègre la condition de contrainte plane (voir le paragraphe suivant).

16.3 Opérateur tangent final

Une fois la condition de contrainte plane (2D CP) satisfaite on peut donc écrire :

$$\frac{\partial \sigma^{33}}{\partial \varepsilon_{kl}}(2D\ CP) = \frac{\partial \sigma^{33}}{\partial \varepsilon_{kl}}(3D) + \frac{\partial \sigma^{33}}{\partial \varepsilon_{33}}(3D)\ \frac{\partial \varepsilon_{33}}{\partial \varepsilon_{kl}} \tag{360}$$

Avec (3D) qui est associé au comportement 3D.
Comme la contrainte σ^{33} doit toujours être nulle :

$$0 = \frac{\partial \sigma^{33}}{\partial \varepsilon_{\gamma\eta}}(3D) + \frac{\partial \sigma^{33}}{\partial \varepsilon_{33}}(3D)\ \frac{\partial \varepsilon_{33}}{\partial \varepsilon_{\gamma\eta}} \text{ d'où } \frac{\partial \varepsilon_{33}}{\partial \varepsilon_{\gamma\eta}} = -\left[\frac{\partial \sigma^{33}}{\partial \varepsilon_{33}}(3D)\right]^{-1}\ \frac{\partial \sigma^{33}}{\partial \varepsilon_{\gamma\eta}}(3D) \tag{361}$$

L'opérateur tangent final par rapport aux déformations planes peut alors être calculé.

$$\frac{\partial \sigma^{\alpha\beta}}{\partial \varepsilon_{\gamma\eta}}(2D\ CP) = \frac{\partial \sigma^{\alpha\beta}}{\partial \varepsilon_{\gamma\eta}}(3D) + \frac{\partial \sigma^{\alpha\beta}}{\partial \varepsilon_{33}}(3D)\ \frac{\partial \varepsilon_{33}}{\partial \varepsilon_{\gamma\eta}} \tag{362}$$

On en déduit également l'opérateur par rapport aux ddl.

$$\frac{\partial \sigma^{\alpha\beta}}{\partial ddl}(2D\ CP) = \frac{\partial \sigma^{\alpha\beta}}{\partial \varepsilon_{\gamma\eta}}(2D\ CP)\ \frac{\partial \varepsilon_{\gamma\eta}}{\partial ddl} \tag{363}$$

17 Lois de contraintes doublement planes

17.1 Cas où le repère de travail est celui de la condition

Le repère de travail étant $\vec{g}_i$ pour i=1 à 3, il s'agit ici de conditions suivant l'axe 2 et 3 c'est-à-dire : $\sigma^{22} = 0$ et $\sigma^{33} = 0$.

Ce type de loi est particulièrement adapté aux barres et poutres. On considère que les directions normales à la ligne de référence sont 2 et 3 c'est-à-dire qu'en particulier : $\vec{g}_1.\vec{g}_2 = \vec{g}_1.\vec{g}_3 = 0$.

Ainsi la condition s'énonce sous la forme d'une contrainte mathématique : $\sigma^{22} = 0$ et $\sigma^{33} = 0$.

On considère également que les directions 2 et 3 sont normées, la variance selon les directions 2 et 3 sont donc sans importance d'où la condition finale :

$$\sigma^{22} = \sigma_{22} = \sigma_2^{\cdot 2} = \sigma_{\cdot 2}^2 = 0 \quad \text{et} \quad \sigma^{33} = \sigma_{33} = \sigma_3^{\cdot 3} = \sigma_{\cdot 3}^3 = 0 \tag{364}$$

La barre ou poutre est décrite via une interpolation suivant la ligne de référence. Les déformations naturellement disponibles via la cinématique, sont donc la déformation le long de cette ligne que l'on notera ε_{11}. La largeur et l'épaisseur (directions 2 et 3) constituent deux inconnues supplémentaires du problème. Ces grandeurs sont reliées avec les déformations ε_{22} et ε_{33} de telle manière à satisfaire la relation 364 via par exemple $\sigma^{22} = 0$ et $\sigma^{33} = 0$.

Globalement, la technique de résolution suit la même méthodologie que pour les contraintes planes. En particulier on retrouve les mêmes algorithmes avec une implémentation très similaire.

17.2 Cas où le repère de travail est différent de celui de la condition

Le repère de travail étant $\hat{\vec{g}}_i$ pour i=1 à 3 dans la configuration finale, on considère une condition de contrainte doublement plane dans une direction particulière $\vec{V}_1$. De plus on considère connue un repère orthonormé { M, $\vec{V}_j$} j = 1 à 3, qui contient en particulier la direction $\vec{V}_1$. Le repère étant orthonormée on a : $\vec{V}_j = \vec{V}^j$ et on note les composantes dans le repère de travail :

$$\vec{V}^j = V^j_{\cdot i}\ \hat{\vec{g}}^i = V^{ji}\ \hat{\vec{g}}_i = \vec{V}_j = V_{ji}\ \hat{\vec{g}}^i = V_j^{\cdot i}\ \hat{\vec{g}}_i \tag{365}$$

Remarque Bien noter que seul le second indice indique dans quel base locale les vecteurs $\vec{V}$ sont exprimés, par contre le premier indice peut-être en haut ou en bas sans que cela ne change le résultat.

La base $\vec{V}_j$ est donc une base propre pour le tenseur des contraintes.

On notera également les relations inverses :

$$\begin{aligned} \hat{\vec{g}}^i &= \gamma^i_{\cdot e}\ \vec{V}^e \quad \text{et} \quad \hat{\vec{g}}_i = \beta_i^{\cdot e}\ \vec{V}_e \\ \gamma^i_{\cdot e} &= \hat{\vec{g}}^i.\vec{V}_e \quad \text{et} \quad \beta_i^{\cdot e} = \hat{\vec{g}}_i.\vec{V}^e \end{aligned} \tag{366}$$

D'où :

$$\hat{\vec{g}}^i = \gamma^i_{\cdot e}\ \vec{V}^e = \gamma^i_{\cdot e}\ V^e_{\cdot k}\ \hat{\vec{g}}^k = \delta^i_{\cdot k}\ \hat{\vec{g}}^k \tag{367}$$

ou encore :

$$\gamma^i_{\cdot e} = \hat{\vec{g}}^i.\vec{V}^e = \hat{\vec{g}}^i\ .\ \hat{\vec{g}}_k\ V_e^{\cdot k} = V_e^{\cdot i} \text{ c'est à dire } \left[\gamma^i_{\cdot e}\right] = \left[V_e^{\cdot i}\right]^T \tag{368}$$

$$\left[\gamma^{i}{}_{.e}\right]\ \left[V^{e}{}_{.k}\right] = \left[\delta^{i}{}_{.k}\right] \quad \Longrightarrow \quad \left[V^{e}{}_{.k}\right] = \left[\gamma^{i}{}_{.e}\right]^{-1} \tag{369}$$

On a également :

$$\vec{V}^{j}.\vec{V}_{i} = \delta^{j}{}_{.i} = V^{j}_{.l}\ \hat{\vec{g}}^{\,l}.V_{i}{}^{.k}\ \hat{\vec{g}}_{k} = V^{j}_{.l}\ V_{i}{}^{.k}\ \delta^{l}{}_{.k} = V^{j}_{.l}\ V_{i}{}^{.l} \tag{370}$$

c'est-à-dire

$$\left[\delta^{j}{}_{.i}\right] = \left[V^{j}_{.l}\right]\ \left[V_{i}{}^{.l}\right] \quad \Longrightarrow \quad \left[V_{i}{}^{.l}\right]^{T} = \left[V^{j}_{.l}\right]^{-1} = \left[\gamma^{i}{}_{.e}\right] \tag{371}$$

Sachant que l'on a aussi : $[\gamma^{i}{}_{.e}] = [\beta_{i}{}^{.e}]^{-1T}$ on en déduit que $\left[V^{j}_{.l}\right] = [\beta_{i}{}^{.e}]^{T}$

Une autre relation qui nous sera également utile :

$$\vec{V}_{j} = V_{ji}\ \hat{\vec{g}}^{i} = V_{ji}\ \gamma^{i}{}_{.e}\ \vec{V}^{e} \text{ d'où } \vec{V}_{j}.\vec{V}^{e} = \delta^{e}_{j} = V_{ji}\ \gamma^{i}{}_{.e} \tag{372}$$

ou encore :

$$[V_{ji}]^{-1} = \left[\gamma^{i}{}_{.e}\right] \quad \text{et} \quad [V_{ji}] = \left[V^{j}{}_{.i}\right] \tag{373}$$

Le fait d'avoir une condition de traction simple suivant la direction $\vec{V}_1$ peut s'écrire sous la forme de :

$$(\boldsymbol{\sigma}.\vec{V}_{2}) = \vec{0} \ \text{ et } \ (\boldsymbol{\sigma}.\vec{V}_{3}) = \vec{0} \tag{374}$$

En appelant σ'^{ij} les coordonnées du tenseur dans la base orthonormée, $\vec{V}_j$ la condition de traction simple revient aux conditions scalaires :

$$\sigma'^{21} = \sigma'^{22} = \sigma'^{23} = 0 \ \text{ et } \ \sigma'^{31} = \sigma'^{32} = \sigma'^{33} = 0 \tag{375}$$

Compte tenu de la double condition identique, $\sigma'^{32} = \sigma'^{23} = 0$ cela donne en réalité 5 conditions indépendantes.

Dans la base naturelle, ces équations scalaires peuvent s'écrire :

$$\sigma^{ij}\ V_{2j} = 0 \ \text{ et } \ \sigma^{ij}\ V_{3j} = 0 \quad i = 1..3 \tag{376}$$

D'autre part on considère que le tenseur des déformations associées comporte une seule grandeur connue : la déformation dans la direction $\vec{V}^1$ qu'on appellera ϵ'_{11}, le reste des composantes constitue les inconnues de la condition de traction simple.

On a donc comme déformation :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\epsilon} &= \epsilon'_{11}\vec{V}^{1}\otimes\vec{V}^{1} + \epsilon'_{ij}\vec{V}^{i}\otimes\vec{V}^{j} \quad (i,j)\neq(1,1) \\ &= \epsilon'_{11}\ V^{1}_{.k}\ V^{1}_{.l}\hat{\vec{g}}^{k}\otimes\hat{\vec{g}}^{l} + \epsilon'_{ij}\ V^{i}_{.k}\ V^{j}_{.l}\hat{\vec{g}}^{k}\otimes\hat{\vec{g}}^{l} \quad (i,j)\neq(1,1) \end{aligned} \tag{377}$$

Ou encore :

$$\epsilon_{kl} = \epsilon'_{11}\ V^{1}_{.k}\ V^{1}_{.l} + \epsilon'_{ij}\ V^{i}_{.k}\ V^{j}_{.l} \quad (i,j)\neq(1,1) \tag{378}$$

Il en est de même pour l'incrément et la vitesse de déformation. Par exemple pour la vitesse on considère que seule la vitesse dans la direction $\vec{V}^1$ que l'on appellera D'_{11} est connue et on a :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{D} &= D'_{11}\vec{V}^1\otimes\vec{V}^1 + D'_{ij}\vec{V}^i\otimes\vec{V}^j \quad (i,j)\neq(1,1)\\ &= D'_{11}\ V^1_{.k}\ V^1_{.l}\hat{\vec{g}}^k\otimes\hat{\vec{g}}^l + D'_{ij}\ V^i_{.k}\ V^j_{.l}\hat{\vec{g}}^k\otimes\hat{\vec{g}}^l \quad (i,j)\neq(1,1)\end{aligned} \tag{379}$$

Pour l'incrément de déformation :

$$\begin{aligned}\Delta_t^{t+\Delta t}\boldsymbol{\epsilon} &= \Delta_t^{t+\Delta t}\epsilon'_{11}\vec{V}^1\otimes\vec{V}^1 + \Delta_t^{t+\Delta t}\epsilon'_{ij}\vec{V}^i\otimes\vec{V}^j \quad (i,j)\neq(1,1)\\ &= \Delta_t^{t+\Delta t}\epsilon'_{11}\ V^1_{.k}\ V^1_{.l}\hat{\vec{g}}^k\otimes\hat{\vec{g}}^l + \Delta_t^{t+\Delta t}\epsilon'_{ij}\ V^i_{.k}\ V^j_{.l}\hat{\vec{g}}^k\otimes\hat{\vec{g}}^l \quad (i,j)\neq(1,1)\end{aligned} \tag{380}$$

L'état de contrainte finale dépend de l'ensemble de ces grandeurs : déformation, incrément de déformation, vitesse de déformation ce qui conduit théoriquement à 15 inconnues scalaires. On va chercher à diminuer ce nombre d'inconnues.

Tout d'abord on cherche à utiliser la relation classique dans la base matérielle de travail $\hat{\vec{g}}^i$ sur un incrément de temps Δt :

$$D_{ij} \approx \frac{\Delta_t^{t+\Delta t}\epsilon_{ij}}{\Delta t} \tag{381}$$

Lorsque Δt tend vers 0, le fait d'utiliser une mesure de déformation d'Almansi conduit effectivement à la bonne valeur de la vitesse de déformation, on peut donc raisonnablement retenir cette approximation lorsque le pas de temps est petit. Cependant cette relation n'est correcte que si les bases naturelles et duales sont associées aux composantes du tenseur métrique, utilisées pour calculer les composantes du tenseur d'Almansi. Il s'agit donc ici d'un tenseur métrique associé à une base matérielle.

En effet rappelons quelques relations utiles. Soit θ^i le paramétrage matériel associé à la base naturelle $\vec{g}_i$, on a :

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\hat{g}_{ij} - g_{ij}\right) \quad \text{et} \quad \hat{g}_{ij} = \hat{\vec{g}}_i.\hat{\vec{g}}_j \quad \text{avec} \quad \hat{\vec{g}}_i = \frac{\partial\hat{\vec{M}}}{\partial\theta^i} \tag{382}$$

d'où

$$\begin{aligned}\dot{\epsilon_{ij}} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\hat{\vec{M}}}{\partial\theta^i\partial t}.\hat{\vec{g}}_j + \hat{\vec{g}}_i.\frac{\partial^2\hat{\vec{M}}}{\partial\theta^j\partial t}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\vec{V}}{\partial\theta^i}.\hat{\vec{g}}_j + \hat{\vec{g}}_i.\frac{\partial\vec{V}}{\partial\theta^j}\right)\\ &\quad \text{c'est-à-dire}\\ \dot{\epsilon_{ij}} &= \frac{1}{2}\left(V_{i|j} + V_{j|i}\right) = D_{ij}\end{aligned} \tag{383}$$

La dérivée temporelle classique des composantes covariantes de la déformation d'Almansi est naturellement égale aux composantes covariantes de la vitesse de déformation. Ceci justifie l'approximation de la relation (381) pour un incrément de temps supposé petit.

Remarque : cette approximation n'est pas valable pour la mesure de déformation logarithmique !

De manière cohérente on écrit également dans la base matérielle de travail $\hat{\vec{g}}^i$:

$$\epsilon_{ij}(t+\Delta t) = \epsilon_{ij}(t) + \Delta_t^{t+\Delta t}\epsilon_{ij} \tag{384}$$

Cela revient à faire un transport deux fois covariants de t à $t+\Delta t$ pour les composantes de déformation en cohérence avec d'une part la déformation d'Almansi et d'autre part la vitesse de déformation exprimée dans la base matérielle de travail $\hat{\vec{g}}^i$.

Au final il reste théoriquement 5 inconnues scalaires potentielles $\epsilon'_{ij} \quad (i,j) \neq (1,1)$ exprimées dans la base $\vec{V}^i \otimes \vec{V}^j$.

En résumé la condition de contraintes planes double (ou traction simple) dans la direction particulière $\vec{V}^1$ revient à 5 équations scalaires dépendantes de 5 inconnues scalaires.

$$\sigma^{ij}(\epsilon'_{kl})\ V_{2j} = 0 \quad i = 1..3 \text{ et } \quad \sigma^{ij}(\epsilon'_{kl})\ V_{3j} = 0 \quad i = 1 \text{ et } 3, \quad (k,l) \neq (1,1) \tag{385}$$

17.2.1 Cas particulier où $\vec{V}_3$ est normal aux vecteurs $\vec{g}_\alpha$

Dans la pratique, un cas particulier à considérer, est celui où une direction connue, appelée $\vec{V}_3$, reste normale aux vecteurs $\vec{g}_\alpha$ en toute circonstance.

On en déduit :

$$\epsilon'_{23} = \epsilon'_{13} = \Delta_t^{t+\Delta t}\epsilon'_{23} = \Delta_t^{t+\Delta t}\epsilon'_{13} = 0 \tag{386}$$

Le nombre d'inconnues se réduit à 3 dans ce cas. Au niveau des équations scalaires de la loi de comportement, les conditions associées $\sigma'^{23} = 0$ et $\sigma'^{13} = 0$ ne sont pas prises en compte ce qui conduit à partir de (375) au système réduit final suivant :

$$\sigma'^{21}(\epsilon'_{ij}) = \sigma'^{22}(\epsilon'_{ij}) = 0 \quad \text{et} \quad \sigma'^{33}(\epsilon'_{ij}) = 0 \tag{387}$$

qui dépendent de 3 inconnues : ϵ'_{ij} avec (ij) = (22), (33), (12)

17.3 Méthode par perturbation (explicite, le repère de travail est celui de la condition)

Comme pour la méthode de contrainte plane, l'idée de cette première méthode considérée est relativement triviale. Par exemple pour un pas de temps "t" à "$(t+\Delta t)$" la méthode est la suivante :

1. Calcul de la contrainte à $t+\Delta t$ à l'aide de la loi de comportement : $\sigma^{11} = f(\varepsilon_{11}(t+\Delta t), \varepsilon_{22}(t), \varepsilon_{33}(t))$
2. Comme on doit avoir $\sigma_2^2 = 0$ et $\sigma_3^3 = 0$, calcul de la trace prise en compte pour le calcul d'équilibre à savoir : σ_1^1,
3. Calcul de la variation de volume via la compressibilité en utilisant la relation 336, d'où la variation d'épaisseur et de largeur qui sont censée correspondre aux conditions $\sigma_2^2 = 0$ et $\sigma_3^3 = 0$. Pour un matériau isotrope, les deux variations relatives de dimensions sont supposées égales.

4. Mise à jour de l'épaisseur $h(t+\Delta t)$, de la déformation d'épaisseur : $\varepsilon_{33}(t+\Delta t)$, de la largeur $b(t+\Delta t)$, de la déformation de largeur : $\varepsilon_{22}(t+\Delta t)$. Pour un matériau isotrope, les deux déformations sont supposées égales.
5. Calcul de l'équilibre en utilisant $\sigma^{11}(t+\Delta t)$ précédemment calculées et des nouvelles épaisseur $h(t+\Delta t)$ et largeur $b(t+\Delta t)$.

17.4 Méthode par perturbation (explicite, le repère de travail est différent de celui de la condition)

On reprend la méthodologie utilisée dans le cas où le repère de travail est celui de la condition :

1. Calcul des composantes de la déformation à $t+\Delta t$ qui va être utilisée pour l'application de la loi de comportement dans le repère de travail. Pour cela on considère la déformation à $(t+\Delta t)$ dans la direction $\vec{V_1}$, qui est celle que l'on peut déduire directement de la cinématique.

$$\epsilon'_{11}(t+\Delta t) = \epsilon_{kl}(t+\Delta t)\ \gamma^{k}_{.1}\ \gamma^{l}_{.1} \tag{388}$$

   Les autres déformations ne sont pas connues à $(t+\Delta t)$, on retient pour le calcul des contraintes, les déformations à t $\epsilon'_{rt}(t)$ avec (r,t) $\neq$ (1,1). On en déduit un jeu de composantes initiales $\epsilon"_{kl}$ pour la déformation dans le repère de travail :

$$\begin{aligned} \epsilon"_{kl} &= \epsilon'_{11}(t+\Delta t)\ V^{1}_{.k}\ V^{1}_{.l} + \epsilon'_{rt}(t)\ V^{r}_{.k}\ V^{t}_{.l} \\ &\quad \text{avec (r,t)} \neq (1,1) \\ &= \epsilon_{kl}(t+\Delta t)\ \gamma^{k}_{.1}\ \gamma^{l}_{.1}\ V^{1}_{.k}\ V^{1}_{.l} + \epsilon'_{rt}(t)\ V^{r}_{.k}\ V^{t}_{.l} \end{aligned} \tag{389}$$

2. Calcul de la contrainte à $t+\Delta t$ à l'aide de la loi de comportement. Pour cela on utilise les déformations $\epsilon"_{kl}$

$$\sigma^{ij}(t+\Delta t) \approx \sigma^{ij}(\epsilon"_{kl}) \tag{390}$$

3. En fait seule la contrainte $\sigma'^{11}(t+\Delta t)$ devrait-être non nulle. Les autres correspondent aux composantes des efforts de cohésion dans les directions $\vec{V_l}$ l=2,3 (cf. 376), qui doivent être nulles dans un état de contrainte doublement plane. De plus la base $\vec{V_l}$ l=1,2,3 étant considérée orthonormée, la valeur scalaire de $\sigma'^{11}(t+\Delta t)$ correspond donc à la trace du tenseur des contraintes lorsque l'on ne tient pas compte des efforts de cohésion latéraux qui devraient-être nuls.

$$trace\,(\boldsymbol{\sigma}(t+\Delta t)) = I_{\boldsymbol{\sigma}} = \sigma'^{11}(t+\Delta t) \approx \sigma^{ij}(\epsilon"_{kl})\ \beta_i{}^{.1}\ \beta_j{}^{.1} \tag{391}$$

   Dans le cas d'un calcul incrémental, il est sans doute plus judicieux de retenir également la forme incrémentale de l'équation :

$$\begin{aligned} \Delta trace(\boldsymbol{\sigma}) &= \Delta I_{\boldsymbol{\sigma}} \\ &= \boldsymbol{I}_{\sigma}(t+\Delta t) - \boldsymbol{I}_{\sigma}(t) \\ &= \sigma'^{11}(t+\Delta t) - trace\,(\boldsymbol{\sigma}(t)) \\ &\approx \sigma^{ij}(\epsilon"_{kl})\ \beta_i{}^{.1}\ \beta_j{}^{.1} - trace\,(\boldsymbol{\sigma}(t)) \end{aligned} \tag{392}$$

4. La relation incrémentale (343) est utilisée pour obtenir la variation de volume via la compressibilité puis la variation de section via (344). On fait alors l'hypothèse qu'entre t et $t + \Delta t$ les déformations d'épaisseur (c'est-à-dire dans la direction $\vec{V}_3$) et de largeur (c'est-à-dire dans la direction $\vec{V}_2$) sont identiques. En retenant une déformation de type logarithmique on aurait ainsi : $\ln(\hat{h}/h) = \ln(\hat{l}/l)$ ou encore $\hat{h}/h = \hat{l}/l$ et $\hat{S}/S \approx \left(\hat{h}/h\right)^2$

   On en déduit l'évolution incrémentale de l'épaisseur en utilisant la formule (344) :

$$\hat{h} = h(t + \Delta t) \approx h(t) \sqrt{\frac{(\sqrt{g(t)})}{\sqrt{g(t + \Delta t)}} \left(\frac{3.K_t}{(3.K_t - \boldsymbol{I}_\sigma(t + \Delta t) + \boldsymbol{I}_\sigma(t))} \right)} \tag{393}$$

5. Au final, en sortie de la loi de comportement, on ne retient pour la valeur du tenseur des contraintes, que la composante non nulle σ'^{11} d'où dans le repère de travail :

$$\sigma^{ij} = \sigma'^{11} \; V_1{}^{.i} \; V_1{}^{.j} \tag{394}$$

   ceci avec une largeur et épaisseur mise à jour : $\hat{l} = l(t + \Delta t) = l \; \frac{h(t+\Delta t)}{h(t)}$

17.5 Méthode de Newton (le repère de travail est celui de la condition)

L'idée est ici d'intégrer de manière implicite l'équation non linéaire correspondant à la condition de contrainte doublement plane. L'algorithme est alors itératif, mais dans la pratique la convergence observée est très rapide : 1 à 2 itérations en moyenne.

L'équation $< \sigma^{22}, \sigma^{33} > (\varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}) =< 0, 0 >$ est résolue par une méthode de Newton.

1. Initialisation du processus avec la déformation suivant la ligne médiane $\varepsilon_{11}(t + \Delta t)$ qui est constante pendant les itérations et $< \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33} >^{(1)} (t + \Delta t) =< \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33} > (t)$, n=1
2. faire tant que $|| < \sigma^{22}, \sigma^{33} > (t + \Delta t)|| >$ une précision donnée
   (a) Calcul de $\sigma^{ij(n)}$ et de $\frac{\partial \sigma^{ij(n)}}{\partial \varepsilon_{kl}}$ via la loi de comportement , pour i,j,k,l = 1,2,3
   (b) Calcul de $(\delta\varepsilon_{ef}) = -\left[\frac{\partial \sigma^{gh(n)}}{\partial \varepsilon_{ef}}\right]^{-1} (\sigma^{gh})(n)$ pour e,f,g,h = 2 et 3
   (c) $\varepsilon_{ef}(n + 1) = \delta\varepsilon_{ef} + \varepsilon_{ef}(n)$ et n=n+1, pour e,f = 2 et 3,
   (d) Mise à jour de l'épaisseur et de la largeur.

   À la fin du processus, après convergence, on dispose :
   — d'un champ de contraintes 3D qui satisfait la condition de double contrainte plane
   — de la déformation d'épaisseur et de l'épaisseur correspondante, ainsi que la déformation de largeur et de la largeur correspondante.
3. On calcule le nouvel opérateur tangent par rapport à la déformation dans la direction médiane puis par rapport aux ddl, qui intègre les conditions de contraintes doublement plane (voir le paragraphe 17.7).

17.6 Méthode de Newton (repère de travail différent de celui de la condition)

Comme dans le cas précédent "en repère de condition", on cherche à intégrer de manière implicite les équations non linéaires correspondantes aux conditions de contraintes doublement planes c'est-à-dire (385).

Il s'agit d'un système de 5 équations scalaires et la méthode de Newton s'appuie sur l'utilisation d'un opérateur tangent du comportement non linéaire (a priori) de ses équations. Les 5 inconnues scalaires sont ϵ'_{kl} avec k,l = 1,3 et $(k,l) \neq (1,1)$

L'élément principal de la méthode est donc de calculer cet opérateur tangent qui de manière générique peut s'écrire sous la forme de :

$$\frac{\partial \left(\sigma^{ij}(\epsilon'_{kl})\ V_{mj}\right)}{\partial \epsilon'_{rs}} \quad \text{avec i=1,2,3 ; m=2,3 ; (k,l) et (r,s)} \ \neq (1,1) \tag{395}$$

La loi repose sur l'utilisation d'une loi interne 3D dont on connait l'opérateur tangent général $\frac{\partial \sigma^{ij}}{\partial \varepsilon_{op}}$ avec o,p = 1..3

Compte tenu de la relation (377) on peut alors écrire :

$$\begin{aligned} \epsilon_{kl} &= \epsilon'_{11}\ V^1_{.k}\ V^1_{.l} + \epsilon'_{tq}\ V^t_{.k}\ V^q_{.l} \quad (t,q) \neq (1,1) \\ &\text{et} \\ \frac{\partial \left(\sigma^{ij}(\epsilon'_{kl})\ V_{mj}\right)}{\partial \epsilon'_{rs}} &= V_{mj}\ \frac{\partial \sigma^{ij}(\epsilon_{kl})}{\partial \epsilon_{op}}\ \frac{\partial \epsilon_{op}}{\partial \epsilon'_{rs}} = V_{mj}\ \frac{\partial \sigma^{ij}(\epsilon_{kl})}{\partial \epsilon_{op}}\ V^r_{.o}\ V^s_{.p} \end{aligned} \tag{396}$$

À partir de ces grandeurs, on peut établir les étapes de la résolution de Newton.

1. Initialisation du processus avec la déformation suivant la ligne médiane $\epsilon'_{11}(t+\Delta t)$ qui est constante pendant les itérations et on doit également définir les valeurs initiales des 5 composantes de déformations inconnues :
   $\epsilon'^{(1)}_{kl}(t+\Delta t) = \epsilon'_{kl}(t) \quad (k,l) \neq (1,1)$, n=1
2. faire tant que $|| \left(\sigma^{ij}(\epsilon'_{kl})\ V_{mj}\right)(t+\Delta t)|| >$ une précision donnée
   avec i=1,2,3 ; m=2,3 ; sachant que deux cas sont identiques : (i,m)=(2,3) et (i,m)=(3,2)
   Calculer :
   (a) la déformation :
   $\epsilon^{(n)}_{kl} = \epsilon^{(n)}_{kl}(t+\Delta t) = \epsilon'_{11}\ V^1_{.k}\ V^1_{.l} + \epsilon'^{(n)}_{tq}(t+\Delta t)\ V^t_{.k}\ V^q_{.l} \quad (t,q) \neq (1,1)$
   (b) l'incrément de déformation : $\Delta^{t+\Delta t}_t \epsilon^{(n)}_{kl} = \epsilon^{(n)}_{kl} - \epsilon_{kl}(t)$
   (c) la vitesse de déformation : $D^{(n)}_{kl} = \frac{\Delta^{t+\Delta t}_t \epsilon^{(n)}_{kl}}{\Delta t}$
   (d) via la loi 3D :
   $\left(\sigma^{ij(n)}\right) = \sigma^{ij(n)}\left(\epsilon^{(n)}_{kl}, \Delta^{t+\Delta t}_t \epsilon^{(n)}_{kl}, D^{(n)}_{kl}\right)$ et $\left[\frac{\partial \sigma^{ij}}{\partial \varepsilon_{op}}\right]^{(n)} = \left[\frac{\partial \sigma^{ij}}{\partial \varepsilon_{op}}\ \left(\epsilon^{(n)}_{kl}, \Delta^{t+\Delta t}_t \epsilon^{(n)}_{kl}, D^{(n)}_{kl}\right)\right]$
   avec i,j,o,p = 1..3
   (e) le vecteur résidu et l'opérateur tangent :
   $\left(R^i{}_m\right) = \left(\sigma^{ij(n)}\ V_{mj}\right)$ et $\left[\frac{\partial R^i{}_m}{\partial \epsilon'_{rs}}\right] = \left[V_{mj}\ \frac{\partial \sigma^{ij(n)}}{\partial \epsilon_{op}}\ V^r_{.o}\ V^s_{.p}\right]$
   avec (r,s) $\neq$ (1,1)

(f) $(\delta\varepsilon'_{rs}) = -\left[\frac{\partial R^i{}_m}{\partial \epsilon'_{rs}}\right]^{-1} (R^i{}_m)$ avec (r,s) $\neq$ (1,1)

(g) $\epsilon'^{(n+1)}_{rs} = \delta\varepsilon'_{rs} + \epsilon'^{(n)}_{rs}$ et n=n+1, pour r,s = 1,2 et 3 et (r,s) $\neq$ (1,1)

(h) mise à jour de l'épaisseur et de la largeur à l'aide de la déformation dans la direction de l'épaisseur et de la largeur.

À la fin du processus, après convergence, on dispose :
— des contraintes 3D qui satisfont la condition de double contrainte plane
— des déformations (appelées déformations mécaniques) qui ont permis de calculer ces contraintes,
— de la déformation d'épaisseur et de l'épaisseur correspondante, ainsi que la déformation de largeur et de la largeur correspondante.

3. On calcule le nouvel opérateur tangent par rapport à la déformation dans la direction médiane puis par rapport aux ddl, qui intègre les conditions de contraintes doublement plane (voir le paragraphe 17.8).

17.6.1 Cas particulier où $\vec{V}_3$ est normal aux vecteurs $\vec{g}_\alpha$

Il s'agit d'un cas particulier du cas précédent pour lequel il reste 3 inconnues scalaires : ϵ'_{gh} avec (g,h) = (2,2) ; (3,3) ; et (1,2) et les 3 équations associées que l'on cherche à résoudre sont : $\sigma'^{kl} = 0$ avec (k,l)= (2,2) ; (3,3) ; et (1,2) c'est-à-dire :

$$\begin{aligned}
\vec{V}_2.\boldsymbol{\sigma}.\vec{V}_2 &= V_{2i}\ \sigma^{ij}\ V_{2j} = (\vec{V}_2 \otimes \vec{V}_2) : \boldsymbol{\sigma} = (\vec{V}_2 \otimes \vec{V}_2)..\boldsymbol{\sigma} = 0 \\
\vec{V}_3.\boldsymbol{\sigma}.\vec{V}_3 &= V_{3i}\ \sigma^{ij}\ V_{3j} = (\vec{V}_3 \otimes \vec{V}_3) : \boldsymbol{\sigma} = (\vec{V}_3 \otimes \vec{V}_3)..\boldsymbol{\sigma} = 0 \\
\vec{V}_1.\boldsymbol{\sigma}.\vec{V}_2 &= V_{1i}\ \sigma^{ij}\ V_{2j} = (\vec{V}_1 \otimes \vec{V}_2) : \boldsymbol{\sigma} = (\vec{V}_2 \otimes \vec{V}_1)..\boldsymbol{\sigma} = 0
\end{aligned} \tag{397}$$

En reprenant le cadre général, on en déduit l'opérateur tangent :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\,(V_{mi}\ \sigma^{ij}\ V_{nj})}{\partial \epsilon'_{gh}} &= V_{mi}\ \left(\frac{\partial \sigma^{ij}}{\partial \epsilon'_{gh}}(3D)\right)\ V_{nj} \\
&= \left(V_{mi}\ \frac{\partial \sigma^{ij}}{\partial \epsilon_{op}}\ \frac{\partial \epsilon_{op}}{\partial \epsilon'_{gh}}(3D)\ \ V_{nj}\right) \\
&= V_{mi}\ V_{nj}\ \frac{\partial \sigma^{ij}}{\partial \epsilon_{op}}\ V^g_{.o}\ V^h_{.p}
\end{aligned} \tag{398}$$

pour (m,n) et (g,h) = (2,2) ; (3,3) ; et (1,2)

Cela revient à ne pas considérer les cisaillements σ'^{31} et $\sigma'^{32} = \sigma'^{23}$ qui, compte tenu du tenseur de déformation et d'incrément de déformation, doivent toujours être nulles.

Les étapes de la méthode de Newton sont identiques au cas précédent, en tenant compte de ce nombre réduit d'équations et d'opérateurs tangents.

17.7 Opérateur tangent final pour un repère de travail identique à celui de la condition

Une fois la condition de contrainte doublement plane (1D CP) satisfaite on peut donc écrire :

$$\frac{\partial \sigma^{ef}}{\partial \varepsilon_{kl}}(1D\ CP) = \frac{\partial \sigma^{ef}}{\partial \varepsilon_{kl}}(3D) + \frac{\partial \sigma^{ef}}{\partial \varepsilon_{gh}}(3D)\ \frac{\partial \varepsilon_{gh}}{\partial \varepsilon_{kl}} \tag{399}$$

Avec (3D) qui est associé au comportement 3D, et e,f = 2 et 3.

Comme les contraintes σ^{ef} doivent toujours être nulles :

$$0 = \frac{\partial \sigma^{ef}}{\partial \varepsilon_{11}}(3D) + \frac{\partial \sigma^{ef}}{\partial \varepsilon_{gh}}(3D)\ \frac{\partial \varepsilon_{gh}}{\partial \varepsilon_{11}}\ \text{d'où}\ \frac{\partial \varepsilon_{gh}}{\partial \varepsilon_{11}} = -\left[\frac{\partial \sigma^{ef}}{\partial \varepsilon_{gh}}(3D)\right]^{-1}\ \frac{\partial \sigma^{ef}}{\partial \varepsilon_{11}}(3D) \tag{400}$$

L'opérateur tangent final par rapport à la déformation suivant la direction médiane peut alors être calculé.

$$\frac{\partial \sigma^{11}}{\partial \varepsilon_{11}}(1D\ CP) = \frac{\partial \sigma^{11}}{\partial \varepsilon_{11}}(3D) + \frac{\partial \sigma^{11}}{\partial \varepsilon_{gh}}(3D)\ \frac{\partial \varepsilon_{gh}}{\partial \varepsilon_{11}} \tag{401}$$

On en déduit également l'opérateur par rapport aux ddl.

$$\frac{\partial \sigma^{11}}{\partial ddl}(1D\ CP) = \frac{\partial \sigma^{11}}{\partial \varepsilon_{11}}(1D\ CP)\ \frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial ddl} \tag{402}$$

17.8 Opérateur tangent final pour un repère de travail différent de celui de la condition

Les conditions de contrainte doublement plane (1D CP) correspondent à : $\sigma^{ij}\ V_{mj} = 0$ i=1..3 et m = 2 et 3, c'est-à-dire la nullité des efforts de cohésion dans les directions $\vec{V}_m$, m=2 et 3.

Relativement à la cinématique, la contrainte ne dépend en fait que de ϵ'_{11}. Les autres déformations ϵ'_{ij} sont issues du comportement local qui dépend uniquement de ϵ'_{11} via la loi de comportement et les conditions (1D CP). On cherche donc la sensibilité des déformations ϵ'_{kl} , (k,l) $\neq$ (1,1), par rapport à ϵ'_{11}.

On peut écrire dans le repère de travail :

$$\sigma^{ij}(\epsilon'_{11})\ V_{mj} = 0\ \ \text{i=1..3 et m = 2 et 3} \neq (1,1) \tag{403}$$

Cette relation devant être toujours vérifiée, ces variations sont nulles :

$$\frac{\sigma^{ij}(\epsilon'_{11})\ V_{mj}}{\partial \epsilon'_{11}} = 0\ \ \text{i=1..3 et m = 2 et 3} \neq (1,1) \tag{404}$$

C'est-à-dire :

$$0 = V_{mj}\ \frac{\partial \sigma^{ij}(\epsilon'_{11})}{\partial \epsilon'_{11}}(1D\ CP) = V_{mj}\ \left(\frac{\partial \sigma^{ij}}{\partial \epsilon'_{11}}(3D) + \frac{\partial \sigma^{ij}}{\partial \epsilon'_{gh}}(3D)\ \frac{\partial \epsilon'_{gh}}{\partial \epsilon'_{11}}\right) \tag{405}$$

Avec (3D) qui est associé au comportement 3D, et (g,h) $\neq$ (1,1).

D'où :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \epsilon'_{gh}}{\partial \epsilon'_{11}} &= -\left[V_{mj}\ \frac{\partial \sigma^{ij}}{\partial \epsilon'_{gh}}(3D)\right]^{-1}\left(V_{mk}\ \frac{\partial \sigma^{ik}}{\partial \epsilon'_{11}}(3D)\right) \\
&= -\left[V_{mj}\ \frac{\partial \sigma^{ij}}{\partial \epsilon_{op}}(3D)\ \frac{\partial \epsilon_{op}}{\partial \epsilon'_{gh}}\right]^{-1}\left(V_{mk}\ \frac{\partial \sigma^{ik}}{\partial \epsilon_{o'p'}}(3D)\ \frac{\partial \epsilon_{o'p'}}{\partial \epsilon'_{11}}\right) \\
&= -\left[V_{mj}\ \frac{\partial \sigma^{ij}}{\partial \epsilon_{op}}(3D)\ \ V^{g}_{.o}\ V^{h}_{.p}\right]^{-1}\left(V_{mk}\ \frac{\partial \sigma^{ik}}{\partial \epsilon_{o'p'}}(3D)\ \ V^{1}_{.o'}\ V^{1}_{.p'}\right) \qquad (406)
\end{aligned}$$

Ici on ne fait pas de somme sur m, la relation doit-être vérifiée pour m= 2 et 3.

La seule grandeur non nulle étant $\sigma'^{11} = V_{1i}\ \sigma^{ij}\ V_{1j}$ qui dépend uniquement de la déformation cinématique ϵ'_{11}, on en déduit que les seules composantes non nulles de l'opérateur tangent relativement aux déformations cinématiques, sont $\frac{\partial(V_{1i}\ \sigma^{ij}\ V_{1j})}{\partial \epsilon'_{11}}$ d'où :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(V_{1i}\ \sigma^{ij}\ V_{1j})}{\partial \epsilon'_{11}}(1D\ CP) &= \frac{\partial \sigma'^{11}}{\partial \epsilon'_{11}}(1D\ CP) \\
&= \frac{\partial(V_{1i}\ \sigma^{ij}\ V_{1j})}{\partial \epsilon'_{11}}(3D) + \frac{\partial(V_{1i}\ \sigma^{ij}\ V_{1j})}{\partial \epsilon'_{gh}}(3D)\ \frac{\partial \epsilon'_{gh}}{\partial \epsilon'_{11}} \\
&= \frac{\partial(V_{1i}\ \sigma^{ij}\ V_{1j})}{\partial \epsilon_{op}}(3D)\ \frac{\partial \epsilon_{op}}{\partial \epsilon'_{11}} + \frac{\partial(V_{1i}\ \sigma^{ij}\ V_{1j})}{\partial \epsilon_{op}}\ \frac{\partial \epsilon_{op}}{\partial \epsilon'_{gh}}(3D)\ \frac{\partial \epsilon'_{gh}}{\partial \epsilon'_{11}} \\
&= V_{1i}\ V_{1j}\ \frac{\partial(\sigma^{ij})}{\partial \epsilon_{op}}(3D)\quad V^{1}_{.o}\ V^{1}_{.p} \\
&\quad + V_{1i}\ V_{1j}\ \frac{\partial(\sigma^{ij})}{\partial \epsilon_{op}}(3D)\quad V^{g}_{.o}\ V^{h}_{.p}\ \frac{\partial \epsilon'_{gh}}{\partial \epsilon'_{11}} \qquad (407)
\end{aligned}$$

où $\frac{\partial \epsilon'_{gh}}{\partial \epsilon'_{11}}$ est calculée avec (406)

Lorsque l'on considère une variation des contraintes dans le repère de travail, on a :

$$\begin{aligned}
\Delta\sigma^{ij} &= \Delta\sigma'^{11}\ V_1{}^{.i}\ V_1{}^{.j} \\
&\approx V_1{}^{.i}\ V_1{}^{.j}\ \frac{\partial \sigma'^{11}}{\partial \epsilon'_{11}}(1D\ CP)\ \Delta\epsilon'_{11} \\
&\approx V_1{}^{.i}\ V_1{}^{.j}\ \frac{\partial \sigma'^{11}}{\partial \epsilon'_{11}}(1D\ CP)\ \gamma^{k}_{.1}\ \gamma^{l}_{.1}\Delta\epsilon_{kl} \qquad (408)
\end{aligned}$$

Remarque : dans tous ces développements on ne prend pas en compte la variation des vecteurs $\vec{V}^e$ par rapport aux ddl ou encore aux déformations, les composantes $V_e{}^{.i}$ et $\gamma^{i}_{.e}$ sont donc constantes par rapport aux déformations.

L'opérateur tangent peut donc s'écrire à partir de (408) :

$$\frac{\partial \sigma^{ij}}{\partial \epsilon_{kl}} \approx V_1{}^{.i}\ V_1{}^{.j}\ \frac{\partial \sigma'^{11}}{\partial \epsilon'_{11}}(1D\ CP)\ \gamma^{k}_{.1}\ \gamma^{l}_{.1} \qquad (409)$$

dans laquelle $\frac{\partial \sigma'^{11}}{\partial \epsilon'_{11}}(1D\ CP)$ est calculée à l'aide de (407)

En résumé, l'opérateur tangent peut se calculer à partir des expressions (406, 407,409).

17.8.1 Cas particulier où $\vec{V}_3$ est normal aux vecteurs $\vec{g}_\alpha$

Dans ce cas on retient les 3 inconnues ϵ'_{gh} avec (g,h) = (2,2) ; (3,3) ; et (1,2) et les 3 équations associées sont : $\sigma'^{kl} = 0$ avec (k,l)= (2,2) ; (3,3) ; et (1,2) c'est-à-dire :

$$\begin{aligned}
\vec{V}_2.\boldsymbol{\sigma}.\vec{V}_2 &= V_{2i}\ \sigma^{ij}\ V_{2j} = (\vec{V}_2 \otimes \vec{V}_2) : \boldsymbol{\sigma} = 0 \\
\vec{V}_3.\boldsymbol{\sigma}.\vec{V}_3 &= V_{3i}\ \sigma^{ij}\ V_{3j} = (\vec{V}_3 \otimes \vec{V}_3) : \boldsymbol{\sigma} = 0 \\
\vec{V}_1.\boldsymbol{\sigma}.\vec{V}_2 &= V_{1i}\ \sigma^{ij}\ V_{2j} = (\vec{V}_1 \otimes \vec{V}_2) : \boldsymbol{\sigma} = 0
\end{aligned} \tag{410}$$

En reprenant le cadre général, ces relations devant toujours être vérifiées, on en déduit :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\left(V_{mi}\ \sigma^{ij}\ V_{nj}\right)}{\partial {\epsilon'}_{11}} &= 0 \\
&= V_{mi}\ \left(\frac{\partial \sigma^{ij}}{\partial {\epsilon'}_{11}}(3D) + \frac{\partial \sigma^{ij}}{\partial {\epsilon'}_{gh}}(3D)\ \frac{\partial {\epsilon'}_{gh}}{\partial {\epsilon'}_{11}}\right)\ V_{nj} \\
&= \left(V_{mi}\ \frac{\partial \sigma^{ij}}{\partial {\epsilon'}_{11}}(3D)\ \ V_{nj}\right) + \left[V_{mk}\ \frac{\partial \sigma^{kl}}{\partial {\epsilon'}_{gh}}(3D)\ \ V_{nl}\right]\ \left(\frac{\partial {\epsilon'}_{gh}}{\partial {\epsilon'}_{11}}\right)
\end{aligned} \tag{411}$$

pour (m,n) et (g,h) = (2,2) ; (3,3) ; et (1,2) ou encore :

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial {\epsilon'}_{gh}}{\partial {\epsilon'}_{11}}\right) &= -\left[V_{mi}\ \frac{\partial \sigma^{ij}}{\partial {\epsilon'}_{gh}}(3D)\ \ V_{nj}\right]^{-1}\ \left(V_{mk}\ \frac{\partial \sigma^{kl}}{\partial {\epsilon'}_{11}}(3D)\ \ V_{nl}\right) \\
&= -\left[V_{mi}\ \frac{\partial \sigma^{ij}}{\partial \epsilon_{op}}(3D)\ \ V^{g}_{\ .o}\ V^{h}_{\ .p}\ \ V_{nj}\right]^{-1}\ \left(V_{mk}\ \frac{\partial \sigma^{kl}}{\partial \epsilon_{o'p'}}(3D)\ \ V^{1}_{\ .o'}\ V^{1}_{\ .p'}\ \ V_{nl}\right)
\end{aligned} \tag{412}$$

Remarques Il ne s'agit que des coordonnées covariantes des vecteurs $\vec{V}$ car seule le second indice indique la variance.

Ensuite avec $\sigma'^{11} = (\vec{V}_1 \otimes \vec{V}_1) : \boldsymbol{\sigma} = V_{1i}\ \sigma^{ij}\ V_{1j}$ on a :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \sigma'^{11}}{\partial {\epsilon'}_{11}}(1D\ CP) &= \frac{\partial\left(V_{1i}\ \sigma^{ij}\ V_{1j}\right)}{\partial {\epsilon'}_{11}}(1D\ CP) \\
&= V_{1i}\ \left(\frac{\partial \sigma^{ij}}{\partial {\epsilon'}_{11}}(3D) + \frac{\partial \sigma^{ij}}{\partial {\epsilon'}_{gh}}(3D)\ \frac{\partial {\epsilon'}_{gh}}{\partial {\epsilon'}_{11}}\right)\ V_{1j} \\
&= \left(V_{1i}\ \frac{\partial \sigma^{ij}}{\partial {\epsilon'}_{11}}(3D)\ \ V_{1j}\right) + \left[V_{1k}\ \frac{\partial \sigma^{kl}}{\partial {\epsilon'}_{gh}}(3D)\ \ V_{1l}\right]\ \left(\frac{\partial {\epsilon'}_{gh}}{\partial {\epsilon'}_{11}}\right)
\end{aligned} \tag{413}$$

Sixième partie

Umat

18 Définition d'une loi interface de type Umat

19 Objectifs

L'objectif de l'interface est double :

1. permettre à l'utilisateur de définir une loi externe à Herezh++, codée dans le langage qui lui convient
2. permettre à Herezh++ de servir de loi externe, soit pour un autre processus Herezh fonctionnant en parallèle, soit pour un autre programme externe : dans notre cas, le fonctionnement a été testé avec le logiciel Abaqus. L'objectif est de permettre au programme externe d'accéder à toutes les lois d'Herezh, sans avoir à modifier l'interfaçage.

La communication entre Herezh et Herezh ou un autre programme externe s'effectue via 2 pipes nommés. L'écriture est sans attente par contre la lecture s'effectue avec attente, c'est-à-dire que tant que la lecture n'est pas complète, le programme ne poursuit pas son exécution. Ainsi, ce type de communication, outre le fait qu'il est très rapide car s'effectuant uniquement en mémoire centrale, permet de synchroniser les deux processus.

On se référera à [Rio et al., 2008] et à [RIO, 2017] pour plus d'information sur le fonctionnement d'ensemble en particulier au niveau informatique.

Cependant on notera les éléments suivants :

— à chaque échange d'information via un pipe nommé, le programme émetteur sérialise toutes les informations sous d'un unique tableau de caractères, puis le programme récepteur, dé-sérialise les informations avant de les utiliser. La structuration des données de chaque coté du pipe peuvent ainsi être totalement différentes : par exemple de simples scalaires ou tableaux de scalaires d'un coté, et des grandeurs typées sous forme d'objets de l'autre coté du pipe,
— les données de chaque processus sont ainsi parfaitement encapsulées,
— les variables internes manipulées par Herezh qui mémorisent l'histoire du matériau, reste stockées dans Herezh, ce qui en permet une gestion souple et dynamique (ex : allocation dynamique),
— les variables de passages sont strictement uniquement celle d'une Umat classique préconisée par le logiciel Abaqus.

On s'intéresse maintenant aux aspects mécaniques théoriques liés au fonctionnement de la loi Umat.

20 Prise en compte de la loi de comportement exprimée dans un repère orthonormé

Au sein du programme Herezh++, les lois de comportement sont formulées en coordonnées matérielles entraînées. Elle utilisent les bases naturelles et duales associées à ce paramètrage matérielle, pour l'expression des composantes des diverses grandeurs : contraintes, déformations, vitesse de déformation...

Les informations provenant de l'Umat, que l'on nommera "conteneur Umat", sont supposées être exprimées dans le repère corotationnel associé à la déformation. Ce repère $\left\{M, \vec{T}_a\right\}$ représente une approximation du repère en rotation logarithmique. Il est orthonormé et différent du repère absolue $\vec{I}_a$ de travail. On a ainsi : $\vec{T}_a = \vec{T}^a$, la variance n'a pas d'importance.

Le conteneur Umat fourni :

— les coordonnées des tenseurs : $\boldsymbol{\sigma}(t) = \sigma^{ij}(t)\ \vec{T}_i \otimes \vec{T}_j$, $\boldsymbol{\epsilon}(t+\Delta t) = \epsilon_{ij}(t+\Delta t)\ \vec{T}^i \otimes \vec{T}^j$ et $\Delta\boldsymbol{\epsilon}(t+\Delta t) = \Delta\epsilon_{ij}(t+\Delta t)\ \vec{T}^i \otimes \vec{T}^j$

Septième partie

Lois critère

21 Prise en compte de critère sur une loi de comportement

21.1 Introduction contexte, objectif et choix pour l'implantation de critère

On entend par critère, un comportement nouveau par rapport à la loi dite initiale, qui est susceptible d'apparaître et qui dans ce cas apporte une modification importante de comportement. En ce sens, par exemple l'apparition de la plasticité entrerait dans cette définition. En fait on s'intéresse à une classe plus restreinte de critère, et de manière plus précise les critères envisagés concernent :

— l'apparition de ruptures locales ou plus finement d'endommagements,

— l'apparition de flambages locaux voir micro flambages, tels que l'apparition de plis dans une membrane en compression, ceci dans le cas ou on veut prendre en compte les conséquences de ce flambage local au niveau d'une loi qui est censée représenter le comportement homogénéisé d'un tissu avec plis.

Ensuite en fonction de l'intérêt des méthodes proposées, elles pourront être étendues à d'autres phénomènes.

Une idée générale est de définir des critères qui puissent s'appliquer le plus généralement possible, a priori indépendamment du type de loi initialement utilisé. L'indépendance a évidemment des limites et on peut penser que dans la pratique, certains paramètres du critère puissent par exemple avoir des valeurs qui dépendent de la loi initiale envisagée. Cependant d'un point de vue informatique, l'implémentation des critères est envisagée de manière à pouvoir s'appliquer sur des classes quelconques de loi de comportement. Ainsi dans les développements qui suivent, la loi n'est pas précisée et on cherche à limiter les restrictions qui pourraient lui être imposées pour l'utilisation d'un critère donné.

21.2 Critère permettant de prendre en compte l'apparition de plis sur une membrane

La membrane ne doit pas pouvoir supporter des efforts de compression $\Rightarrow$ plis. Comment en tenir compte ?

1. Nécessité d'utiliser un critère d'apparition et classification des situations : $\Rightarrow$ de nombreux travaux montrent qu'il est nécessaire de retenir un critère mixte contrainte/déformation :
   — $\sigma_{I\ min} > 0$: membrane en tension dans toutes les directions de son plan médian
   — $\varepsilon_{I\ max} < 0$: membrane relâchée dans toutes les directions de son plan médian
   — sinon plis dans la direction de $\sigma_{I\ min}$
2. si plis : $\Rightarrow$ modification de la raideur apparente du matériau et des contraintes et déformations résultantes. En particulier les déformations dans la direction des plis ne sont plus reliées avec la loi de comportement $\searrow$ de la stabilité de la structure
3. si relâchement complet $\searrow$ diminution encore plus grande de la stabilité.

Remarque Les répercutions de l'apparition de plis sont particulièrement importantes dans le cas de structures faiblement tendus.

La figure 21.2 présente l'algorithme de traitement du critère de prise en compte de l'apparition éventuelle de plis. On observe que le critère s'applique à une loi 2D contrainte plane qui doit s'appuyer sur un comportement 3D quelconque. L'application du critère entraîne une des 3 possibilités proposées :

— soit il n'y a pas de plis, l'application du critère n'entraîne aucune conséquence sur les contraintes et sur l'opérateur tangent,

— soit il y a un tel niveau de plis que l'état résultant de la membrane est totalement relâché, dans ce cas les contraintes et l'opérateur tangent résultant sont annulés,

— soit il y a des plis dans une direction, mais il reste une direction tendue d'où une raideur et des contraintes résultantes dans cette direction. Un nouvel état d'équilibre de type contrainte plane double, est calculé dans cette direction d'où, par rapport aux résultats initiaux avant l'application du critère, de nouvelles valeurs pour les contraintes et l'opérateur tangent.

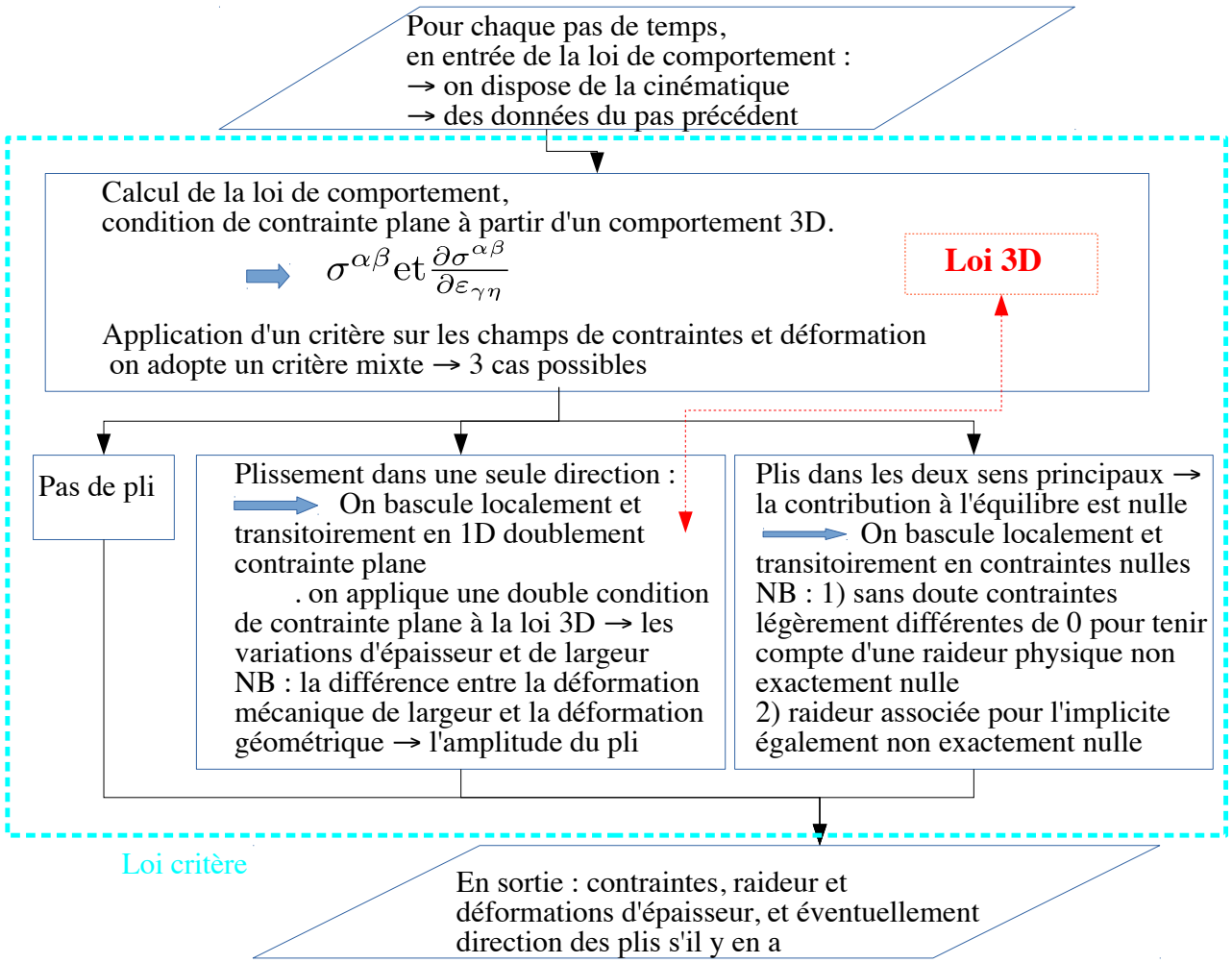

FIGURE 7 – Algorithme de traitement pour la prise en compte de plis dans le comportement mécanique macro d'une membrane

Exemple de mise en données plis_elastique LOI_CRITERE

```
# ..... loi de comportement avec critere .....
TYPE_DE_CRITERE_ PLISSEMENT_MEMBRANE
LOI_CONTRAINTES_PLANES # loi de contrainte plane
NEWTON_LOCAL avec_parametres_de_reglage_
nb_iteration_maxi_ 20
nb_dichotomie_maxi_ 20
tolerance_residu_ 1.e-3
fin_parametres_reglage_Algo_Newton_

        ISOELAS
2000 0.3
fin_loi_contrainte_plane # — fin de la loi de contrainte plane
fin_loi_interne # — fin des lois internes
fin_loi_critere # —— fin de LOI_CRITERE
```

21.3 Particularités liés aux lois incrémentales

Dans le cas d'une loi élastique ou hyperélastique, seules les situations initiales et finales sont à prendre en compte, l'histoire du comportement n'est pas à considérer. Ceci simplifie la résolution.

Dans le cas où la loi 3D interne au critère, comporte une partie incrémentale, il est nécessaire de considérer l'histoire du chargement et d'étudier la signification des grandeurs incrémentales nécessaires à la loi, en particulier l'incrément de déformation.

Lorsqu'il apparait un pli, la loi de contrainte plane évolue vers une loi de contraintes doublement planes.

Le processus de résolution va nous conduire à adopter un nouveau tenseur de déformation (appelé déformation mécanique) qui se trouve déconnecter des bases $\vec{g}_i$ et $\vec{g}^i$ qui restent associées au paramétrage θ^i de la cinématique. En conséquence les relations (382) ne sont plus respectés. Cela implique que (383) n'est également pas valide et qu'il n'est plus possible a priori d'adopter l'approximation (381).

On évoque maintenant une solution envisagée.

21.3.1 Reconstruction d'un repère matériel ad hoc

Pour palier à l'incohérence de la mesure de déformation et le repère associé, une solution pourrait-être de chercher à associer à la déformation mécanique, un nouveau paramétrage θ'^i avec les repères $\{M, \vec{g'}_i\}$ et $\{\hat{M}, \hat{\vec{g}}'_i\}$ tel que l'on satisfasse les relations (382) pour la déformation mécanique. En fait, la connaissance de ce nouveau paramétrage n'est pas nécessaire pour les calculs, par contre ce qui importe c'est la connaissance des repères matériels associés aux incréments de déformation mécanique.

Pour ce faire, le choix du repère $\{\hat{M}, \hat{\vec{g}}'_i = \vec{V}_i\} =$ paraît judicieux, reste à trouver le repère matériel associé $\{M, \vec{g'}_i\}$.

Or la seule connaissance d'un tenseur de déformation n'est pas suffisante pour déterminer le repère matériel initial, car il manque les informations de rotation, qui sont indépendantes

du tenseur de contraintes. Pour lever cette indétermination, on fait le choix pratique suivant :

1. on retient le repère matériel $\{\hat{M}, \vec{V}_a\}$ qui est celui de la condition CP2, c'est le repère final donc à $t + \Delta t$,
2. on suppose que la direction du vecteur $\vec{V}_3$ est toujours connu, et reste normale aux deux autres vecteurs à tout moment,
3. la base $\{\vec{V}_a\}$ est construite de manière à être toujours directe, on suppose que la bases à t est également directe.

Remarque : Ici la condition CP2 s'applique comme un prolongement de la condition CP, pour laquelle on connait la direction particulière $\vec{V}_3$.

La première condition détermine le repère d'arrivé, qui est donc orthonormée et l'on a $\vec{V}_a = \vec{V}^a$.

La seconde condition impose que :

$$\epsilon'_{23} = \epsilon'_{13} = \Delta_t^{t+\Delta t}\epsilon'_{23} = \Delta_t^{t+\Delta t}\epsilon'_{13} = 0 \tag{414}$$

Cette condition permet de positionner et de calculer le repère à t en fonction de la connaissance des composantes de la variation de la déformation mécanique, restantes à savoir $\Delta_t^{t+\Delta t}\epsilon'_{22}$, $\Delta_t^{t+\Delta t}\epsilon'_{12}$ et $\Delta_t^{t+\Delta t}\epsilon'_{33}$.

Par définition : $\Delta_t^{t+\Delta t}\epsilon'_{33} = 0.5(\vec{V}_3.\vec{V}_3 - \vec{g'}(t)_3.\vec{g'}(t)_3) = 0.5(1. - ||\vec{g'}(t)_3||^2)$
d'où l'intensité du vecteur $\vec{g'}(t)_3$:

$$||\vec{g'}(t)_3|| = \sqrt{1. - 2.\Delta_t^{t+\Delta t}\epsilon'_{33}} \tag{415}$$

La direction du vecteur étant supposée toujours connue, le vecteur $\vec{g'}(t)_3$ est ainsi complètement déterminé.

De manière équivalente, l'intensité du vecteur $\vec{g'}(t)_2$ s'obtient par :

$$||\vec{g'}(t)_2|| = \sqrt{1. - 2.\Delta_t^{t+\Delta t}\epsilon'_{22}} \tag{416}$$

Compte tenu de (414) le vecteur $\vec{g'}(t)_2$ doit se situer dans le plan normal à $\vec{g'}(t)_3$. La projection du vecteur $\vec{g'}(t)_2$ sur $\vec{g'}(t)_1$ se détermine à l'aide de $\Delta_t^{t+\Delta t}\epsilon'_{12}$

$$\begin{aligned}
\Delta_t^{t+\Delta t}\epsilon'_{12} &= 0.5(\vec{V}_1.\vec{V}_2 - \vec{g'}(t)_1.\vec{g'}(t)_2) = -0.5\vec{g'}(t)_1.\vec{g'}(t)_2 \\
&\quad \text{d'où} \\
\vec{g'}(t)_1.\vec{g'}(t)_2 &= -2.\ \Delta_t^{t+\Delta t}\epsilon'_{12} \\
&\quad \text{ou encore avec } \alpha \text{ le cosinus de l'angle entre } \vec{g'}(t)_2 \text{ et } \vec{g'}(t)_1 \\
cos(\alpha) &= \frac{-2.\ \Delta_t^{t+\Delta t}\epsilon'_{12}}{||\vec{g'}(t)_2||\ ||\vec{g'}(t)_1||}
\end{aligned} \tag{417}$$

Si de plus (cf. les hypothèses émises précédemment) on suppose que la base $\vec{g'}(t)_i$ est directe, les relations (416) et (417) détermine complètement le vecteur $\vec{g'}(t)_2$.

On voit donc qu'il est possible de déterminer un repère matériel associé aux déformations dites mécaniques.

21.3.2 Prise en compte de plusieurs repère matériels ad hoc

Supposons deux incréments à suivre avec plis. A priori, les deux directions de plis ne sont pas forcément identiques. Cela signifie que les déformations mécaniques transversales ϵ'_{22} et ϵ'_{21} ramenées dans le repère de travail deviennent un mixte de déformations cinématiques et de résultats du comportement. À la suite de plusieurs incréments, on obtient a priori une déformation à t qui peut notablement être différente de la déformation cinématique. L'interrogation est alors de savoir qu'elle type d'incrément de déformation, il faut fournir à la loi de comportement. Dans notre cas, a priori pour des raisons de simplification, on propose de retenir comme incrément, l'incrément cinématique uniquement, pour la partie non mécanique, la partie mécanique restant un résultat du calcul de la loi.

Une autre solution serait de considérer la différence entre la déformation finale et la déformation mécanique enregistrée. Les difficultés engendrées seraient d'avoir à gérer l'évolution des repères matériels associés et au final la cohérence de la déformation mécanique résultante vis-à-vis de la déformation cinématique.

21.4 Évolution du comportement avec ou sans plis

L'application du critère plis permets de statuer sur l'état de la membrane. Dans le cas ou l'on enchaîne plusieurs incréments de calcul il faut considérer différentes combinaisons suivant le type de l'état de la membrane qui précède le nouvel incrément. Il faut donc considérer 9 combinaisons. L'objet de ce paragraphe est de préciser la méthodologie retenue pour chaque combinaison, en particulier dans le cas de l'utilisation d'une loi incrémentale.

21.4.1 Suite de 2 incréments sans plis

C'est le cas triviale où le critère plis n'a été utilisé que pour constater l'état tendu dans toutes les directions. L'état de contrainte est de type CP pour les 2 incréments.

Par rapport à un calcul classique en contrainte plane, on sauvegarde l'ensemble des déformations 3D, utilisées pour la loi de comportement 3D, sous l'appellation de "déformations mécaniques" $\epsilon_{ij,mec}(t + \Delta t)$.

21.4.2 Incréments sans plis suivi d'un pli dans une direction

On utilise la forme particulière des contraintes doublement planes, pour laquelle la direction des plis est différente de celle du repère de travail (cf. 17.2, 17.4, 17.6, 17.8).

On applique l'algorithme vu précédemment (cf. 21.2).

En fin de calcul avec prise en compte des plis, on obtient des déformations associées aux conditions CP2. On note $\vec{V}_a$, a=1..3 la base de CP2 telles que $\vec{V}_1$ est la direction en traction (direction du pli) , $\vec{V}_3$ est la direction de l'épaisseur de la membrane et $\vec{V}_2$ est la direction normale au pli (appelée largeur en CP2). La déformation selon la direction $\vec{V}_1$ est une donnée d'entrée de la loi de comportement, est dépend de la cinématique des points matériels. Les déformations selon les direction $\vec{V}_l$ l=2,3, sont a priori différentes de celles issues de la cinématique. Ce sont des déformations que l'on appellera "mécaniques" car issue du comportement mécanique local au travers de la loi de comportement.

Par rapport à un calcul classique en contrainte doublement plane, on sauvegarde l'ensemble des déformations mécaniques $\epsilon_{ij,mec}(t+\Delta t)$ associées aux conditions CP2 dans les directions $\vec{V_a}$, a=1..3 . Rappelons que ce sont les déformations qui ont été utilisées avec la loi 3D associée aux condition CP2.

21.4.3 Incréments sans plis suivi de plis dans deux directions

La membrane est alors totalement détendue. Un calcul précis nécessiterait de calculer le niveau de déformation correspondant à un tenseur de contrainte nul. Pour simplifier le calcul, on adopte (dans une première étape qui devra être validée) les simplifications suivantes :

1. Le tenseur des contraintes issues de la loi de comportement est mis à 0 de manière arbitraire (donc il ne contribue pas à l'équilibre global)
2. l'opérateur tangent $\frac{\partial \sigma^{ij}}{\partial \epsilon_{kl}}$ est également mis à 0 de manière arbitraire (donc il ne contribue pas à la raideur globale)
3. on suppose que l'incrément Δt est faible, la membrane à t est donc supposée proche de l'état relâché, aussi les contraintes à t sont supposées faibles. On retient alors arbitrairement comme déformation mécanique à $(t+\Delta t)$ celles de l'état à t, transportée de manière cohérente avec la dérivée de Jauman et manière à limiter les variations de volume éventuelles.

$$\epsilon_{ij,mec}(t+\Delta t) = \frac{1}{2}\left({}^{t+\Delta t}_{..t}\epsilon_{ij,mec}(t) + {}^{..t+\Delta t}_{t}\epsilon^{ij}{}_{mec}(t)\right) \tag{418}$$

21.4.4 Incrément avec un pli suivi d'un calcul sans plis

Les déformations finales à $(t+\Delta t)$ dans le plan de la membrane sont celles issues de la cinématique.

L'incrément de déformation, entre t et $(t+\Delta t)$ est obtenu par la différence entre les déformations $(t+\Delta t)$ et les déformations mécaniques à t, transportée de manière cohérente avec la dérivée de Jauman à $(t+\Delta t)$.

$$\Delta_t^{t+\Delta t}\epsilon_{kl} = \epsilon_{kl}(t+\Delta t) - \frac{1}{2}\left({}^{t+\Delta t}_{..t}\epsilon_{kl,mec}(t) + {}^{..t+\Delta t}_{t}\epsilon^{kl}{}_{mec}(t)\right) \tag{419}$$

La vitesse de déformation est calculée à l'aide de la formule 381.

On dispose ainsi de la déformation, de l'incrément de déformation et de la vitesse de déformation, ce qui permet un calcul général d'une loi incrémentale.

21.4.5 Incrément avec un pli suivi d'un calcul avec un pli

Seule la déformation ϵ'_{11} suivant la direction du pli $\vec{V_1}$ est issue de la cinématique. Les autres $\epsilon'_{rt,meca}$ sont déduites de la loi de comportement, elles sont d'ailleurs des inconnues du calcul de la lois de comportement.

On a donc :

$$\begin{aligned}\epsilon_{kl,meca}(t+\Delta t) &= \epsilon'_{11}(t+\Delta t)\ V^1_{.k}\ V^1_{.l} + \epsilon'_{rt,meca}\ V^r_{.k}\ V^t_{.l} \\ &\quad \text{avec (r,t)} \neq (1,1) \\ &= \epsilon_{kl,cine}(t+\Delta t)\ \gamma^k_{.1}\ \gamma^l_{.1}\ V^1_{.k}\ V^1_{.l} + \epsilon'_{rt,meca}\ V^r_{.k}\ V^t_{.l} \end{aligned} \quad (420)$$

L'incrément de déformation, entre t et $(t+\Delta t)$ est obtenu par la différence entre les déformations mécanique à $(t+\Delta t)$ et les déformations mécaniques à t, transportée de manière cohérente avec la dérivée de Jauman à $(t+\Delta t)$.

$$\Delta_t^{t+\Delta t}\epsilon_{kl} = \epsilon_{kl,meca}(t+\Delta t) - \frac{1}{2}\left({}^{t+\Delta t}_{..t}\epsilon_{kl,mec}(t) + {}^{..t+\Delta t}_{t}\epsilon^{kl}{}_{mec}(t)\right) \quad (421)$$

La vitesse de déformation est calculée à l'aide de la formule 381.

On dispose ainsi de la déformation, de l'incrément de déformation et de la vitesse de déformation, ce qui permet un calcul général d'une loi incrémentale.

21.4.6 Incrément avec un pli suivi d'un calcul avec deux plis

L'analyse est identique au cas (21.4.3).
On applique la même méthodologie.

21.4.7 Incrément avec deux plis suivi d'un calcul sans plis

L'analyse est identique au cas (21.4.4).
On applique la même méthodologie.

21.4.8 Incrément avec deux plis suivi d'un calcul avec un pli

L'analyse est identique au cas (21.4.5).
On applique la même méthodologie.

21.4.9 Incrément avec deux plis suivi d'un calcul avec deux plis

L'analyse est identique au cas (21.4.3).
On applique la même méthodologie.

21.5 Remarques sur la variation des épaisseurs

Soit une bande de matière modélisée par une membrane de forme rectangulaire ABCD : $L_0 \times l_0$ (AB et DC alignés avec les x, BC et DA alignés avec les y) d'épaisseur h_0. Supposons que l'on exerce un sollicitation en traction par exemple en bloquant AB selon y et en déplaçant DC selon y d'une valeur uniforme ΔL : i.e. une sollicitation de traction simple uniforme.

On obtiendra un état de traction unidirectionnelle selon y avec $\sigma^{yy} \neq 0$ et les autres contraintes nulles. Comme la plus petite valeur propre dans le plan σ_{II} est nulle, des plis peuvent éventuellement apparaître suivant x. Si aucune condition n'est imposée dans

la direction x, l'équilibre mécanique de la membrane plissée est identique à celui de la structure non plissée.

La loi plis a pour objectif de s'appliquer au matériau plissé vu comme une structure plane non plissée. Du coup :

— si la structure physique reste plane, la nouvelle épaisseur et la nouvelle largeur de la membrane seront celles qui correspondent aux dimensions initiales modifiées par les déformations nécessaires pour obtenir les contraintes transversales nulles, ce qui est le cas classique.

— si la structure ondule, la largeur en l'absence de condition particulière selon x, peut-être quelconque. Se pose alors le problème du calcul de l'épaisseur de la membrane, vue uniquement sous sa forme projetée, que l'on doit prendre en compte pour calculer la section transversale à l'effort, c'est-à-dire la section xz. Cette section est nécessaire pour calculer l'effort totale de traction : $F_y = \sigma^{yy} \times largeur \times$épaisseur. Cet effort est nécessaire pour calculer l'équilibre de la structure !

Dans ce contexte, deux types d'épaisseurs sont à considérer :

1. l'épaisseur physique h de la membrane qui ondule. Cette épaisseur dans le cas des comportements classiques, va diminuer avec la sollicitation de traction. L'épaisseur finale dépend de l'épaisseur initiale h_0 modifiée par la déformation d'épaisseur nécessaire pour obtenir $\sigma^{zz}(\varepsilon_{33}) = 0$.
2. l'épaisseur homogénéisé h_{hom} qui, associée à la largeur géométrique de la bande ondulée l_{geom} doit conduire à la force correcte de traction.

Dans le cas d'une mesure de déformation logarithmique, en supposant que l'on dispose du coefficient de compressibilité, on a :

$$\frac{trace(\boldsymbol{\sigma})}{3} = K \times ln\left(\frac{v}{v_0}\right) = K\left(ln\left(\frac{L}{L_0}\right) + ln\left(\frac{l}{l_0}\right) + ln\left(\frac{h}{h_0}\right)\right) \tag{422}$$

La longueur de la bande L est identique pour les cas plissé ou non. Par contre la section transversale à considérer est pour le cas non plissé : $h \times l$ alors que pour le cas plissé c'est : $h_{hom} \times l_{geom}$. Pour avoir un volume (ou une section transversale) identique on doit considérer :

$$h_{hom} = \frac{h \times l}{l_{geom}} \tag{423}$$

Dans le cas d'un calcul éléments finis, la surface géométrique est discrétisée par des éléments membranes et on dispose donc des déformations géométriques selon les axes 1 et 2 : i.e. $\frac{L}{L_0}$ et $\frac{l_{geom}}{l_{geom,0}}$. On peut donc ré-écrire la formule 422 selon :

$$\frac{trace(\boldsymbol{\sigma})}{3} = K\left(ln\left(\frac{L \times l_{geom}}{L_0 \times l_{geom,0}}\right) + ln\left(\frac{h_{hom}}{h_{hom,0}}\right)\right) \tag{424}$$

d'où :

$$h_{hom} = h_{hom,0} \times exp\left(\frac{trace(\boldsymbol{\sigma})}{3K} - ln\left(\frac{L \times l_{geom}}{L_0 \times l_{geom,0}}\right)\right) \tag{425}$$

La conséquence de cette formule est que suivant la valeur du plissement (arbitraire) cela conduit à une largeur l_{geom} arbitraire et donc une épaisseur homogénéisée arbitraire. En

particulier si $\Delta l_{geom} = l_{geom} - l_{geom,0}$ est bien plus petit que $\Delta l = l - l_0$, ce qui est normale dans le cas d'apparition de plis, on obtient une épaisseur homogénéisée qui augmente !

Dans le cas d'Herezh++, la grandeur $L \times l_{geom}$ correspond à $\sqrt{g(t+\Delta t)}$ et de même $L_0 \times l_{geom,0} = \sqrt{g(t)}$.

Dans le cas d'une version incrémentale, en utilisant le module de compressibilité tangent "K_t", on retrouve une formule analogue à (338) (on se reportera à son calcul pour plus d'information) :

$$h_{hom}(t+\Delta t) = \frac{(h_{hom}(t)\ \sqrt{g(t)})}{\sqrt{g(t+\Delta t)}} \left(\frac{K_t}{(K_t + (P(t+\Delta t) - P(t)))} \right) \tag{426}$$

et pour le calcul de variation en utilisant une formule identique à (339)

$$\begin{aligned} \frac{\partial h_{hom}(t+\Delta t)}{\partial ddl} &= -(h_{hom}(t)\ \sqrt{g(t)}\ K_t) \left(\frac{1}{|g(t+\Delta t)|\ (K_t + P(t+\Delta t))} \frac{\partial \sqrt{g(t+\Delta t)}}{\partial ddl} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\sqrt{g(t+\Delta t)}\ (K_t + P(t+\Delta t))^2} \frac{\partial P(t+\Delta t)}{\partial ddl} \right) \end{aligned} \tag{427}$$

De manière pratique, lors de l'exploitation des résultats sous Herezh++ on fera attention à ne pas confondre :

- l'épaisseur homogénéisée disponible au niveau de l'élément sous forme d'une épaisseur moyenne
- et l'épaisseur locale du matériau, disponible au point d'intégration, au travers de la loi de comportement.

Huitième partie
Thermique

22 Résolution d'un problème classique de thermique

22.1 Équation locale d'équilibre

On se place dans le cadre classique d'une thermique isotrope avec un comportement statique et transitoire.

Dans le cas où la pression est approximativement constante, l'enthalpie peut s'exprimer sous la relation :

$$H(t,M) = \int_0^T C_p(\tau) d\tau \tag{428}$$

$C_p(T)$ est la chaleur massique à pression constante. L'équation bilan devient :

$$\rho\ C_p\ \frac{\partial T}{\partial t} + \rho\ C_p\ \vec{V}.\vec{grad}(T) - div(\lambda\ \vec{grad}(T)) = \rho\ C_p\ \frac{dT}{dt} - div(\lambda\ \vec{grad}(T)) = \dot{Q}_T \tag{429}$$

"T" : température (°K) , λ conductivité thermique ($\mathrm{W.m^{-1}}K^{-1}$), $\dot{Q}_T$ représente de terme d'apport volumique de chaleur, le terme source classique.

On se place dans le cas d'un volume de matière que l'on suit, le terme de transport disparaît et on obtient l'équation classique.

$$\rho\ C_p\ \frac{\partial T}{\partial t} - div(\lambda\ \vec{grad}(T)) = \dot{Q}_T \tag{430}$$

que l'on détaille en :

$$\rho\ C_p\ \frac{\partial T}{\partial t} - \lambda\ \Delta(T)) - \vec{grad}(\lambda).\vec{grad}(T) = \dot{Q}_T \tag{431}$$

Cette équation est utile par exemple lorsque la conductivité dépends de la position géométrique. Si de plus la conductivité est constante, le terme $\vec{grad}(\lambda)$ disparait.

Lorsque λ dépends de la température : $\vec{grad}(\lambda) = \frac{\partial \lambda}{\partial T}\ \vec{grad}(T)$ d'où :

$$\rho\ C_p\ \frac{\partial T}{\partial t} - \lambda\ \Delta(T)) - \frac{\partial \lambda}{\partial T}\ \vec{grad}(T).\vec{grad}(T) = \dot{Q}_T \tag{432}$$

Dans le cas d'un matériau anisotrope, le scalaire λ devient un tenseur d'ordre 2, symétrique $\boldsymbol{\lambda}$.

22.2 Formulation variationnelle

La formulation faible s'écrit dans le cas d'un matériau anisotrope et d'un volume matière D :

$$\int_D \rho\ C_p\ \dot{T}\ \overset{*}{T}\ dv + \int_D\ \vec{grad}(T).\boldsymbol{\lambda}.\ \vec{grad}(\overset{*}{T}) dv = \int_D\ \dot{Q}_T\ \overset{*}{T}\ dv + \int_{\partial D}\ \Phi\ \overset{*}{T}\ ds \tag{433}$$

qui doit-être vérifiée quelque soit les fonctions tests $\overset{*}{T}$ et où Φ est le flux imposé sur les frontières ∂D de diverses manières.

On retient une interpolation nodale similaire au cas de la mécanique, pour la température :

$$T = \ T^r\ \varphi_r(\theta^i) \text{ et } \overset{*}{T} = \overset{*}{T^s}\ \ \varphi_s(\theta^i) \tag{434}$$

Neuvième partie
Contact

23 Prise en compte des conditions limites de contact

23.1 Réponse à la question : le point est-il intérieur à l'élément ?

Soit un point M et un élément fini E, une question qui est souvent posée au cours de la résolution de la conditions de contact est : le point est-il intérieur à l'élément ?

L'option retenue est dans une première étape de privilégier la précision par rapport à la vitesse du calcul.

Le test est effectué dans l'élément de référence. Pour ce faire on détermine les coordonnées du point par rapport au repérage curviligne de l'élément de référence, à l'aide d'une méthode itérative de type Newton. Ensuite le test est effectué aisément sur les coordonnées locales (curvilignes). Par exemple pour un hexaèdre le test se résume à : $|\theta^i| < 1$.

Soit M_{ref} le point origine de l'élément de référence. Ce dernier a des coordonnées curvilignes nulles $\theta^i = 0$. L'objectif est donc de trouver les coordonnées curvilignes θ^i correspondants à $\vec{M_{ref}M}$. Pour cela on utilise la boucle suivante :

- Initialisation : $\theta^i = 0$
- boucle tant que $||\Delta\theta^i|| > \varepsilon$ faire
  - calcul de la base locale $\vec{g_i}$ au point $A(\theta^i)$
  - calcul de $\Delta\theta^i = \vec{AM}.\vec{g_i}$,
  - $\theta^i += \Delta\theta^i$

Le point A ainsi déterminé représente au final la projection de M dans le repérage de référence. Dans le cas d'éléments volumiques, à convergence A et M sont confondus, par contre dans le cas d'un élément surfacique en 3D, $\vec{AM}$ représente le vecteur normal à la surface passant par M. Il est alors possible de vérifier la condition d'appartenance à la coque (ou plaque) : $||\vec{AM}|| < h/2$ avec h l'épaisseur de la coque au point A, dont la position est supposée être au niveau de la surface médiane.

Remarque : Un point M très éloigné de l'élément, peut conduire à un repère local inexploitable, par exemple dans le cas d'éléments quadratiques. On se limite donc, aux repères locaux calculés strictement dans l'élément.

23.2 Création des éléments de frontière

Tout d'abord une explication sur la terminologie, on appelle frontières de l'élément les frontières naturelles c'est-à-dire :

- pour les éléments 1D : les noeuds aux extrémitées en monde 1D, sinon également l'élément en monde 2D et 3D,
- pour les éléments 2D : les arrêtes de l'élément en monde 2D, sinon également la surface de l'élément en monde 2D et 3D,
- pour les éléments 3D : les surfaces externes de l'élément.

En 3D, les arrêtes des éléments surfaciques représentent à l'aide de la donnée d'épaisseur, la surface latérale de l'élément. Les arrêtes des éléments linéiques représentent à l'aide des données de la section générique, la surface latérale de l'élément, et de même pour les points extrêmes.

23.3 Eléments de Contact

Une remarque générale : il serait théoriquement possible de traiter le contact en examinant à chaque instant si les noeuds projectile sont interne aux éléments cibles. Cette procédure est très lourde, et on la réserve aux phases d'initialisation. Une fois déterminé un contact c'est-à-dire un couple noeud - face (ou ligne) d'élément, il est plus avantageux a priori de suivre le noeud en contact tout au long de son déplacement en gardant, d'un pas de temps à l'autre, le souvenir de la face (ou ligne) avec lequel il est en contact. On définit donc des éléments de contact constitué d'un noeud et d'une face (ou une ligne).

23.4 Pénalisation

L'idée de la pénalisation est d'introduire des efforts de réaction proportionnelle à la pénétration. L'effort s'exerce d'une part sur le noeud qui pénètre, et d'autre part sur la face (ou la ligne) de la frontière qui est impactée. Se pose alors de problème de la répartition de l'effort sur la cible.

Le problème n'a pas qu'une seule solution. Une première idée serait de répartir l'effort sur les différents noeuds en fonction de la distance du noeud au point impacté. La distance euclidienne utilisant des carrées et des racines carrées, peut se révéler relativement coûteuse au final sur un grand nombre de point impacté, en particulier si l'on veut déterminer un opérateur tangent par rapport aux degrés de liberté du système. En conséquence, la solution retenue est d'utiliser une expression moins précise, mais plus simple et rapide :

$$\vec{F}^r = \frac{\sum_a |X^{ar}| \vec{F}}{\sum_s \sum_b |X^{bs}|} \tag{435}$$

23.4.1 Adaptation du facteur de pénalité en fonction de la raideur des matériaux

Le coefficient de pénalisation doit être adapté à la raideur des matériaux en contact. Un facteur trop faible induit une pénétration importante non réaliste. Un facteur trop élevé va avoir tendance à "écraser" les autres constituants de l'équilibre. Nous allons examiner différentes propositions.

La solution retenue par le logiciel LS-DYNA est d'utiliser un facteur de pénalisation fonction du module de compressibilité du matériau d'une part, et de dimensions géométriques d'autre part. Pour les éléments volumiques, la formule suivante est proposée :

$$\alpha_{se} = \frac{f\ K_e\ A_{se}^2}{V_e} \tag{436}$$

où α_e est le facteur de pénalité relatif à la surface "s" de l'élément "e", "f" est un facteur d'ajustement fixé par défaut à 0.1, K_e est le module de compressibilité de l'élément "e", A_{se} est la surface de face en contact, V_e est le volume de l'élément.

Dans le cas de l'impact sur un élément coque ou plaque de surface A_e, dont le module de compressibilité volumique vaut K_e on a :

$$\beta = \frac{K_e\ A_e}{max(distance\ entre\ les\ noeuds)}$$

23.4.2 Adaptation du facteur de pénalité à une zone d'accostage

L'idée est de prendre en compte une zone dite d'accostage, qui permet d'avoir une régularisation de l'apparition de l'effort de contact. Soit l'évolution suivante :

$$\begin{aligned} \beta &= 0 \quad pour \quad g > e \\ \beta &= 1 \quad pour \quad g < -e \\ \beta &= \frac{1}{4}\frac{(g-e)^2}{e^2} \quad pour \quad |g| \leq e \end{aligned} \tag{437}$$

avec "e" la valeur de la zone d'accostage, et g la valeur de la pénétration.

$$g = \overrightarrow{M_{t+\Delta t}P} \,.\vec{N} \tag{438}$$

$M_{t+\Delta t}$: position actuelle du noeud esclave, P le point de contact : égal à l'intersection de la droite $M_t M_{t+\Delta t}$ lors de la pénétration, et ensuite valant la projection de $M_{t+\Delta t}$ sur la surface maître, $\vec{N}$ la normale à la surface maître au point P.

β est alors un facteur multiplicatif, utilisé pour calculer le facteur final de pénalisation. Il est possible de tenir compte de la variation de β par rapport aux degrés de liberté de l'élément de contact, via sa dépendance à g. Par exemple pour l'évolution proposée en (437) on a :

$$\begin{aligned} \frac{d\beta}{dg} &= 0 \quad pour \quad |g| > e \\ \frac{d\beta}{dg} &= \frac{1}{2}\frac{(g-e)}{e^2} \quad pour \quad |g| \leq e \end{aligned} \tag{439}$$

23.5 Frottement

Le frottement intervient lors du contact entre deux matériaux. Les paramètres matériaux dépendent en général du couple de matériaux en présence. Dans le cas d'Herezh++, le contact est simulé au travers d'"éléments de contact" qui sont constitué d'un noeud, appelé "noeud projectile" et d'une surface "cible". On parle également de "noeud esclave" et surface maître. La surface est toujours constituée par une frontière d'un élément fini. La loi de frottement est donc associée à "cet" élément fini.

Les éléments de contact se créent et disparaissent au gré de l'apparition ou non de contact.

Parmi les différentes lois de frottement disponibles, la loi dite de Coulomb est la plus classique. C'est la première loi de frottement implanté. L'objectif d'une loi de frottement est de déterminer les efforts de frottement en fonction du déplacement ou de la vitesse.

23.5.1 Loi de Coulomb

La loi de Coulomb est une loi phénoménologique qui est largement employée. On distingue la loi classique et la loi régularisée.

Dans le cas classique, deux types de régime peuvent survenir : soit les points en contact ne glissent pas l'un par rapport à l'autre, c'est le contact collant (stick contact), soit

il y a glissement (sliding). Le comportement est régi par "le coefficient de frottement" qui détermine le cône de frottement. La force de contact est telle qu'elle doit toujours demeurer à l'intérieur du cône : strictement dans le cas du contact collant, sur le cône dans le cas du glissement. Dans ce dernier cas on a la relation :

$$\vec{F}_T = -\mu ||\vec{F}_N||.\frac{\vec{V}_{(rt)}}{||\vec{V}_{(rt)}||} \tag{440}$$

$\vec{F}_T$ est la force tangentielle, μ est le coefficient de frottement qui dépend du couple de matériau en contact, $\vec{F}_N$ est la force normale, et $\vec{V}_{(rt)}$ est la vitesse relative tangentielle du point en contact.

Le coefficient de frottement peut également dépendre de la vitesse : en général au démarrage le coefficient est plus important que lorsque le frottement est en régime établi. Une modélisation de cette dépendance peut s'exprimer sous la forme suivante :

$$\mu(v) = \mu_S + (\mu_S - \mu_C).e^{-c.v} \tag{441}$$

où μ_S est le frottement statique, μ_C est le frottement cinématique, $v = ||\vec{V}_{(rt)}||$ est l'intensité de la vitesse relative, $\mu(v)$ est le coefficient variable.

La loi de Coulomb classique introduit une indétermination lorsque l'on se trouve dans le cône de frottement. Ceci peut-être résolu par différentes méthodes générales (cf. théorie du contact), mais il est également possible d'utiliser une loi de contact dite "régularisée" qui permet d'éviter cette indétermination. Dans le cas d'un frottement régularisé, la relation $\vec{F}_T = f(\vec{V}_{rt})$ est toujours vérifiée (il n'y a pas deux régimes). Cependant la forme de la fonction "f" tend à reproduire le fonctionnement initial de la loi classique de Coulomb. Normalement, dû au fait qu'il n'y ait plus d'indétermination, le calcul global est plus robuste.

Dans le cas d'un calcul régularisé, on adopte le comportement suivant :

$$\vec{F}_T = -\mu.\varphi(v)||\vec{F}_N||.\frac{\vec{V}_{(rt)}}{||\vec{V}_{(rt)}||} \tag{442}$$

où la fonction $\varphi(v)$ peut prendre plusieurs formes. Les formes implantées sont extraites de l'ouvrage de Peter Wriggers (Computational Contact Mechanics, Wiley, ISBN 0-471-49680-4).

$$\varphi_1(v) = \frac{v}{\sqrt{(v^2+\varepsilon^2)}} \tag{443}$$

$$\varphi_1(v) = tanh\left(\frac{v}{\varepsilon}\right) \tag{444}$$

$$\varphi_1(v) = \begin{cases} -1 & if \quad v < -\varepsilon \\ \frac{v}{2\varepsilon} & if \quad -\varepsilon \leq v \geq \varepsilon \\ 1 & if \quad > \varepsilon \end{cases} \tag{445}$$

La première fonction est qualifiée par l'auteur de "square root regularization", la seconde de "hyperbolic tangent regularization" la dernière de "piecewise polynomial regularization". ε est un paramètre de réglage qui permet de contrôler le passage à la saturation

de la loi. Lorsque ε tend vers 0, le comportement tend vers celui du modèle original de Coulomb.

Dans de nombreux cas il est nécessaire de disposer du comportement tangent par rapport aux degrés de liberté, par exemple pour le calcul de la matrice de raideur tangente en implicite. Ici cela revient à déterminer le comportement tangent par rapport aux composantes du vecteur vitesse, ce dernier étant lui-même relié aux ddls de positions par les relations cinématiques.

Dans le cas de la loi originale de Coulomb en contact collant, le noeud est entièrement lié à la surface cible par une relation cinématique de position, on peut dire que le comportement tangent ne dépend pas de la loi de comportement.

Dans le régime glissant, on utilise la relation (440) en notant que :

$$\frac{\partial \vec{V}_{(rt)}}{\partial V^a_{(rt)}} = \vec{I}_a \quad et \quad \frac{\partial v}{\partial V^a_{(rt)}} = \frac{V^a_{(rt)}}{v} \tag{446}$$

on obtient :

$$\frac{\partial \vec{F}_T}{\partial V^a_{(rt)}} = -\left(\mu \ \frac{\partial}{\partial V^a_{(rt)}}\left(\frac{\vec{V}_{(rt)}}{v}\right) + \frac{\vec{V}_{(rt)}}{v}\frac{\partial \mu}{\partial V^a_{(rt)}}\right)||\vec{F}_N|| \tag{447}$$

Lorsque le coefficient de frottement est invariant le second terme de l'expression de droite est nul, sinon nous avons :

$$\frac{\partial \mu}{\partial V^a_{(rt)}} = \left(\frac{-c(\mu_S - \mu_C).e^{-c.v}}{v}\right) V^a_{(rt)} \tag{448}$$

Dans le cas d'une loi régularisée, il faut prendre en compte la variation de la fonction de régularisation $\varphi(v)$. En fonction de (445) nous avons :

$$\frac{\partial \varphi_1(v)}{\partial V^a_{(rt)}} = \frac{1}{\sqrt{(v^2+\varepsilon^2)}}\left(1 - \frac{v^2}{(v^2+\varepsilon^2)}\right) \tag{449}$$

$$\frac{\partial \varphi_1(v)}{\partial V^a_{(rt)}} = 1 - tanh^2\left(\frac{v}{\varepsilon}\right) \tag{450}$$

$$\frac{\partial \varphi_1(v)}{\partial V^a_{(rt)}} = \begin{cases} 0 & if \quad v < -\varepsilon \\ \frac{1}{2\varepsilon} & if \quad -\varepsilon \leq v \geq \varepsilon \\ 0 & if \quad > \varepsilon \end{cases} \tag{451}$$

La variation finale de (442) est alors :

$$\frac{\partial \vec{F}_T}{\partial V^a_{(rt)}} = -\left(\mu \ \varphi(v) \ \frac{\partial}{\partial V^a_{(rt)}}\left(\frac{\vec{V}_{(rt)}}{v}\right) + \frac{\vec{V}_{(rt)} \ \varphi(v)}{v}\frac{\partial \mu}{\partial V^a_{(rt)}} + \frac{\mu \ \vec{V}_{(rt)}}{v} \ \frac{\partial \varphi(v)}{\partial V^a_{(rt)}}\right)||\vec{F}_N|| \tag{452}$$

23.6 Détails d'implantation en pénalisation

Concernant la situation de contact, deux cas sont considérés :

1. au début de l'incrément, le noeud M_t n'est pas en contact, et à la fin $M_{t+\Delta t}$ il est en contact. À partir du mouvement du noeud et/ou du mouvement de la facette, une trajectoire est définie et l'intersection de la trajectoire passant par le point à t avec la facette définie le point de contact $\hat{P}$. On mémorise la position local du point de contact $\theta^i_{(p)}$
2. au début de l'incrément et à la fin de l'incrément, le noeud reste en contact. La trajectoire considérée pour le calcul de l'impact est alors la normale à la facette. Le point de contact $\hat{P}$ correspond donc à la projection de $M_{t+\Delta t}$ sur la facette. On dispose également de la position du point initial de contact, transportée à l'instant $t + \Delta t$ via le déplacement de la facette. On nommera P_0 ce point particulier.

On a :

$$\vec{OP_0} = \vec{OM}^r_{t+\Delta t}\ \phi_r(\theta^i_{(p)}) \tag{453}$$

avec $\vec{OM}^r$ les noeuds de la facette.

Avec cette notation $\vec{P_0\hat{P}}$ représente le déplacement total du point d'impact sur la facette, ou le glissement total sur la facette.

Dixième partie
Sfe

24 Eléments SFE

24.1 Introduction

Les éléments SFE (Semi Finite Element) sont des éléments coques qui ont la particularité de ne pas utiliser de degré de liberté de rotation, mais uniquement les degrés de liberté classiques de translation. La cinématique locale s'appuie sur les hypothèses de Kirchhoff en transformations finies.

$$\vec{OM} = \vec{OP}(\theta^1, \theta^2) + z.\vec{N}(\theta^1, \theta^2) \tag{454}$$

Où M est un point courant dans l'épaisseur de la coque, P est le point correspondant de la surface médiane de référence, θ^α représentent les 2 coordonnées permettant de décrire la surface médiane, z est la coordonnée d'épaisseur qui est supposée évoluer entre -h/2 et h/2 avec h l'épaisseur de la coque, et $\vec{N}$ est le vecteur normal à la surface.

A partir ce cette cinématique on obtient le tenseur métrique sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} g_{\alpha\beta} &= a_{\alpha\beta} - 2\ z.b_{\alpha\beta} + z^2\ b_{\alpha\gamma}b^{\gamma}_{\beta} \\ g_{\alpha 3} &= 0 \\ g_{33} &= 1 \end{aligned} \tag{455}$$

Où $g_{\alpha\beta}$ représentent les composantes ($\alpha,\ \beta,\ \gamma = 1, 2$) de la métrique au point M qui varient, $a_{\alpha\beta}$ représentent les composantes de la métrique de la surface médiane au point P, $b_{\alpha\beta}$ les composantes du tenseur de courbure dans le repère naturel. On remarque que la métrique comporte un terme linéaire en z et un terme quadratique. Pour une faible courbure et une faible épaisseur, le terme quadratique peut-être négligé. Dans le cas des éléments SFE, sauf mention particulière, la métrique complète est prise en compte.

A l'aide de cette métrique on obtient naturellement un tenseur vitesse de déformation quadratique en z. Pour la déformation, par exemple dans le cas d'une mesure de déformation d'Almansi on obtient les composantes :

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = 0.5(g_{\alpha\beta}(t) - g_{\alpha\beta}(0)) \tag{456}$$

qui comportent donc implicitement des termes linéaires et quadratiques en z.

Le calcul du tenseur courbure est un élément clé des éléments SFE. Un premier modèle a été présenté par G. Rio [], puis amélioré par G.Rio et B. Thati [], et également par la suite par H. Laurent []. Actuellement, S. Couedo [] a effectué une partie de ses travaux de thèse sur la recherche d'une mesure de courbure optimum en fonction de la position des noeuds.

Ce qui différencie les différentes implantations est le calcul du tenseur de courbure. Nous allons donc détailler différents calculs possibles et les conséquences sur les résultats.

24.2 Estimation d'une courbure à partir de la variation de la normale de part et d'autre des arrêtes

L'idée est d'utiliser la position des éléments mitoyens à l'élément central, pour reconstruire la courbure.

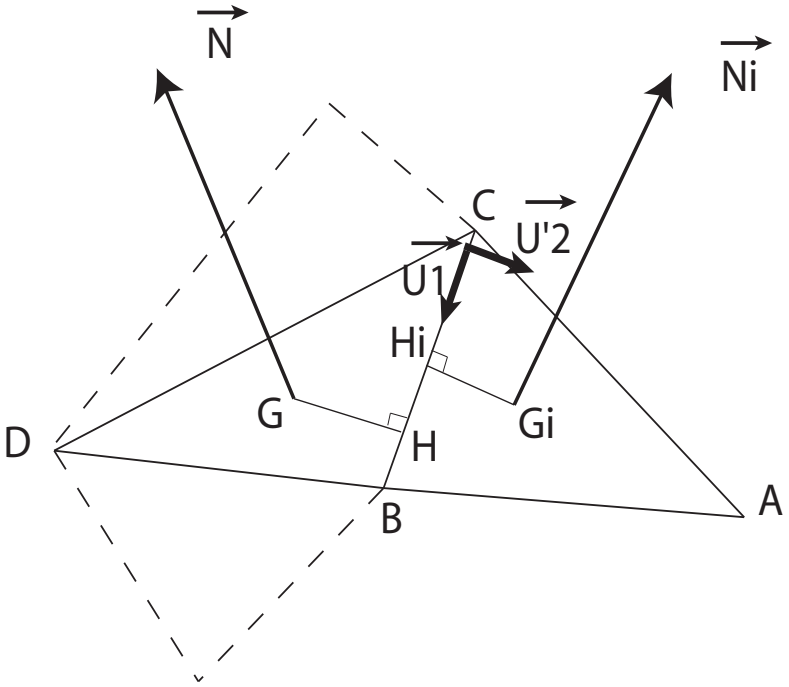

FIGURE 8 – Positions des points

Considérons un triangle DCB entouré de 3 triangles extérieurs (fig.8), et soit CAB l'un d'entre eux.

A partir des coordonnées des noeuds sommet on construit les normales et

$$\vec{N} = \frac{\vec{DB} \times \vec{DC}}{||\vec{DB} \times \vec{DC}||} = \frac{\vec{a_1} \times \vec{a_2}}{||\vec{a_1} \times \vec{a_2}||} \tag{457}$$

$$\vec{N_i} = \frac{\vec{CB} \times \vec{CA}}{||\vec{CB} \times \vec{CA}||} \tag{458}$$

Remarque $\vec{a_1}$ n'est pas forcément égal à $\vec{DB}$, idem entre $\vec{a_2}$ et $\vec{DC}$

Nous avons également successivement :

— $\vec{OG} = (\vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD})/3$ et $\vec{OG_i} = (\vec{OA} + \vec{OC} + \vec{OB})/3$.

— $\vec{U_1} = \vec{CB}/||\vec{CB}||$

— $\vec{U_2'} = \vec{N} \times \vec{U_1}$, la direction normale à $\vec{U_1}$ dans le plan de la facette centrale.

Ceci nous permet de calculer les distances de H_i à G_i d'une part et de H à G d'autre part.

$$\begin{aligned} \vec{H_iG_i} &= \vec{CG_i} - (\vec{CG_i}.\vec{U_1}).\vec{U_1} \\ h_iG_i &= ||\vec{H_iG_i}|| \\ gH_1 &= \sqrt{\vec{CG}.\vec{CG} - (\vec{CG}.\vec{U_1})^2} \end{aligned} \tag{459}$$

On peut alors calculer la variation de la normale dans la direction $\vec{U'_2}$ d'où une approximation de la courbure dans la même direction :

$$\vec{N}_{,U'_2} \approx \frac{\vec{N_i} - \vec{N}}{(gH_1 + h_i G_i)} \quad \rightarrow \quad b_{U'_2 U'_2} \approx -\vec{N}_{,U'_2}.\vec{U'_2} \tag{460}$$

Cette opération peut-être répétée suivant les 3 normales $\vec{U'_2}$ des 3 cotés du triangle central. Supposons que le tenseur de courbure est constant sur la facette centrale, nous avons :

$$\boldsymbol{b} = b_{\alpha\beta}\vec{a}^{\alpha} \otimes \vec{a}^{\beta} \tag{461}$$

d'où :

$$b_{U'_2 U'_2} = b_{\alpha\beta}(\vec{a}^{\alpha}.\vec{U'_2})(\vec{a}^{\beta}.\vec{U'_2}) \tag{462}$$

Appelons $\bar{b}_i = b_{U'_2 U'_2}$ la courbure calculée pour le triangle extérieur "i", i=1...3, et notons $[A^{ij}]$ la matrice 3x3 telle que :

$$A^{i1} = (\vec{a}^1.\vec{U'_2})(\vec{a}^1.\vec{U'_2}) \quad A^{i2} = 2(\vec{a}^1.\vec{U'_2})(\vec{a}^2.\vec{U'_2}) \quad A^{i3} = (\vec{a}^2.\vec{U'_2})(\vec{a}^2.\vec{U'_2}) \tag{463}$$

Notons également les composantes du tenseur de courbure sous forme d'un vecteur :

$$b_1 = b_{11} \quad , \quad b_2 = b_{12} \quad , \quad b_2 = b_{22} \tag{464}$$

D'où la relation matricielle finale :

$$(\bar{b}_i) = [A^{ij}](b_i) \quad \rightarrow \quad (b_i) = [A^{ij}]^{-1}(\bar{b}_i) \tag{465}$$

Le calcul de la variation de la courbure par rapport aux degrés de liberté nécessite de tenir compte de la variation des coordonnées dans tous les termes des différentes expressions précédentes. C'est ce qui a été fait et implanté dans Herezh++. Cependant, la courbure ainsi définie, qui paraît a priori intéressante, pose des problèmes de convergence vers la solution exacte, aussi on ne va donc pas détailler plus en avant la variation (sauf si on trouve par la suite une idée pour améliorer cette forme initiale ! !).

24.2.1 Problème de convergence

Soit le cas test suivant. On considère un maillage de deux éléments dont les sommets sont disposés initialement sur un plan, puis après transformation sur un cylindre de Rayon "R" de la manière indiquée sur la figure (9). Dans l'opération, seul le noeud A bouge de telle manière que l'élément BAC effectue une rotation d'angle "a" autour de l'arête BC.

Si l'on applique le modèle approché de calcul de la courbure selon $\vec{U}_{2(1)}$, nous allons trouver une différence systématique, quelque soit la valeur de l'angle "a", car :

$$\begin{aligned} b_{U'_{2(1)}U'_{2(1)}} &\approx -\frac{\vec{N_i} - \vec{N}}{(gH_1 + h_i G_i)}.\vec{U'_{2(1)}} \\ &\approx -\frac{1}{0.66} < sin(a), 0, cos(a) - 1 > \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\approx -\frac{sin(a)}{0.66} \end{aligned} \tag{466}$$

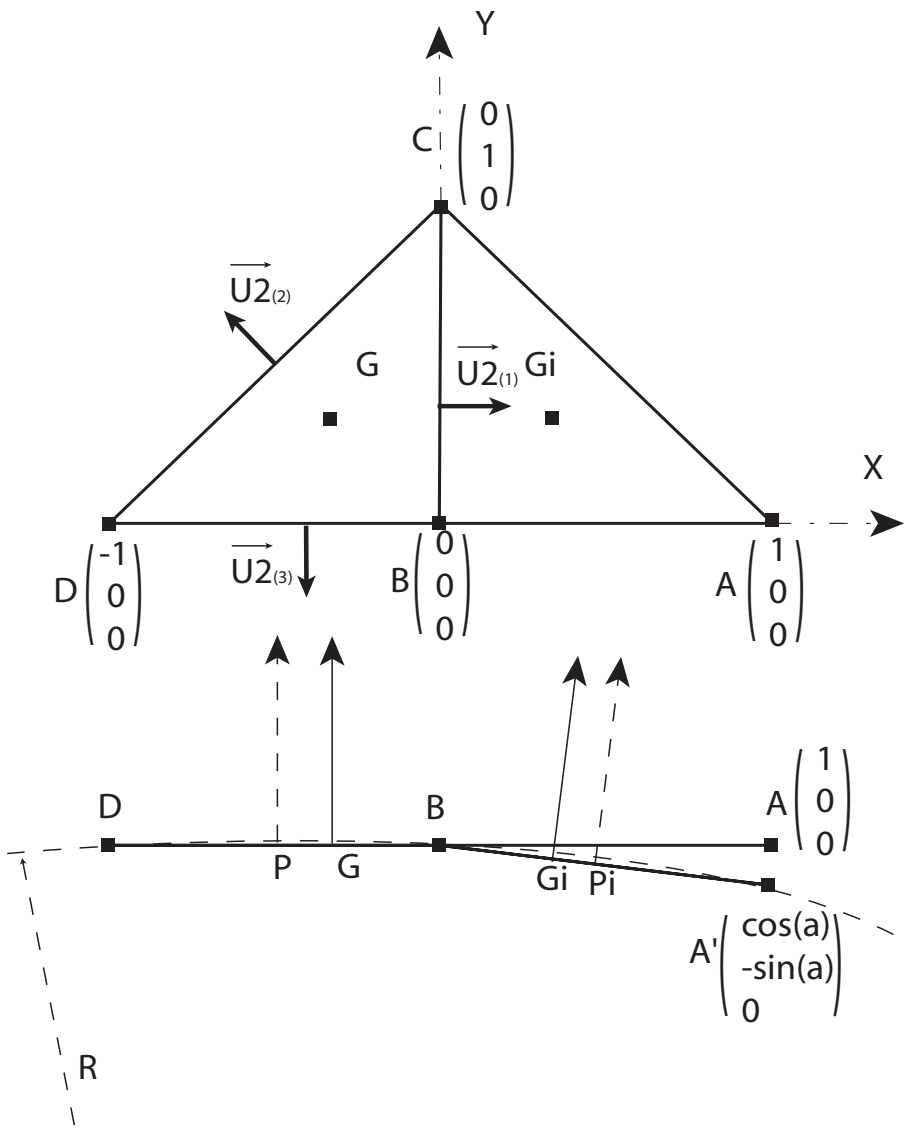

FIGURE 9 – cylindre

D'autre part un simple calcul de géométrie montre que le rayon du cercle qui passe par DBA' est $R = 0.5/sin(a/2)$ c'est-à-dire lorsque l'angle est faible : $1/R \approx a$ D'où :

$$lim_{a\to 0} b_{U'_{2(1)}U'_{2(1)}} \approx -\frac{a}{0.66} \tag{467}$$

Premier problème Donc on voit que l'on n'obtiendra jamais la solution exacte. Ce premier problème peut-être surmonté en considérant, non plus la distance du centre de gravité à l'arête, mais la moitié de la distance du noeud externe à l'arrête. Dans l'exemple ce serait la distance de D à l'arrête BC d'une part et d'autre part la distance de A' à l'arrête BC. Dans ce cas on divisera par 1 et non par 0.66 et on convergera vers le résultat exact.

Second problème Le second problème est a priori plus difficile à résoudre. Considérons toujours l'exemple précédent, et recherchons le tenseur final de courbure. Nous aurons dans la direction $\vec{U}_{2(1)}$ une courbure correcte que l'on note $\bar{b}_1$. Dans les deux autres directions on trouvera une courbure nulle d'où : $\bar{b}_2 = \bar{b}_3 = 0$. Or une fois que l'on cherchera à calculer les composantes du tenseur final via l'expression (465), on obtiendra une valeur correcte pour $b_{11} = \bar{b}_1$ et $b_{22} = \bar{b}_2$, par contre on aura systématiquement $b_{12} \neq 0$ alors que pour un cylindre on doit avoir$b_{12} = 0$. On pourrait penser que le résultat dépend du nombre d'éléments mis dans la largeur, mais il n'en est rien. Prenons par exemple 4 éléments (fig.10). Le calcul de la courbure pour les 3 arêtes sera identique !

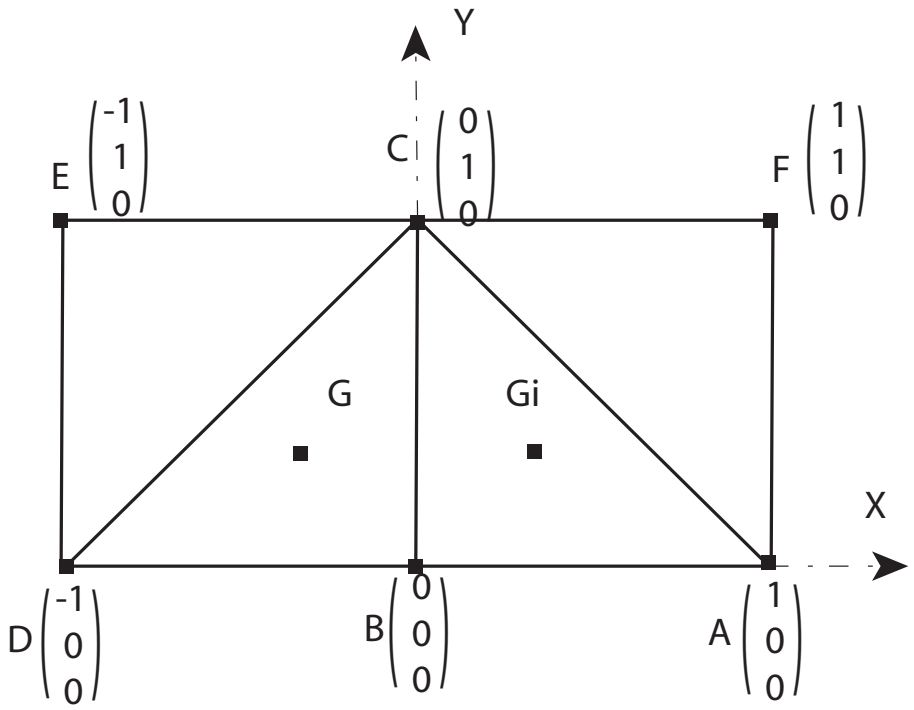

FIGURE 10 – 4 éléments

En conclusion, dans l'état actuel du modèle, on ne peut pas tendre vers la solution exacte pour une géométrie de cylindre. On peut donc penser que la qualité des résultats de flexion ne sera jamais bonne, ce que l'on observe au niveau des résultats numériques dans le cas de la flexion d'une poutre (plaque) sur deux appuis avec une flèche imposée au milieu. On observe une erreur systématique.

24.3 Modèle original simple d'estimation de la courbure

Il s'agit du modèle original introduit par Rio et all [], dont l'idée est de calculer la normale au milieu d'une arrête à partir de la demi-somme des normales de part et autre de l'arrête.

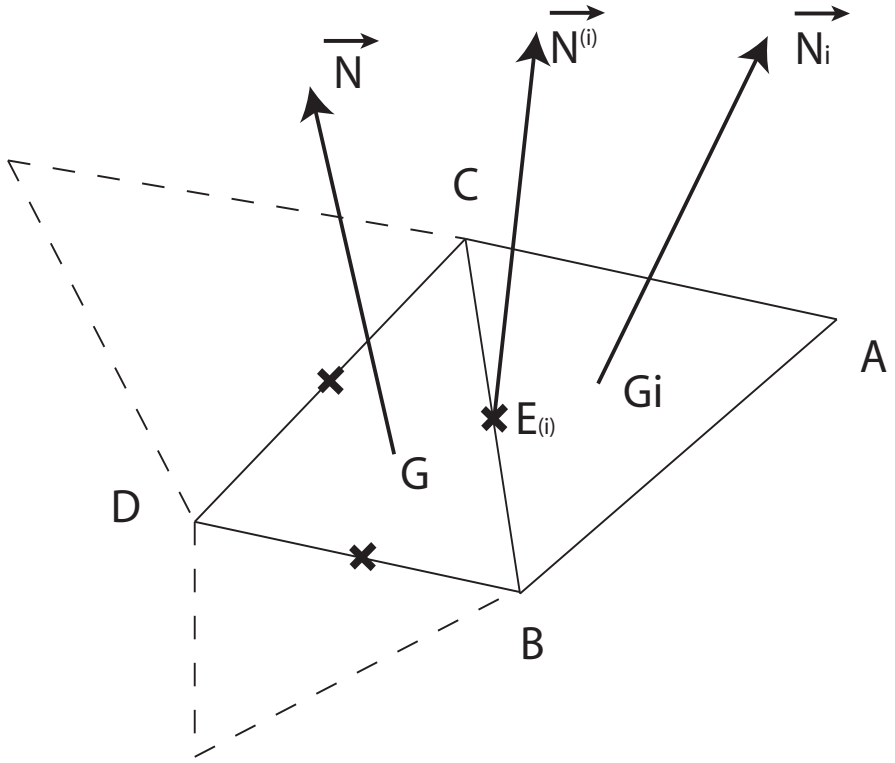

FIGURE 11 – modèle simple : l'élément SFE

Si l'on retient les notations de la figure (11), on a :

$$\vec{N}^{(i)} = \frac{\vec{N} + \vec{N}_i}{||\vec{N} + \vec{N}_i||} \tag{468}$$

Le vecteur $\vec{N}^{(i)}$ est supposé se situé exactement au milieu de l'arrête c'est-à-dire au point : $E_{(i)}$. Ensuite le vecteur est étendu à toute la surface du triangle par interpolation entre les trois normales $\vec{N}^{(i)}$ selon :

$$\vec{N}(\eta^1, \eta^2) = \vec{N}^{(i)} \omega_{(i)} \tag{469}$$

avec "i" variant de 1 à 3 et

$$\omega_{(1)} = 2(\eta^1 + \eta^2) - 1 \quad , \quad \omega_{(2)} = 1 - 2\eta^1 \quad , \quad \omega_{(1)} = 1 - 2\eta^2 \tag{470}$$

Ensuite à partir de la relation (469) on en déduit la variation du vecteur normal :

$$\vec{N}_{,1} = \frac{\partial \vec{N}(\eta^1, \eta^2)}{\partial \eta^1} = 2(\vec{N}^{(1)} - \vec{N}^{(2)}) \quad et \quad \vec{N}_{,2} = \frac{\partial \vec{N}(\eta^1, \eta^2)}{\partial \eta^2} = 2(\vec{N}^{(1)} - \vec{N}^{(3)}) \tag{471}$$

d'où la valeur des composantes de la courbure :

$$b_{11} = -\vec{N}_{,1}.\vec{a}_1 \quad , \quad b_{22} = -\vec{N}_{,2}.\vec{a}_2 \quad , \quad b_{12} = -0.5(\vec{N}_{,2}.\vec{a}_1 + \vec{N}_{,1}.\vec{a}_2) \tag{472}$$

Le calcul des termes b_{11} et b_{22} provient directement de la formule théorique du calcul de la courbure. Par contre pour le calcul du terme b_{12}, cela mérite une explication. En faite on sait que d'un point de vue théorique, le tenseur de courbure est symétrique, car nous avons :

$$b_{\alpha\beta} = \vec{a}_{,\alpha\beta}.\vec{N} = \frac{\partial^2 O\vec{M}}{\partial\eta^1\eta^2}.\vec{N} \tag{473}$$

Or l'approximation (471) devrait conduire à :

$$b'_{12} = -\vec{N}_{,1}.\vec{a}_2 \quad et \quad b'_{21} = -\vec{N}_{,2}.\vec{a}_1 \tag{474}$$

Or il n'y a pas de raison que dans le cadre de l'approximation (471), b'_{12} soit identique à b'_{21}. Aussi dans le modèle original, on prend donc la moyenne :

$$b_{12} = 0.5(b'_{12} + b'_{21})$$

.

En fait dans le cadre de l'implantation dans Herezh++, le tenseur de courbure est utilisé essentiellement pour calculer la variation du vecteur normale. Dans ce cas, il est possible également de garder le tenseur non symétrique ce qui conduit alors à la vraie variation constatée à partir des $\vec{N}^{(i)}$, ensuite pour d'autres calculs qui nécessiteraient un tenseur symétrique, on peut symétrise le tenseur "$\boldsymbol{b'}$". Donc les deux options sont actuellement implantées, la validation numérique montrera si une option est meilleure que l'autre.

24.4 Modèle Sfe2

Il s'agit du modèle développé par H. Laurent et G. Rio. L'idée est d'essayer de prendre en compte la non-régularité du maillage. Le modèle est présenté dans la thèse de Hervé Laurent [] et dans []. L'implantation est ici légèrement différente, mais globalement elle devrait conduire aux mêmes résultats. En particulier on ne se sert pas de la position des centres de gravité pour calculer les normales sur les arêtes.

Soit la figure (12) pour représenter une disposition courante.

Tout d'abord on calcul la normale sur les deux facettes $\vec{N}$ et $\vec{N}_e$. Ensuite la valeur de la normale sur l'arête est définie initialement à partir d'une moyenne pondérée en fonction des distances des centres de gravité à l'arête :

$$\vec{N}^{(i)} = \frac{(\vec{N}\ H_eG_i + \vec{N}_e\ GH)}{(H_eG_i + GH)} \tag{475}$$

En fait, cette moyenne pondérée est identique à la suivante :

$$\vec{N}^{(i)} = \frac{(\vec{N}\ H_aA + \vec{N}_e\ DH_d)}{(H_aA + DH_d)} \tag{476}$$

Cette dernière expression ne faisant pas intervenir explicitement la position des centres de gravité est peu plus simple. C'est donc cette expression qui est implantée dans Herezh++.

Au niveau de la position de la normale, l'idée est de trouver le point "H_i" tel que si l'on déplie la facette BAC pour la ramener dans le plan de la facette centrale DBC, le point

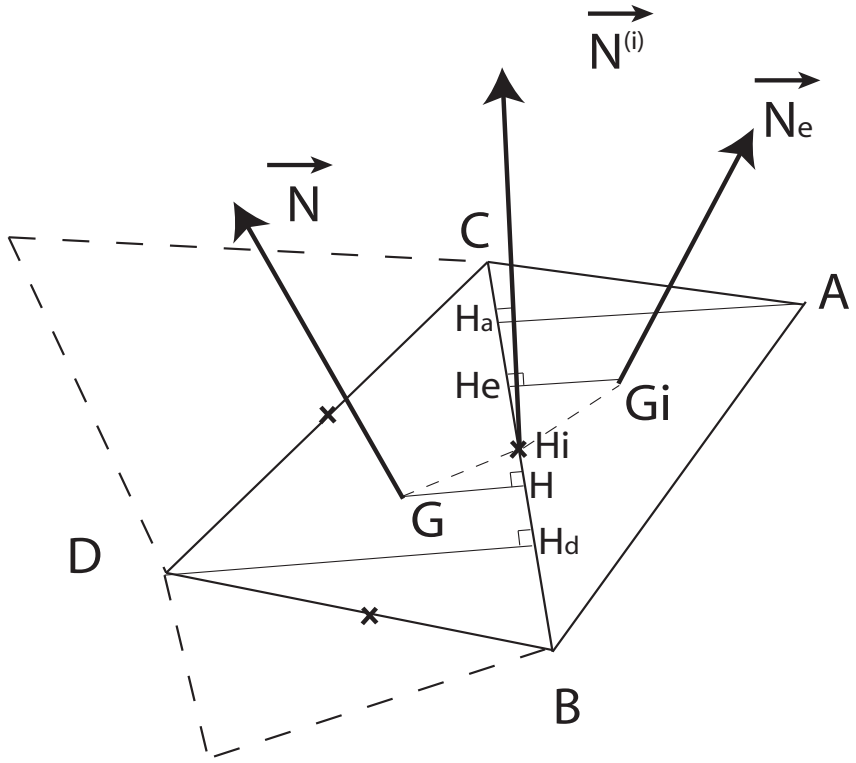

FIGURE 12 – modèle SFE2 : grandeurs pour le calcul sur une arrête

H_i se situe à l'intersection des segments BC et GG'_i, G'_i étant la nouvelle position de G_i. On doit donc avoir la relation :

$$\vec{GH_i}.\vec{CB} = \vec{H_iG_i}.\vec{CB} \tag{477}$$

En appelant $\vec{U_1} = \vec{CB}/||\vec{CB}||$ on obtient :

$$\vec{OH_i} = \vec{OB} + \beta\ \vec{U_1} \text{ avec } \beta = \frac{(\vec{BG_i} - \vec{GB}).\vec{U_1}}{2} \tag{478}$$

Le calcul de la courbure s'effectue à partir de l'interpolation des normales sur tout le triangle. Pour ce faire, on définit les fonctions d'interpolation associées aux positions H_i. Ces fonctions sont calculées à partir des coordonnées locales des points H_i. Soit O' l'origine du repère de la facette centrale (cf.13). Les coordonnées locales du point H_i s'obtiennent via :

$$\theta^{\alpha}_{(i)} = \vec{O'H_i}.\vec{a}^{\alpha} \tag{479}$$

On remarque que l'on doit avoir : $\theta^2_{(3)} = 0$ et $\theta^1_{(2)} = 0$.

En cherchant les fonctions d'interpolations sous la forme :

$$\omega_r = a_r\ \theta^1 + b_r\ \theta^2 + c_r \text{ avec } r = 1, 2, 3 \text{ et } \vec{N} = \vec{N}^r\ \omega_r \tag{480}$$

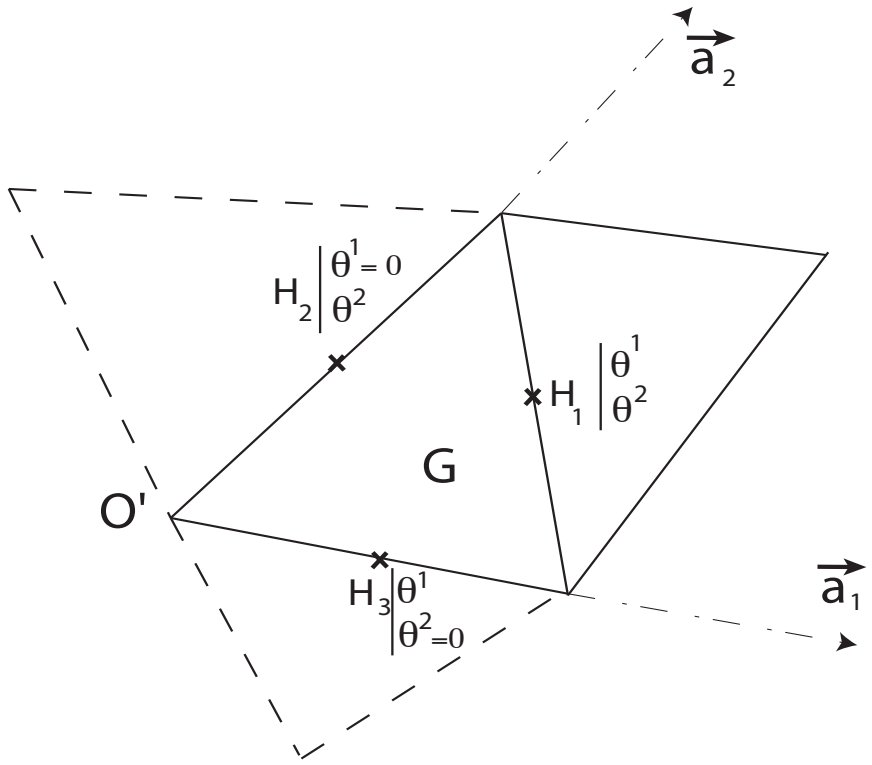

FIGURE 13 – modèle SFE2 : éléments pour le calcul des fonctions d'interpolation

On obtient en notant $s = \theta^1_{(1)}\ \theta^2_{(2)} - \theta^1_{(3)}\ \theta^2_{(2)} + \theta^2_{(1)}\ \theta^1_{(3)}$:

$$\begin{array}{llllll} a_1 = & \theta^2_{(2)}/s & b_1 = & \theta^1_{(3)}/s & c_1 = & -\theta^1_{(3)}\ \theta^2_{(2)}/s \\ a_2 = & -\theta^2_{(1)}/s & b_2 = & 1/\theta^2_{(3)} - \theta^2_{(1)}\ \theta^1_{(3)}/(s\ \theta^2_{(2)}) & c_2 = & \theta^1_{(3)}/s \\ a_3 = & 1/\theta^1_{(3)} - \theta^1_{(1)}\ \theta^2_{(2)}/(s\ \theta^1_{(3)}) & b_3 = & -\theta^1_{(1)}/s & c_3 = & \theta^2_{(2)}\ \theta^1_{(1)}/s \end{array} \tag{481}$$

Maintenant, nous pouvons calculer le tenseur de courbure selon :

$$b_{\alpha\beta} = -\vec{N}^r\ \frac{\partial \omega_r}{\partial \theta^\alpha}.\vec{a}_\beta \tag{482}$$

Le tenseur ainsi obtenu est non symétrique contrairement au tenseur d'une surface régulière. On peut éventuellement le symétriser.

Remarque Le modèle SFE2 doit conduire aux mêmes résultats que le modèle SFE1 dans le cas d'un maillage de taille d'élément constant, et pour lequel le point H_i est au milieu des cotés.

24.5 Modèle Sfe3

Il s'agit d'un modèle initialement imaginé au cours du DEA de Mathieu Porez. L'idée est d'utiliser un polynôme quadratique pour interpoler les cotes des points externes, selon

la direction normale à la face centrale. Sylvain Couëdo, dans le cadre de sa thèse, a étudié de manière comparative, l'erreur entraînée par une distorsion de la régularité des triangles, d'un maillage constitué d'un élément SFE dont les noeuds appartiennent à une sphère ou a un cylindre, et a montré que l'utilisation d'un polynôme d'interpolation conduisait à une plus faible erreur comparativement aux éléments SFE1 et SFE2. L'implantation a donc pour objectif de valider cette étude sur des maillages plus importants.

Supposons que les bases naturelle et duale associées à l'élément central DBC (on se réfère aux notations de la figure 8) soient calculées, d'où le calcul de la normale :

$$\vec{N} = \frac{\vec{a}_1 \times \vec{a}_2}{||\vec{a}_1 \times \vec{a}_2||} \tag{483}$$

On cherche à calculer la cote selon la normale du point A.

$$\theta^3 = \overrightarrow{DA}.\vec{N} \tag{484}$$

puis ses coordonnées locales dans le plan de la facette :

$$\theta^\alpha = (\overrightarrow{DA} - \theta^3 \ \vec{N}).\vec{a}^\alpha \tag{485}$$

On suppose que la surface qui passe par tous les noeuds de l'élément SFE est un polynôme en θ^α :

$$\theta^3(\theta^\alpha) = a\ (\theta^1)^2 + b\ (\theta^2)^2 + c\ \theta^1\ \theta^2 + d\ \theta^1 + e\ \theta^2 + f \tag{486}$$

Tout d'abord la surface devant passer par les sommets du triangle centrale cela entraîne : $f = 0$, $d = -a$ et $e = -b$ d'où il reste :

$$\theta^3(\theta^1, \theta^2) = a\ \theta^1\ (\theta^1 - 1.) + b\ \theta^2\ (\theta^2 - 1.) + c\ \theta^1\ \theta^2 \tag{487}$$

Dans le cas où il y a trois noeuds externes A^i cela conduit à 3 équations d'où le système à résoudre :

$$\begin{bmatrix} \theta^1_{A^1} & (\theta^1_{A^1} - 1.) & \theta^2_{A^1} & (\theta^2_{A^1} - 1.) & \theta^1_{A^1}\ \theta^2_{A^1} \\ \theta^1_{A^2} & (\theta^1_{A^2} - 1.) & \theta^2_{A^2} & (\theta^2_{A^2} - 1.) & \theta^1_{A^2}\ \theta^2_{A^2} \\ \theta^1_{A^3} & (\theta^1_{A^3} - 1.) & \theta^2_{A^3} & (\theta^2_{A^3} - 1.) & \theta^1_{A^3}\ \theta^2_{A^3} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta^3_{A^1} \\ \theta^3_{A^2} \\ \theta^3_{A^3} \end{pmatrix} \tag{488}$$

En appelant $[K]$ la matrice et (SM) le second membre on obtient :

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = [K]^{-1}(SM) \tag{489}$$

Soit "M" un point courant :

$$M \left| \begin{matrix} \theta^1 \\ \theta^2 \\ \theta^3(\theta^1, \theta^2) \end{matrix} \right. \tag{490}$$

cela conduit directement aux composantes de la courbure selon :

$$b_{\alpha\beta} = \frac{\partial^2 \vec{M}}{\partial\theta^1 \partial\theta^2}.\vec{N} \tag{491}$$

d'où :

$$b_{11} = 2\ a\ ,\quad b_{22} = 2\ b\ ,\quad b_{12} = c \tag{492}$$

Dans le cas où le noeud extérieur n'existe pas, on considère que la courbure dans la direction de ce noeud est nulle.

Soit $\vec{v}$ la direction normale à l'arête pour laquelle il n'y a pas de noeud externe.

$$(v) = \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \end{pmatrix} \tag{493}$$

v^α étant les coordonnées locales de v.

La courbure dans la direction $\vec{v}$ est :

$$b_{vv} =< v^1, v^2 > \begin{bmatrix} b_{11} & b_{21} \\ b_{12} & b_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \end{pmatrix} = 2\ (a\ (v^1)^2 + b\ (v^2)^2 + c\ (v^1\ v^2)) = 0 \tag{494}$$

Ce qui constitue une équation de remplacement à l'équation initiale :

$$a\ \theta_A^1\ (\theta_A^1 - 1.) + b\ \theta_A^2\ (\theta_A^2 - 1.) + c\ \theta_A^1\ \theta_A^2 = \theta_A^3$$

.

Dans le cas où il manque deux noeuds extérieurs, on répète deux fois la précédente opération. Enfin s'il n'y a pas de noeud extérieur en répétant 3 fois l'opération précédente on obtient naturellement une courbure nulle ce qui est cohérent.

Dans le cas où une des arêtes appartient à un axe de symétrie ou à une ligne d'encastrement, la condition correspond à une dérivée imposée dans la direction normale au plan de symétrie ou au plan d'encastrement. Soit $\vec{d}$ la direction dans laquelle la dérivée est imposée, on a :

$$\vec{d} = d^\alpha \vec{g}_\alpha + d^3 \vec{N} \quad et \quad \theta^3_{,\alpha}\ d^\alpha = d^3 \tag{495}$$

ce qui signifie que la variation d'un point géométrique de la surface : $\vec{dM}$ doit se faire dans la direction imposée $\vec{d}$.

En développant la dernière expression par exemple au point A on obtient :

$$a\ (2\theta_A^1 - 1.)d^1 + b\ (2\theta_A^2 - 1.)d^2 + c\ (\theta_A^1\ d^2 + \theta_A^2\ d^1) = d^3 \tag{496}$$

D'une manière pratique, la direction $\vec{d}$ peut-être construite à partir d'une direction donnée en entrée $\vec{w}$ et de celle de l'arrête $\vec{u}$:

$$\vec{d} = \vec{w} \times \vec{u}$$

La condition dépend alors de la direction de l'arrête, qui dépend de la position des noeuds. Cependant, dans le cas de l'opérateur tangent, par simplicité, il est peut-être possible de ne pas tenir compte de cette dépendance dans une première étape.

Dans le cas où l'on veut définir un encastrement, il faut en plus de la condition de dérivée, imposer un déplacement bloqué.

Le tenseur ainsi obtenu est naturellement symétrique.

Remarque Le tenseur ainsi obtenu est naturellement symétrique, et le polynôme ainsi construit tiens compte de la position réelle des points extérieurs, donc de la non-régularité des triangles.

24.5.1 Test simple de convergence sur une géométrie de cylindre

Supposons une géométrie de cylindre avec éventuellement un noeud manquant dans la direction de l'axe du cylindre, on montre facilement que l'on tend vers la solution exacte.

Onzième partie

Chargement et Conditions limites

25 torseur d'efforts via une répartition de charges ponctuelles

Il est parfois utile de pouvoir imposer un chargement globalement, selon une répartition spatiale voulue et avec au final, une résultante et un moment donnés : c'est-à-dire avec un torseur d'efforts donnés. Ce pose alors la question de l'application en pratique des efforts sur la structure dans le cadre d'un calcul par éléments finis.

Dans cette partie, on va utiliser une répartition d'efforts ponctuelles, appliqués aux noeuds, qui permet d'appliquer au final un torseur d'effort désiré. On suppose donc connu en entrée :

- un ensemble de noeuds sur lesquels seront appliqué les efforts ponctuelles. Chaque noeud sera repéré par une position "P_i".
- un torseur d'effort représenté par une résultante : $\vec{R}$ et un moment $\vec{M}_{/o'}$, par rapport à un point "o' " également connu.
- une fonction à valeur scalaire de répartition d'effort $f(\vec{O'P_i})$ qui indique le type de répartition spatiale d'intensité d'effort ponctuel que l'on désire obtenir. Par exemple si la fonction "f" est linéaire on introduit ainsi un moment de torsion classique.

Dans une première étape on calcule le centre de gravité "G" de l'ensemble des points pondérés avec la fonction f. On a :

$$\vec{O'G} = \frac{\sum_i \vec{O'P_i}.f(\vec{O'P_i})}{\sum_i f(\vec{O'P_i})} \tag{497}$$

On transporte alors le moment au point G' :

$$\vec{M}_{/G} = \vec{M}_{/o'} - \vec{O'G} \wedge \vec{R} \tag{498}$$

Soit $\vec{m}$ le vecteur unitaire de $\vec{M}_{/G}$ et soit P'_i la projection du point P_i sur le plan géométrique normale au vecteur $\vec{M}_{/G}$ et passant par "G". On a donc :

$$\vec{GP'}_i = \vec{GP}_i - (\vec{GP}_i.\vec{m})\ \vec{m} \text{ avec } \vec{m} = \frac{\vec{M}_{/G}}{||\vec{M}_{/G}||} \tag{499}$$

avec le scalaire $M_{/G} \geq 0$

On considère le vecteur $\vec{t_i}$ qui est proportionnel à $\vec{GP'}_i \wedge \vec{m}$ et qui s'écrit :

$$\vec{t_i} = \beta\ GP'_i\ \vec{t'_i}\ f(\vec{O'P_i}) \tag{500}$$

avec $\vec{t'_i}$ le vecteur unitaire de la direction, donc normal à $\vec{GP'}_i$ et $\vec{m}$. $\vec{GP'}_i$ étant normale à $\vec{m}$:

$$\vec{t'_i} = \frac{\vec{m} \wedge \vec{GP'}_i}{||\vec{GP'}_i||} \tag{501}$$

Le moment exercé par $\vec{t_i}$ appliqué en P'_i, autour de $\vec{m}$ est :

$$\vec{M_i} = \vec{m}\ \beta\ (GP'_i)^2\ f(\vec{O'P_i}) \tag{502}$$

Maintenant en considérant que l'ensemble de ces moments individuels vaut la valeur recherchée $\vec{M}_{/G}$:

$$\sum_i \vec{M}_i = \beta \sum_i \vec{m}\ (GP'_i)^2\ f(O'\vec{P}_i) = \vec{M}_{/G} \tag{503}$$

on en déduit :

$$\beta = \frac{M_{/G}}{\sum_i\ (GP'_i)^2\ f(O'\vec{P}_i)} \tag{504}$$

Ce qui permet d'obtenir les moments exercés individuellement :

$$\vec{M}_i = \frac{M_{/G}\ \vec{m}}{\sum_i\ (GP'_i)^2\ f(O'\vec{P}_i)}\ (GP'_i)^2\ f(O'\vec{P}_i) = \frac{(GP'_i)^2\ f(O'\vec{P}_i)}{\sum_i\ (GP'_i)^2\ f(O'\vec{P}_i)}\ \vec{M}_{/G} \tag{505}$$

Maintenant on considère la répartition suivante de forces ponctuelles :

$$\vec{F}_i = \alpha\ f(O'\vec{P}_i)\ \vec{R} + \vec{t}_i = \alpha\ f(O'\vec{P}_i)\ \vec{R} + \beta\ GP'_i\ \vec{t}'_i\ f(O'\vec{P}_i) \tag{506}$$

On en calcule la somme que l'on veut égale à la résultante :

$$\vec{R} = \sum_i \vec{F}_i = \alpha \sum_i\ f(O'\vec{P}_i)\ \vec{R} + \beta \sum_i\ GP'_i\ \vec{t}'_i\ f(O'\vec{P}_i) \tag{507}$$

On peut remarquer la relation suivante en tenant compte du fait que $\vec{P'_iP_i}$ est colinéaire avec $\vec{m}$:

$$\vec{GP}_i \wedge \vec{m} = (\vec{GP'}_i + \vec{P'_iP_i}) \wedge \vec{m} = \vec{GP'}_i \wedge \vec{m} = GP'_i\ \vec{t}'_i \tag{508}$$

Ce qui permet d'écrire :

$$\sum_i\ GP'_i\ \vec{t}'_i\ f(O'\vec{P}_i) = \left(\sum_i\ \vec{GP}_i\ f(O'\vec{P}_i)\right)\ \vec{t}'_i = \vec{0} \tag{509}$$

d'où

$$\alpha = \frac{1}{\sum_i\ f(O'\vec{P}_i)} \tag{510}$$

et la valeur des fonctions ponctuelles :

$$\vec{F}_i = \frac{f(O'\vec{P}_i)}{\sum_j\ f(O'\vec{P}_j)}\ \vec{R} + \vec{t}_i \tag{511}$$

Calculons le moment de cette répartition de force $\vec{F}_i$:

$$\sum_i\ \vec{GP}_i\ \wedge\ \vec{F}_i = \sum_i\ \vec{GP}_i\ \wedge\ \frac{f(O'\vec{P}_i)}{\sum_j\ f(O'\vec{P}_j)}\ \vec{R} + \sum_i\ \vec{GP}_i\ \wedge\ \vec{t}_i \tag{512}$$

Montrons que le premier terme est nul :

$$\sum_i\ \vec{GP}_i \wedge \frac{f(O'\vec{P}_i)}{\sum_i\ f(O'\vec{P}_i)}\ \vec{R} = \frac{1}{\sum_j\ f(O'\vec{P}_j)} \sum_i\ \left(\vec{GP}_i\ f(O'\vec{P}_i)\right) \wedge \vec{R} = \frac{1}{\sum_j\ f(O'\vec{P}_j)}\ \vec{O} \wedge \vec{R} = \vec{O} \tag{513}$$

d'où

$$\sum_i \vec{GP_i} \wedge \vec{F_i} = \sum_i \vec{GP_i} \wedge \vec{t_i} = \sum_i \vec{M_i} = M_{/G} \tag{514}$$

On a donc déterminé une répartition de forces ponctuelles $\vec{F_i}$ dont la résultante et le moment résultant correspondent à des valeurs voulues, ceci avec une pondération donnée : $f(\vec{O'P_j})$. L'expression finale de la répartition est ainsi :

$$\begin{aligned}
\vec{F_i} &= f(\vec{O'P_i})\alpha\ \vec{R} + \beta\ GP'_i\ \vec{t}_i\ f(\vec{O'P_i}) \\
&= f(\vec{O'P_i}) \left(\alpha\ \vec{R} + \beta\ GP'_i\ \frac{\vec{m} \wedge \vec{GP'}_i}{||\vec{GP'}_i||} \right) \\
&= f(\vec{O'P_i}) \left(\alpha\ \vec{R} + \beta\ \vec{m} \wedge \vec{GP'}_i \right) \\
&= f(\vec{O'P_i}) \left(\alpha\ \vec{R} + \beta\ \vec{m} \wedge \vec{GP}_i \right)
\end{aligned} \tag{515}$$

avec

$$\beta = \frac{M_{/G}}{\sum_i\ (GP'_i)^2\ f(\vec{O'P_i})} \quad et \quad \alpha = \frac{1}{\sum_i\ f(\vec{O'P_i})}$$

Douzième partie

Méthodes de calcul

26 Calcul de grandeurs globales

L'objectif est ici de décrire les méthodes utilisées dans Herezh++ pour le calcul de grandeurs globales.

1. `energie_cinetique` L'énergie cinétique est calculée à l'aide de la matrice masse et des vitesses aux noeuds. La matrice masse peut-être une matrice diagonale ("lumped") ou la matrice complète ("consistante") selon le choix du type de matrice masse retenue par l'utilisateur. Les vitesses sont celles calculées à chaque noeuds. La formule finale est donc :

$$E_{cin}(t+\Delta t) = \frac{1}{2} < V(t+\Delta t) > [M](V(t+\Delta t)) \tag{516}$$

2. `energie_externe` On part de l'idée que l'énergie externe vaut :

$$E_{ext}(t+\Delta t) = \int_{t=0}^{t+\Delta t} \vec{F}_{ext}(t).d\vec{X} \tag{517}$$

   Compte tenu de l'évolution incrémentale du calcul dans Herezh, la formule devient :

$$E_{ext}(t+\Delta t) = E_{ext}(t) + \frac{< F_{ext}(t) + F_{ext}(t+\Delta t) > (\Delta X)}{2} \tag{518}$$

   F_{ext} représente l'ensemble des forces externes ramenées aux noeuds.
   Pour les forces ponctuelles, cela correspond directement à la composante exprimée au noeud.
   Pour les forces surfaciques $\vec{T}$, il s'agit de :

$$\int_s \vec{T}.\overset{*}{\vec{V}}\, ds = <\overset{*}{V}^{ar}> (\int_s \vec{T}.\vec{I}_a \varphi_r ds) \tag{519}$$

   avec "r" le numéro du noeud, "a" l'indice de coordonnée global et φ_r la fonction d'interpolation de surface au noeud r. Le vecteur F_{ext} intègre alors les grandeurs $(\int_s \vec{T}.\vec{I}_a \varphi_r ds)$
   Pour les forces volumique $\vec{F}_v$:

$$\int_{vol} \vec{F}_v.\overset{*}{\vec{V}}\, dv = <\overset{*}{V}^{ar}> (\int_{vol} \vec{F}.\vec{I}_a \varphi_r dv) \tag{520}$$

   La différence par rapport au cas surfacique, concerne les fonctions d'interpolation qui sont relatives ici au volume des éléments. Le vecteur F_{ext} intègre ici les grandeurs $(\int_{vol} \vec{F}_v.\vec{I}_a \varphi_r dv)$
3. `energie_interne` On suit la même logique que pour l'énergie externe avec la formule incrémentale :

$$E_{int}(t+\Delta t) = E_{int}(t) + \frac{< F_{int}(t) + F_{int}(t+\Delta t) > (\Delta X)}{2} \tag{521}$$

F_{int} correspond aux forces internes généralisées qui sont déduites du principe des puissances virtuelles via dans le cas courant :

$$\begin{aligned}\sum_e \int_{elemente} \boldsymbol{\sigma} : \overset{*}{\boldsymbol{D}}\, dv &= <\overset{*}{V}^{ar}> \int_{elemente} \sigma^{ij}(\varphi_{r,i}\vec{I}_a.\vec{g}_j)dv \\ &= <\overset{*}{V}^{ar}> \int_{elemente} \sigma^{ij}(\varphi_{r,i}\vec{I}_a)(X^{bs}\varphi_{s,j}\vec{I}_b)dv \\ &= <\overset{*}{V}^{ar}> (F_{int}) \end{aligned} \quad (522)$$

4. `puissance_acceleration` : il s'agit de la puissance développée par les forces d'inertie calculée globalement selon :

$$P_{acc}(t+\Delta t) = \vec{V}.(\boldsymbol{M}.\vec{\gamma}) =< V(t+\Delta t) > [M](\gamma(t+\Delta t)) \quad (523)$$

avec V le vecteur global des vitesses aux noeuds, M la matrice masse, γ le vecteur globale d'accélération aux noeuds.

5. `puissance_interne` : il s'agit de la puissance développée par les forces internes généralisées :

$$P_{int}(t+\Delta t) =< V(t+\Delta t) > (F_{int}) \quad (524)$$

6. `puissance_externe` : il s'agit de la puissance développée par les forces externes globalisées :

$$P_{ext}(t+\Delta t) =< V(t+\Delta t) > (F_{ext}) \quad (525)$$

7. `energie_elastique` : Globalise la totalité de l'énergie élastique échangée par la structure. L'énergie est la somme sur tous les éléments et tous les points d'intégration, de la partie élastique de la loi de comportement.

$$E_{elas} = \sum_{elements} \int_{elem} E_{elas}(loi)dv = \sum_{elements} \sum_{pti} E_{elas}(loi, pti)\ W(pti)\ \sqrt{g(pti)} \quad (526)$$

où W est le poids d'intégration au point d'intégration "pti", $\sqrt{g}$ est le jacobien.

8. `energie_plastique` : Globalise la totalité de la dissipation plastique depuis le début du chargement. L'énergie est la somme sur tous les éléments et tous les points d'intégration, de la partie dissipation plastique de la loi de comportement.

$$\begin{aligned} E_{plas} &= \sum_{elements} \int_0^{t+\Delta t} \int_{elem} E_{plas}(loi)dv \\ &= \sum_{elements} \left(E_{plas}(loi, \text{sur l'élément à t}) + \Delta_t^{t+\Delta t} E_{plas}(loi, pti)\ W(pti)\ \sqrt{g(pti)} \right) \end{aligned} \quad (527)$$

où W est le poids d'intégration au point d'intégration "pti", $\sqrt{g}$ est le jacobien.

9. energie_visqueuse : Globalise la totalité de la dissipation visqueuse depuis le début du chargement. L'énergie est la somme sur tous les éléments et tous les points d'intégration, de la partie dissipation visqueuse de la loi de comportement.

$$\begin{aligned} E_{vis} &= \sum_{elements} \int_0^{t+\Delta t} \int_{elem} E_{vis}(loi) dv \\ &= \sum_{elements} \left(E_{vis}(loi, \text{sur l'élément à t}) + \Delta_t^{t+\Delta t} E_{vis}(loi, pti)\ W(pti)\ \sqrt{g(pti)} \right) \end{aligned} \tag{528}$$

où W est le poids d'intégration au point d'intégration "pti", $\sqrt{g}$ est le jacobien.

10. energie_hourglass : à pour objectif de donner une valeur approchée de l'énergie développée pour le blocage des mode d'houglass. Deux cas sont à considérer suivant le type de blocage choisit (cf. le manuel d'utilisateur) :
   - STABHOURGLASS_PAR_COMPORTEMENT : le blocage s'effectue via la sur-imposition d'une contrainte supplémentaire et une intégration complète. La contrainte est calculée avec une loi particulière choisit par l'utilisateur. L'énergie de blocage d'hourglass correspond à la totalité (élastique+plastique+visqueuse) de l'énergie associée avec cette sur-imposition, globalisée sur l'ensemble des éléments stabilisés.
   - STABHOURGLASS_PAR_COMPORTEMENT_REDUIT : comme avec le premier cas, l'idée est de sur-imposer à l'élément, une contrainte supplémentaire et une intégration complète. Cependant, cette contrainte supplémentaire n'est déterminée précisément à l'aide de la loi de comportement particulière qu'à la première itération en implicite, ou au premier incrément en explicite, ou à des instants particuliers. La matrice de raideur associée $[K_{sup}]$ est ensuite sauvegardée pour les itérations ou incréments suivants. La stabilisation est alors effectuée en considérant une force élastique ($F_{stab} = -\alpha[K_{sup}](\Delta ddl)$. L'énergie de stabilisation est alors calculée via :

$$E_{stab} = \sum_{elements} \int_{elem} E_{stab} dv = \sum_{elements} \sum_{pti} \alpha < \Delta ddl > [K_{sup}](\Delta ddl)\ W(pti)\ \sqrt{g(pti)} \tag{529}$$

11. energie_penalisation : elle correspond à l'énergie de pénétration développée par les éléments de contact via la méthode de pénalisation. Elle globalise l'énergie de pénétration de tous les éléments. Sur chaque élément de contact l'énergie est calculée selon :

$$energie_penalisation = 0.5\ F_N\ gap \tag{530}$$

F_N est la force normale de contact, calculée via la pénalisation, gap est la profondeur de pénétration.

12. energie_frot_elast : elle correspond à l'énergie élastique développée par les forces tangentielles de contact, lorsque le contact n'est pas glissant. Elle globalise l'énergie de tous les éléments de contact. Sur chaque élément de contact l'énergie est calculée selon :

$$energie_frot_elast = 0.5\ F_T\ dep_tangentiel \tag{531}$$

avec F_T est la force tangentielle, *dep_tangentiel* le déplacement tangentiel.

13. `energie_frot_plast` : elle correspond à l'énergie développée par les forces tangentielles de contact pendant un glissement. Elles globalisent l'énergie de tous les éléments de contact. Dans le cas d'un frottement de Coulomb la force de frottement sur un élément de contact est calculée selon :

$$F_frot = force_tangente.\mu_{frot}||\vec{F}_{normale}||/||\vec{F}_{tangente}|| \tag{532}$$

où la force de contact est décomposée en $\vec{F}_{normale}$ et $\vec{F}_{tangente}$, $force_tangente$ est la valeur algébrique de la force tangente, μ_{frot} est le coefficient de Coulomb.
D'où le calcul de l'énergie de frottement selon :

$$\Delta energie_frot_plast = F_frot.vit_T.\Delta t \tag{533}$$

ou vit_T est l'intensité de la vitesse de déplacement et Δt la durée de l'incrément de déplacement
Ensuite cette énergie est sommée sur tous les éléments de contact et accumulée tout au long du chargement. Elle est irréversible, elle ne peut qu'augmenter.

14. `energie_visco_numerique` : Globalise la totalité de la dissipation visqueuse d'origine numérique : amortissement de Rayleigh, depuis le début du chargement. La viscosité numérique conduit à l'apparition de forces visqueuse définies à chaque noeud $forces_vis_num$ d'où le calcul de énergie visqueuse associée :

$$E^{t+\Delta t}_{vis\ num} = E^{t}_{vis\ num} + < \Delta X > (forces_vis_num) \tag{534}$$

15. `energie_bulk_viscosity` : Le "bulk viscosity" est une technique permettant d'atténuer les hautes fréquences dites "numériques" qui apparaîssent lors d'un calcul dynamique. La méthode consiste à introduire une modification de la contrainte fonction de la vitesse de déformation, ce qui entraîne l'apparition d'une énergie associée fictive qu'il est important de pouvoir mesurer pour valider ou non le calcul final.
Le calcul de l'énergie associée s'effectue en sommant sur tous les éléments et points d'intégration où la contrainte "bulk viscosity" est introduite :

$$\begin{aligned} q &= \rho\ l\ \left((C_B)^2\ l\ (\boldsymbol{I}_D)^2 - C_T\ C\ \boldsymbol{I}_D\right) \\ E^{t+\Delta t}_{bulk} &= E^{t}_{bulk} + \sum_{elements}\sum_{pti}\left(-q\ \boldsymbol{I}_D\ \Delta t\ W(pti)\ \sqrt{g(pti)}\right) \\ P^{t+\Delta t}_{bulk} &= P^{t}_{bulk} + \sum_{elements}\sum_{pti}\left(-q\ \boldsymbol{I}_D\ W(pti)\ \sqrt{g(pti)}\right) \end{aligned} \tag{535}$$

avec C la célérité d'une onde de compression, "l" la longueur géométrique caractéristique de l'élément, "C_B" et "C_T" les deux coefficients qui pilotent l'intensité de la contrainte "bulk viscosity" (cf. documentation utilisateur), $\boldsymbol{I}_D$ la trace du tenseur vitesse de déformation, $W(pti)$ est le poids d'intégration au point d'intégration "pti", $\sqrt{g}$ est le jacobien.

16. volume_total_matiere : Le volume total de matière est obtenue en sommant les volumes élémentaires associées aux points d'intégration des éléments :

$$volume_total_matiere = \sum_{elements} \sum_{pti} \left(W(pti) \ \sqrt{g(pti)} \right) \tag{536}$$

avec $W(pti)$ le poids d'intégration au point d'intégration "pti", $\sqrt{g(pti)}$ le jacobien.

17. energie_stabilisation_membrane_biel : N'est effective que pour les membranes (V 6.938) . L'idée est d'introduire une raideur suivant la direction normale au plan de la membrane. La force des raideurs est égale à :

$$\vec{F} = -\alpha \times [(\vec{X}(t + \Delta t) - \vec{X}(t)).\vec{N}] \times \vec{N} \tag{537}$$

où α est l'intensité de la raideur de stabilisation, $(\Delta\vec{X} = \vec{X}(t+\Delta t) - \vec{X}(t))$ représente la variation de position du point (donc de chaque noeud) entre le début et la fin de l'incrément, $\vec{N}$ est la normale à la membrane calculée à chaque point d'intégration. D'où l'énergie de stabilisation calculée comme celle d'un comportement élastique de rappel à l'image d'une pénalisation :

$$energie_stabilisation_membrane_biel = 0.5 \ F \ (\Delta\vec{X}.\vec{N}) \tag{538}$$

18. vol_total2D_avec_plan_yz ,
vol_total2D_avec_plan_xz ,
vol_total2D_avec_plan_xy :
Ces grandeurs sont spécifiques aux structures 2D membranaires. Il s'agit du volume entre un plan et la membrane. Le calcul s'effectue en sommant sur les éléments, le volume individuel compris entre le plan et l'élément fini membrane. Pour ce faire, l'élément fini est décomposé en triangles linéaires : ex : un triangle quadratique est décomposé en 4 triangles linéaires, cf. la documentation utilisateur pour le détail exhaustif de la triangulation linéaire de tous les éléments. Chaque triangle linéaire avec le plan associé, conduit à la création d'un volume pentaédrique dont on peut calculer l'intégral exact, d'où le volume complet final par sommation de tous les volumes pentaédriques.

19. maxpuissext : le maximum de puissance extérieure. Par défaut il s'agit de la puissance virtuelle pour une vitesse de 1, ce qui conduit en fait aux forces extérieures $\vec{F}_{ext}$. Ainsi maxpuissext représente le maximum des forces extérieures en jeux pendant le calcul.
maxpuissext $= ||\vec{F}_{ext}||_\infty$
Ces forces correspondent aux forces imposées et elles incluent les forces de contact ! par contre elles n'incluent pas les réactions dues aux cinématiques imposées.

20. maxpuissint : le maximum de puissance intérieure. Comme pour la puissance extérieure, il s'agit par défaut de la puissance virtuelle intérieure pour une vitesse de 1, ce qui conduit en fait aux forces généralisées intérieures $\vec{F}_{int}$. maxpuissint représente ainsi le maximum des forces généralisées intérieures, en jeux pendant le calcul.

maxpuissint $= ||\vec{F}_{int}||_\infty$
Les forces intérieures sont dues au comportement interne du matériau, elles sont donc directement pilotées par les lois de comportement utilisées dans le calcul.

21. maxreaction :
le maximum des réactions maxreaction $= ||\vec{R}eac||_\infty$
dues aux cinématiques imposées.

22. maxresiduglobal :
le maximum du résidu global d'équilibre maxresiduglobal $= ||\vec{R}||_\infty$

23. maxdeltax :
le maximum de l'incrément de déplacement entre les instants "t" et "t+Δt" :
maxdeltax $= ||\Delta_t^{t+\Delta t}\vec{X}||_\infty$.
Cette grandeur est mise à jour à chaque itération et chaque incrément.

24. maxvardeltax :
le maximum de variation de l'incrément de déplacement entre 2 itérations en implicite et entre 2 incréments en explicite.
maxvardeltax $= ||\delta_i^{i+1}\left(\Delta_t^{t+\Delta t}\vec{X}\right)||_\infty$

25. le maximum de l'incrément de degré de liberté entre les instants "t" et "t+Δt" :
maxvarddl $= ||\Delta_t^{t+\Delta t}\vec{ddl}||_\infty$.
Cette grandeur est mise à jour à chaque itération et chaque incrément. Ici il s'agit des ddl primaires correspondant à l'équation d'équilibre global et du type de problème.
   - En dynamique explicite, il s'agit des accélérations entre "t" et "t+Δt",
   - en dynamique implicite, il s'agit de la variation des accélérations entre l'itération "i" et "i+1",
   - en mécanique statique et transitoire, il s'agit de la variation des déplacements entre l'itération "i" et "i+1",
   - en thermique statique et transitoire il s'agit de la variation des températures entre l'itération "i" et "i+1".

26. concernant les algorithmes
   - la valeur de la norme utilisée pour la convergence globale, mot clé : " norme_de_convergence "
   - le numéro des itérations d'équilibre en cours dans l'algorithme global, mot clé : " compteur_iteration_algo_global "
   - le numéro d'incrément de chargement en cours dans l'algorithme global, mot clé : " compteur_increment_charge_algo_global "
   - le numéro interne de définition de l'algorithme en cours, mot clé : algo_global_actuel
     On se reportera à la documentation utilisateur pour plus de détail concernant la signification de ce numéro.

Treizième partie
Annexes

27 Eléments particuliers de calcul tensoriel

27.1 Calcul matriciel pour les changements de base

Supposons deux bases curvilignes $\vec{g}_i$ et $\vec{g}'_i$ et les bases duales associés : $\vec{g}^i$ et $\vec{g}'^i$. La base $\vec{g}'_i$ peut s'écrire dans la base $\vec{g}_i$ et de même pour $\vec{g}'^i$ dans $\vec{g}^i$

$$\vec{g}'_i = \beta_i^{.j}\vec{g}_j \quad , \quad \vec{g}'^i = \gamma^i_{.j}\vec{g}^j \tag{539}$$

On peut aussi exprimer ces relations sous forme matricielle :

$$(\vec{g}'_i) = \left[\beta_i^{.j}\right](\vec{g}_j) \quad , \quad \left(\vec{g}'^i\right) = \left[\gamma^i_{.j}\right]\left(\vec{g}^j\right) \tag{540}$$

Pour les matrices $\left[\beta_i^{.j}\right]$ et $\left[\gamma^i_{.j}\right]$, le premier indice est l'indice de ligne et le second indice et l'indice de colonne.

Comme nous avons par définition de la base duale : $\vec{g}'_i.\vec{g}'^j = \delta_i^j$, cela conduit à : une relation sur les matrices associées :

$$\begin{aligned} \vec{g}'_i.\vec{g}'^j &= \delta_i^j = \beta_i^{.e}\vec{g}_e\ \gamma^j_{.f}\vec{g}^f \\ &= \beta_i^{.e}\ \gamma^j_{.f}\ \delta_e^f \\ &= \beta_i^{.e}\ \gamma^j_{.e} \end{aligned} \tag{541}$$

d'où sous forme matricielle

$$\begin{aligned} \left[< \vec{g}'_i > \left(\vec{g}'^j\right)\right] &= \left[\delta_i^{.j}\right] \\ &= \left[\beta_i^{.e}\right]\left[\gamma^j_{.e}\right]^T \end{aligned} \tag{542}$$

ou encore :

$$\left[\beta_j^{.i}\right]^{-1} = \left[\gamma^i_{.j}\right]^T = \left[\gamma^{(T)}{}^{.i}_{j}\right] \quad et \quad \left[\beta_i^{.j}\right]^{-1T} = \left[\beta^{(T)}{}^{j}_{.i}\right]^{-1} = \left[\gamma^j_{.i}\right] \tag{543}$$

Dans ces relations la signification des indices "i" et "j" n'est pas celles des indices de tenseurs par exemple, car on traite ici l'ensemble de la matrice. Ce sont dans tous les cas des indices muets. Par contre leurs positions a de l'importance, le premier indiquant l'indice de ligne et le second l'indice de colonne. En inversant on a aussi :

$$\left[\beta_j^{.i}\right] = \left[\gamma^i_{.j}\right]^{-1T} = \left[\gamma^{(T)}{}^{.i}_{j}\right] \quad et \quad \left[\beta_i^{.j}\right]^T = \left[\beta^{(T)}{}^{j}_{.i}\right] = \left[\gamma^j_{.i}\right]^{-1} \tag{544}$$

27.1.1 Application pour un changement de base quelconque d'un vecteur

Supposons un vecteur $\vec{A} = A_i\vec{g}^i = A'_k\vec{g}'^k$. On cherche à exprimer A_i en fonction de A'_k et vice versa.

On a naturellement :

$$A_i = A'_k\gamma^k_{.i} \text{ ou sous forme matricielle } (A_i) = \left[\gamma^k_{.i}\right]^T(A'_k) \tag{545}$$

D'où également la relation inverse :

$$(A'_f) = \left[\left[\gamma^{i}_{.f}\right]^T\right]^{-1}\left[\gamma^{k}_{.i}\right]^T(A'_k) = \left[\gamma^{i}_{.f}\right]^{-1T}(A_i) = \left[\beta^{.i}_{f}\right](A_i) \tag{546}$$

Cas des coordonnées contravariantes, $\vec{A} = A^i\vec{g}_i = A'^k\vec{g}'_k$. On cherche à exprimer A^i en fonction de A'^k et vice versa. On a naturellement :

$$A^i = A'^k\beta^{.i}_{k} \text{ ou sous forme matricielle } (A^i) = \left[\beta^{.i}_{k}\right]^T(A'^k) \tag{547}$$

D'où également la relation inverse :

$$(A'^f) = \left[\left[\beta^{.f}_{i}\right]^T\right]^{-1}\left[\beta^{.i}_{k}\right]^T(A'^k) = \left[\beta^{.f}_{i}\right]^{-1T}(A^i) = \left[\gamma^{f}_{.i}\right](A^i) \tag{548}$$

27.1.2 Application pour un changement de base quelconque d'un tenseur

Supposons un tenseur $\boldsymbol{A} = A_{ij}\vec{g}^i\otimes\vec{g}^j = A'_{kl}\vec{g}'^k\otimes\vec{g}'^l$. On cherche à exprimer A_{ij} en fonction de A'_{kl} et vice versa.

On a naturellement :

$$A_{ij} = A'_{kl}\gamma^{k}_{.i}\gamma^{l}_{.j} \text{ ou sous forme matricielle } [A_{ij}] = \left[\gamma^{k}_{.i}\right]^T[A'_{kl}]\left[\gamma^{l}_{.j}\right] \tag{549}$$

D'où également la relation inverse :

$$[A'_{fe}] = \left[\left[\gamma^{i}_{.f}\right]^T\right]^{-1}\left[\gamma^{k}_{.i}\right]^T[A'_{kl}]\left[\gamma^{l}_{.j}\right]\left[\gamma^{j}_{.e}\right]^{-1} = \left[\gamma^{i}_{.f}\right]^{-1T}[A_{ij}]\left[\gamma^{j}_{.e}\right]^{-1} = \left[\beta^{.i}_{f}\right][A_{ij}]\left[\beta^{.j}_{e}\right]^T \tag{550}$$

Cas des coordonnées deux fois contravariantes, $\boldsymbol{A} = A^{ij}\vec{g}_i\otimes\vec{g}_j = A'^{kl}\vec{g}'_k\otimes\vec{g}'_l$. On cherche à exprimer A^{ij} en fonction de A'^{kl} et vice versa. On a naturellement :

$$A^{ij} = A'^{kl}\beta^{.i}_{k}\beta^{.j}_{l} \text{ ou sous forme matricielle } [A^{ij}] = \left[\beta^{.i}_{k}\right]^T[A'^{kl}]\left[\beta^{.j}_{l}\right] \tag{551}$$

D'où également la relation inverse :

$$[A'^{fe}] = \left[\left[\beta^{.f}_{i}\right]^T\right]^{-1}\left[\beta^{.i}_{k}\right]^T[A'^{kl}]\left[\beta^{.j}_{l}\right]\left[\beta^{.e}_{j}\right]^{-1} = \left[\beta^{.f}_{i}\right]^{-1T}[A^{ij}]\left[\beta^{.e}_{j}\right]^{-1} = \left[\gamma^{f}_{.i}\right][A^{ij}]\left[\gamma^{e}_{.j}\right]^T \tag{552}$$

Cas des coordonnées mixtes covariantes contravariantes, $\boldsymbol{A} = A^{.j}_{i}\vec{g}^i\otimes\vec{g}_j = A'^{.l}_{k}\vec{g}'^k\otimes\vec{g}'_l$. On cherche à exprimer $A^{.j}_{i}$ en fonction de $A'^{.l}_{k}$ et vice versa. On a naturellement :

$$A^{.j}_{i} = A'^{.l}_{k}\gamma^{k}_{.i}\beta^{.j}_{l} \text{ ou sous forme matricielle } A^{.j}_{i} = \left[\gamma^{k}_{.i}\right]^T\left[A'^{.l}_{k}\right]\left[\beta^{.j}_{l}\right] \tag{553}$$

D'où également la relation inverse :

$$\left[A'^{.e}_{f}\right] = \left[\left[\gamma^{i}_{.f}\right]^T\right]^{-1}\left[\gamma^{k}_{.i}\right]^T\left[A'^{.l}_{k}\right]\left[\beta^{.j}_{l}\right]\left[\beta^{.e}_{j}\right]^{-1} = \left[\gamma^{i}_{.f}\right]^{-1T}\left[A^{.j}_{i}\right]\left[\beta^{.e}_{j}\right]^{-1} = \left[\beta^{.i}_{f}\right]\left[A^{.j}_{i}\right]\left[\gamma^{e}_{.j}\right]^T \tag{554}$$

Et pour finir, le cas mixte : contravariant covariant, on a :

$$A^{i}_{.j} = A'^{k}_{.l}\beta^{.i}_{k}\gamma^{l}_{.j} \text{ ou sous forme matricielle } A^{i}_{.j} = \left[\beta^{.i}_{k}\right]^T\left[A'^{k}_{.l}\right]\left[\gamma^{l}_{.j}\right] \tag{555}$$

et la relation inverse :

$$\left[A'^{f}_{.e}\right] = \left[\left[\beta^{.f}_{i}\right]^T\right]^{-1}\left[\beta^{.i}_{k}\right]^T\left[A'^{k}_{.l}\right]\left[\gamma^{l}_{.j}\right]\left[\gamma^{j}_{.e}\right]^{-1} = \left[\left[\beta^{.f}_{i}\right]^T\right]^{-1}\left[A^{i}_{.j}\right]\left[\gamma^{j}_{.e}\right]^{-1} = \left[\gamma^{f}_{.i}\right]\left[A^{i}_{.j}\right]\left[\beta^{.j}_{e}\right]^T \tag{556}$$

27.1.3 Cas particulier de la base absolue

Supposons que les vecteurs $\vec{g}_i$ et $\vec{g}^i$ s'écrivent selon :

$$\vec{g}_i = B_i^{.a}\ \vec{I}_a \quad et \quad \vec{g}^i = A_{.a}^i\ \vec{I}^a \tag{557}$$

Si l'on utilise les formules génériques pour passer des bases $\vec{g}_i$ et $\vec{g}^i$ à la base absolue il nous faut calculer les matrices $[\beta]$ et $[\gamma]$. Par définition nous avons alors :

$$\vec{g}'_a = \vec{I}_a = \beta_a^{.j}\vec{g}_j \quad , \quad \vec{g}'^b = \vec{I}^b = \gamma_{.j}^b\vec{g}^j \tag{558}$$

d'où

$$\beta_a^{.j} = \vec{I}_a.\vec{g}^j = A_{.a}^j \quad , \quad \gamma_{.j}^b = \vec{I}^b.\vec{g}_j = B_j^{.b} \tag{559}$$

c'est-à-dire sous forme matricielle et compte tenue des relations qui existent entre $[\beta]$ et $[\gamma]$:

$$[\beta_a^{.j}] = [A_{.a}^j] = [A_a^{.j}]^T = \left[\gamma_{.a}^j\right]^{-1T} \quad , \quad [\gamma_{.j}^b] = [B_j^{.b}] = [B_{.j}^b]^T = \left[\beta_j^{.b}\right]^{-1T} \tag{560}$$

27.2 Particularités liées à plusieurs paramétrages matériels

Supposons deux types de coordonnées curvilignes θ^i et θ'^i et les vecteurs de bases naturelles associées : $\vec{g}_i = \frac{\partial \vec{M}}{\partial \theta^i}$ et $\vec{g}'_i = \frac{\partial \vec{M}}{\partial \theta'^i}$. Par définition les composantes covariantes de $\vec{g}'_i$ dans $\vec{g}_j$ sont : $\vec{g}'_i.\vec{g}_j$ d'où :

$$\vec{g}'_i = (\vec{g}'_i.\vec{g}_j)\ \vec{g}^j = (\vec{g}'_i.\vec{g}^j)\ \vec{g}_j \tag{561}$$

Par ailleurs nous avons :

$$\vec{g}'_i = \frac{\partial \vec{M}}{\partial \theta^j}\ \frac{\partial \theta^j}{\partial \theta'^i} = \vec{g}_j\ \frac{\partial \theta^j}{\partial \theta'^i} \tag{562}$$

d'où :

$$\frac{\partial \theta^j}{\partial \theta'^i} = \vec{g}'_i.\vec{g}^j \tag{563}$$

Cas particulier : Supposons que $\theta'^i = X'^i$ c'est-à-dire que le paramétrage θ'^i correspond à des coordonnées dans une base de référence orthonormée (pas forcément la base globale). Dans ce cas $\vec{g}'_i = \vec{I}'_i$ c'est-à-dire les vecteurs de la base de référence et l'on a :

$$\frac{\partial \theta^j}{\partial X'^i} = \vec{I}'_i.\vec{g}^j \tag{564}$$

Les termes $\frac{\partial \theta^j}{\partial X'^i}$ correspondent aux coordonnées dans la base de référence, des vecteurs de la base duale initiale $\vec{g}^j$

Application : Supposons un état initial représenté par les points matériels $\vec{M}$ et un état final représenté par les points $\hat{\vec{M}}$. On suppose que les points matériels sont repérés par leurs coordonnées initiales X'^a dans un repère orthonormé de référence et un jeu de paramètre θ^i qui en éléments finis sont par exemple les coordonnées des éléments de référence qui servent pour l'interpolation.

Dans ce contexte, on a directement accès aux vecteurs des bases naturelles avant $\vec{g}_i$ et après déformation $\hat{\vec{g}}_i$ via les fonctions d'interpolation. On cherche maintenant à déterminer les bases naturelles associées au paramétrage X'^i. Par définition on aura :

$$\vec{g}'_i = \vec{I}'_i \quad et \quad \hat{\vec{g}}'_i = \hat{\vec{I}}'_i = (\vec{I}'_i.\vec{g}^j)\ \hat{\vec{g}}_j \tag{565}$$

Cette formule permet de déterminer les coordonnées de la base naturelle déformée, correspondante à un paramétrage (cartésien) initial arbitraire d'une base orthonormée, à partir des bases naturelles associées à un paramétrage curviligne quelconque θ^i

De la même manière on aura :

$$\hat{\vec{g}}'^i = \hat{\vec{I}}'^i = (\vec{I}'^i.\vec{g}_j)\ \hat{\vec{g}}^j \tag{566}$$

Remarquons que la base $\hat{\vec{I}}'^i$ n'est pas à priori orthonormée.

Cas particulier d'un espace 3D avec une base de deux vecteurs : Dans le cas où les vecteurs $\vec{g}_\alpha$ et $\hat{\vec{g}}_\alpha$ sont dans le plan $\vec{I}'_\alpha$, la matrice jacobienne de la transformation $\theta^\alpha <-> X^\beta$ est carrée et dans le cas général non-singulière. Par contre dans le cas général où les vecteurs ne sont pas dans un plan X^β, le problème est mal posé et n'a pas de solution.

Cas particulier d'un espace 3D avec deux bases de deux vecteurs : Supposons que l'on dispose d'un repère orthonormé 2D particulier $\vec{I}'_\alpha$, la formule (565) est alors exploitable à condition d'être capable d'effectuer les produits scalaires $(\vec{I}'_\alpha.\vec{g}^\beta)$. En particulier, les différents vecteurs peuvent très bien avoir 3 composantes, i.e. être définis dans un autre repère global composé de 3 vecteurs.

27.2.1 Opérations dans une base orthonormée 2D dans un espace 3D

Soit connu un repère orthonormé 2D particulier $\vec{I}'_\alpha$. Ce repère est défini initialement par la connaissance des vecteurs de la base duale initiale dans ce nouveau repère :

$$\vec{g}^\alpha = \gamma^\alpha_{.\beta}\ \vec{I}'^\beta = \Gamma^\alpha_{.a}\ \vec{I}^a \tag{567}$$

Les coordonnées initiales des vecteurs de la base duale $\Gamma^{.\alpha}_{a}$ sont supposées connues. Nous allons voir que les coordonnées locales $\gamma^\alpha_{.\beta}$ sont suffisantes pour définir l'ensemble des vecteurs des différents repères.

Tout d'abord nous allons calculer les nouvelles coordonnées de la base naturelle à partir de la relation $\vec{g}^\alpha.\vec{g}_\beta = \delta^\alpha_{.\beta}$. Notons : $\vec{g}_\beta = \beta^\gamma_{.\beta}\ \vec{I}'_\gamma$

NB : Notons que par rapport aux chapitres précédents de changement de base (cf.27.1), c'est le second indice de $[\beta^\gamma_{.\beta}]$ qui représente le numéro du vecteur $\vec{g}_\beta$, ce qui évite dans les notations des résultats, l'emploi de l'opérateur "transposé".

$$\vec{g}^\alpha.\vec{g}_\gamma = \delta^\alpha_{.\gamma} = (\gamma^\alpha_{.\beta}\ \vec{I}'^\beta)(\beta^\delta_{.\gamma}\ \vec{I}'_\delta) = \gamma^\alpha_{.\beta}\ \beta^\delta_{.\gamma}\delta^\beta_{.\delta} = \gamma^\alpha_{.\beta}\ \beta^\beta_{.\gamma} \tag{568}$$

Ce qui signifie que :

$$\left[\gamma^\alpha_{.\beta}\right]\left[\beta^\beta_{.\gamma}\right] = \left[\delta^\alpha_{.\gamma}\right] \text{ c'est-à-dire } \left[\beta^\beta_{.\gamma}\right] = \left[\gamma^\alpha_{.\beta}\right]^{-1}\ \left[\delta^\alpha_{.\gamma}\right] = \left[\gamma^\gamma_{.\beta}\right]^{-1} \tag{569}$$

en notant ainsi que si la matrice $\left[\gamma^{\alpha}_{.\beta}\right]$ est construite de telle manière que chaque ligne représente un vecteur de la base duale $\vec{g}^{\alpha}$, et (cf. la remarque précédente relative à la transposée) les vecteurs de la base naturelle $\vec{g}_{\beta}$ seront représentés par les colonnes de la matrice $\left[\beta^{\gamma}_{.\beta}\right]$.

La formule (567) peut également s'utiliser pour calculer les coordonnées de la base orthonormée $\vec{I}'^{\beta}$ dans la base naturelle $\vec{g}_{\alpha}$. En effet supposons que nous nottions temporairement $\vec{I}'^{\beta} = I'^{\beta\alpha}\vec{g}_{\alpha}$. Pour un repère orthonormé, les vecteurs de la base naturelle et duale sont identiques d'où

$$\vec{I}'^{\beta} = \vec{I}'_{\beta} = I'^{\beta\alpha}\vec{g}_{\alpha} = I'^{.\alpha}_{\ \beta}\,\vec{g}_{\alpha} \tag{570}$$

Par définition nous avons $I'^{.\alpha}_{\ \beta} = \vec{I}'_{\beta}.\vec{g}^{\alpha}$ c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} I'^{.\alpha}_{\ \beta} &= \vec{I}'_{\beta}.\vec{g}^{\alpha} = \vec{I}'_{\beta}.(\gamma^{\alpha}_{.\delta}\ \vec{I}'^{\delta}) = \delta^{\delta}_{\beta}\gamma^{\alpha}_{.\delta} = \gamma^{\alpha}_{.\beta} \\ \text{ou encore} & \\ \vec{I}'_{\beta} &= \gamma^{\alpha}_{.\beta}\ \vec{g}_{\alpha} \end{aligned} \tag{571}$$

NB : En remarquant comme précédemment que la colonnes β de $[\gamma^{\alpha}_{.\beta}]$ représente le vecteur $\vec{I}'_{\beta}$

De manière équivalente on a également :

$$\vec{I}'^{\delta} = \beta^{\delta}_{.\alpha}\ \vec{g}^{\alpha} \tag{572}$$

NB : Ici c'est la ligne δ de la matrice $[\beta^{\delta}_{.\alpha}]$ qui représente le vecteur $\vec{I}'^{\delta}$

Maintenant nous pouvons retrouver les coordonnées de la base orthonormée locale $\vec{I}'^{\beta}$ dans la base globale $\vec{I}^{a}$ à l'aide de (571) ou (572) connaissant les coordonnées des vecteurs de la base naturelle $\vec{g}_{\alpha}$ ou $\vec{g}^{\alpha}$. Par exemple avec (572) et (567) on a :

$$\vec{I}'^{\delta} = \beta^{\delta}_{.\alpha}\ \vec{g}^{\alpha} = \beta^{\delta}_{.\alpha}\ \Gamma^{\alpha}_{.a}\ \vec{I}^{a} \tag{573}$$

27.2.2 Mixte de repères orthonormées, et repères curvilignes

Supposons que l'on dispose à l'origine d'un paramétrage curviligne θ^{i} avec les bases naturelles et duales associées $\vec{g}_{i} = \frac{\partial \vec{M}}{\partial \theta^{i}}$ et $\vec{g}^{i}$. Ces vecteurs et positions sont exprimées dans un repère orthonormé de référence $\vec{I}_{a}$.

On suppose maintenant un repère orthonormé particulier $\vec{I}'_{b}$ et on veut utiliser les coordonnées initiales dans $\vec{I}'_{b}$ comme nouveau paramétrage matériel X'_{b}. Dans ce cas la base naturelle associée à ce paramètrage est de manière triviale $\vec{I}'_{b}$.

Maintenant on suppose une transformation géométrique représentée par une variation des vecteurs de la base naturelle $\hat{\vec{g}}_{i}$. Les composantes de ces nouveaux vecteurs sont naturellement exprimés dans le repère initiale $\vec{I}_{a}$.

Nous avons vu qu'il est également possible de calculer la variation du repère naturel $\vec{I}'_{b}$ associé au paramétrage matériel X'_{b} via la formule (565) : $\hat{\vec{I}}'_{i} = (\vec{I}'_{i}.\vec{g}^{j})\ \hat{\vec{g}}_{j}$

Dans cette formule, tous les vecteurs sont naturellement exprimées dans $\vec{I}_{a}$ et il faut noter que $\hat{\vec{I}}'_{i}$ n'est évidemment pas un repère orthonormé en général.

On cherche maintenant à se repérer dans $\vec{I}'_b$.

Supposons les notations suivantes : $\hat{\vec{I}}'_i = I'^{b}_{i}\ \vec{I}'_b$, on a par définition :

$$I'^{b}_{i} = \hat{\vec{I}}'_i.\vec{I}'^{b} = (\vec{I}'_i.\vec{g}^j)\ (\hat{\vec{g}}_j.\vec{I}'^{b}) \tag{574}$$

Dans cette formule on remarque que les deux produits scalaires sont interchangeables et que l'on peut également interpréter la formule de la manière suivante : $(\hat{\vec{g}}_j.\vec{I}'^{b})$ représentes les coordonnées de $\hat{\vec{g}}_j$ dans le nouveau repère, et ensuite la relation (565) est utilisée pour calculer l'équivalent de $\hat{\vec{g}}_j$ c'est-à-dire $\hat{\vec{I}}'_i$ relativement au nouveau paramétrage X'_b.

27.3 Contraction des tenseurs

Produit une fois contracté : on contracte les vecteurs les plus proches ex :

$$\boldsymbol{A}.\boldsymbol{B} = (A^{ij}\hat{\vec{g}}_i \otimes \hat{\vec{g}}_j).(B^{kl}\hat{\vec{g}}_k \otimes \hat{\vec{g}}_l) = A^{ij}\ B^{kl}\ \hat{g}_{jk}\ \hat{\vec{g}}_i \otimes \hat{\vec{g}}_l = A^{ij}\ B^{l}_{j}\ \hat{\vec{g}}_i \otimes \hat{\vec{g}}_l \tag{575}$$

Produits tensoriels On introduit trois notations particulières à partir de deux tenseurs du premier ordre $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$:

$$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{A}\bar{\otimes}\boldsymbol{B} = (A^{ij}\hat{g}_i \otimes \hat{g}_j)\bar{\otimes}(B^{kl}\hat{g}_k \otimes \hat{g}_l) = (A^{ik}.B^{jl})\hat{g}_i \otimes \hat{g}_j \otimes \hat{g}_k \otimes \hat{g}_l \tag{576}$$

$$\boldsymbol{T}' = \boldsymbol{A}\underline{\otimes}\boldsymbol{B} = (A^{ij}\hat{g}_i \otimes \hat{g}_j)\bar{\otimes}(B^{kl}\hat{g}_k \otimes \hat{g}_l) = (A^{il}.B^{jk})\hat{g}_i \otimes \hat{g}_j \otimes \hat{g}_k \otimes \hat{g}_l \tag{577}$$

$$\boldsymbol{T}'' = \boldsymbol{A}\ \overset{*}{\bar{\otimes}}\ \boldsymbol{B} = 1/4.(A^{ik}.B^{jl} + A^{jk}.B^{il} + A^{il}.B^{jk} + A^{jl}.B^{ik})\hat{g}_i \otimes \hat{g}_j \otimes \hat{g}_k \otimes \hat{g}_l \tag{578}$$

Dans le cas où les tenseurs $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$ sont symétriques et qu'on cherche à obtenir un opérateur qui conduise à un résultat intrinsèquement symétrique par rapport aux deux premiers indices et par rapport aux deux derniers indices, par exemple dans le cas (qui nous intéresse ici) où on cherche à calculer un opérateur tangent, i.e a déterminer un tenseur du quatrième ordre $\boldsymbol{T}$ qui sera "a priori" utilisé en double contraction avec un tenseur du quatrième ordre symétrique pour les deux premiers indices et les deux derniers (construit à partir du produit tensoriel d'un incrément de déplacement ou de vitesse ou de vitesse virtuelle avec un second tenseur du même type). Dans tous les cas, le fait de cette contraction, supprimera tous les termes n'ayant pas la symétrie de base. Ainsi soient par exemple $\boldsymbol{E}$ et $\boldsymbol{F}$, symétriques du second ordre et $\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{E} \otimes \boldsymbol{F}$ du quatrième ordre étant donc par construction symétrique par rapport aux deux premiers indices et par rapport aux deux derniers indices. On a la relation importante suivante :

$$\boldsymbol{T} \vdots \boldsymbol{Z} = \boldsymbol{T}' \vdots \boldsymbol{Z} = \boldsymbol{T}'' \vdots \boldsymbol{Z} \tag{579}$$

Donc l'opérateur $\overset{*}{\bar{\otimes}}$ agit comme filtrant les parties non symétriques qui de toute manière, disparaissent dans l'expression finale. Ainsi d'une manière pratique, au niveau de l'implémentation informatique, on utilisera "pour l'opérateur tangent" l'opérateur $\overset{*}{\bar{\otimes}}$ à la place de l'opérateur $\bar{\otimes}$ et de $\underline{\otimes}$, bien que ces opérateurs soient différents intrinsèquement.

On remarque donc que le tenseur $\boldsymbol{T''}$, de part sa construction, est symétrique par rapport aux deux premiers indices et par rapport aux deux derniers indices : $T''^{ijkl} = T''^{jikl} = T''^{ijlk} = T''^{jilk}$. Il a donc 36 composantes différentes d'où la possibilité d'avoir un stockage plus compacte que tenseur général du 4^{ieme} représenté par 81 coefficients.

NB : voir également 579 pour une explication pratique dans le cas de l'élasticité isotrope linéaire.

27.4 Variation d'un vecteur normé

Supposons un vecteur $\vec{U'}$ quelconque et le vecteur normé colinéaire : $\vec{U} = \frac{\vec{U'}}{||\vec{U'}||}$. On cherche a calculer la variation du vecteur normé.

Par définition (en notant ∂U une variation quelconque) :

$$\partial\vec{U} = \frac{1}{||\vec{U'}||}\partial\vec{U'} - (\partial\vec{U'}.\vec{U'})\frac{1}{||\vec{U'}||^3}\ \vec{U'} \tag{580}$$

Dans le cas où les vecteurs sont connus via leurs coordonnées contravariantes :

$$\partial\vec{U'} = \partial U'^i\ \vec{g}_i + U'^i\ \partial\vec{g}_i \tag{581}$$

d'où :

$$\partial\vec{U'}.\vec{U'} = (\partial U'^i\ \vec{g}_i + U'^i\ \partial\vec{g}_i).(U'^j\ \vec{g}_j) = \partial U'^i\ U'^j\ g_{ij} + U'^i\ U'^j\ 0.5\ \partial g_{ij} \tag{582}$$

et au final

$$\partial\vec{U} = \frac{1}{||\vec{U'}||}(\partial U'^i\ \vec{g}_i + U'^i\ \partial\vec{g}_i) - (\partial U'^i\ U'^j\ g_{ij} + U'^i\ U'^j\ 0.5\ \partial g_{ij})\ \frac{1}{||\vec{U'}||^3}\ \vec{U'} \tag{583}$$

Références

[Chung and Lee, 1994] Chung, J. and Lee, J. (1994). A new family of explicit time integration methods for linear and non-linear structural dynamics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 37 :3961–3976.

[Engeln-Müllges and Uhlig, 1996] Engeln-Müllges, G. and Uhlig, F. (1996). *Numerical Algorithms with C.* Number ISBN 3-540-60530-4. Springer-Verlag.

[Favier, 1988a] Favier, D. (1988a). *Contribution à l'étude théorique de l'élastohystérésis à température variable : application aux propriétés de mémoire de forme.* Thèse de doctorat d'état, Université Joseph Fourier & Institut National Polytechnique de Grenoble.

[Favier, 1988b] Favier, D. (1988b). *Contribution à l'étude théorique de l'élastohystérésis à température variable : application aux propriétés de mémoire de forme.* Thèse de doctorat d'état, University UJF Grenoble 1, Institut National Polytechnique de Grenoble.

[Guélin, 1980] Guélin, P. (1980). Remarques sur l'hystérésis mécanique. *J. Mécanique Théorique et Appliquée*, 19(2) :217–247.

[Hulbert and Chung, 1996] Hulbert, G. and Chung, J. (1996). Explicit time integration algorithms for structural dynamics with optimal numerical dissipation. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, 137 :175–188. PII : S0045-7825(96)01036-5.

[Lemaitre and Chaboche, 2004] Lemaitre, J. and Chaboche, J.-L. (2004). *Mécanique des matériaux solides.* Number ISBN 2 10 048632 2. Dunod.

[Mahéo, 2006] Mahéo, L. (2006). *Etude des effets dissipatifs de différents schémas d'intégration temporelle en calcul dynamique par éléments finis.* PhD thesis, Université de Bretagne Sud.

[Mahéo et al., 2009] Mahéo, L., Grolleau, V., and Rio, G. (2009). Damping efficiency of the tchamwa–wielgosz explicit dissipative scheme under instantaneous loading conditions. *Comptes Rendus de Mécanique*, 337 :722–732.

[Manach and Rio, 1999] Manach, P. Y. and Rio, G. (1999). Analysis of orthotropic behavior in convected coordinate frames. *Computational Mechanics*, 23 :510–518. 10.1007/s004660050430.

[Pegon, 1988] Pegon, P. (1988). *Contribution à l'étude de l'hystérésis élastoplastique.* Thèse d'état, Institut National Polytechnique, Université Joseph Fourier, Grenoble.

[Press et al., 2002] Press, W. H., Teukolsky, S. A., Vetterling, W. T., and Flannery, B. P. (2002). *Numerical Recipes in C.* Number ISBN 0-521-43108-5. Cambridge University Press, second edition edition.

[Rio, 2015] Rio, G. (2015). Hyperélasticité, rapport interne sur le développement de potentiels hyperélastiques en formulation entraînée. Technical report, Université de Bretagne Sud, http ://kleger.univ-ubs.fr/Herezh/projects/herezh/documents.

[RIO, 2017] RIO, G. (2017). Herezh++, manuel d'utilisation (user's manual in french), v 6.799, university of "bretagne sud", iddn.fr.010.0106078.000.r.p.2006.035.20600 (http ://kleger.univ-ubs.fr/herezh/projects/herezh/documents).

[Rio et al., 2008] Rio, G., Laurent, H., and Bles, G. (2008). Asynchronous interface between a finite element commercial software abaqus and an academic research code herezh++. *Advances in Engineering Software*, 39(12) :1010–1022. (ISSN 0965-9978).

[Rio et al., 1995] Rio, G., Manach, P. Y., and Favier, D. (1995). Finite element simulation of 3d mechanical behaviour of niti shape memory alloys. *Archives of Mechanics*, 47(3) :537–556.

[Underwood, 1983] Underwood, P. (1983). Dynamic relaxation : a review. in : Ted belytschko and thomas j.r. hughes editors. computational methods for transient analysis. volume 1, chapter 5, pages 245–265. Elsevier Science Publishers B.V.

[Watts and Shampine, 2005] Watts, H. A. and Shampine, L. F. (2005). Rkf45 runge-kutta-fehlberg ode solver. Technical report, Albuquerque, New Mexico.

[Wright, 2002] Wright, W. (2002). *General linear methods with inherent Runge-Kutta stability*. PhD thesis, University of Auckland.

[ZHAI, 1996] ZHAI, W.-M. (1996). Two simple fast integration methods for large-scale dynamic problems in engineering. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 39(24) :4199–4214.