

# Éléments théoriques spécifiques associée au logiciel Herezh++ (version 6.950 )

Gérard Rio

7 août 2020

## Table des matières

<b>I</b>	<b>Introduction</b>	<b>10</b>
<b>II</b>	<b>Avancement temporel</b>	<b>12</b>
<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>13</b>
1.1	Présentation des différents algorithmes . . . . .	14
1.2	Remarques concernant les variations de pas de temps . . . . .	15
1.3	Différences centrées . . . . .	15
1.3.1	Généralités . . . . .	15
1.3.2	Implantation de l'algorithme DFC dans Herezh . . . . .	17
1.4	Newmark . . . . .	18
1.5	Tchamwa-Wielgosz . . . . .	18
1.6	Schéma explicite de Chung-Lee . . . . .	19
1.6.1	Implantation de l'algorithme de Chung Lee dans Herezh . . . . .	20
1.7	Méthode proposée par Zhai . . . . .	21
1.8	Runge-Kutta . . . . .	22
1.8.1	Introduction . . . . .	22
1.8.2	Avancement temporel avec le modèle de Runge-Kutta imbriqué . . . . .	23
1.8.3	Implantation . . . . .	24
1.9	Convergence des différents schémas numériques . . . . .	24
1.9.1	Consistance . . . . .	25
1.9.2	Stabilité de la méthode de Tchamwa . . . . .	25
1.10	Amortissement numérique . . . . .	27
1.10.1	Amortissement de Rayleigh . . . . .	27
1.10.2	Amortissement critique . . . . .	28
1.10.3	Bulk viscosity . . . . .	28
1.11	Algorithme de Relaxation dynamique . . . . .	28

1.11.1	Introduction . . . . .	28
1.11.2	Amortissement cinétique et calcul de masses fictives . . . . .	29
1.11.3	Amortissement visqueux critique . . . . .	31
<b>III</b>	<b>Métriques</b>	<b>33</b>
<b>2</b>	<b>Particularités liées à la vitesse de déformation virtuelle</b>	<b>34</b>
<b>IV</b>	<b>Lois de comportements</b>	<b>35</b>
<b>3</b>	<b>Loi de Hooke isotrope 3D et 2D</b>	<b>36</b>
3.1	Opérateur tangent contrainte-déformation . . . . .	37
3.1.1	Cas uniquement sphérique . . . . .	38
3.1.2	Cas uniquement déviatorique . . . . .	38
<b>4</b>	<b>Comportement hyperélastique</b>	<b>39</b>
<b>5</b>	<b>Comportements hypoélastiques</b>	<b>39</b>
5.1	Loi 3D isotrope . . . . .	39
5.1.1	Relations générales et intégration . . . . .	39
5.1.2	Opérateur tangent contrainte-déformation . . . . .	40
5.2	Loi 2D contrainte plane hypoélastique isotrope . . . . .	43
5.2.1	Relations générales . . . . .	43
5.3	Loi 1D hypoélastique isotrope . . . . .	43
5.3.1	Relations générales . . . . .	43
5.3.2	Intégration de la loi . . . . .	44
5.4	Traitement des énergies . . . . .	45
5.5	Déformation associée au type de dérivée matérielle . . . . .	46
<b>6</b>	<b>Loi viscoélastique de Maxwell</b>	<b>46</b>
6.1	Loi 3D et intégration . . . . .	46
6.2	Opérateur tangent . . . . .	48
6.2.1	Opérateur tangent $\frac{\partial \sigma^{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}}$ . . . . .	48
6.3	Opérateur tangent pour les tenseurs transportés $\frac{\partial A^{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}}$ . . . . .	51
6.3.1	Transport deux fois covariant . . . . .	51
6.3.2	Transport deux fois contravariants . . . . .	52
6.3.3	Transport mixte . . . . .	52
6.3.4	Paramètres matériaux évolutifs . . . . .	53
6.4	Cas des contraintes planes . . . . .	53
6.4.1	Cas avec viscosité sphérique . . . . .	53
6.4.2	Cas sans viscosité sphérique . . . . .	54

<b>7</b>	<b>Plasticité Prandtl-Reuss : cas général, modèle 3D</b>	<b>56</b>
7.1	Equations constitutives	56
7.2	Intégration numérique des équations constitutives	58
7.2.1	Introduction	58
7.2.2	Transport de la déformation plastique d'un incrément à l'autre	58
7.2.3	Ecriture des équations constitutives discrétisées pour un transport deux fois covariants	60
7.2.4	Ecriture des équations constitutives discrétisées pour un transport en mixte cohérent avec la dérivée de Jauman	62
7.2.5	Calcul du multiplicateur plastique	63
7.2.6	Objectivité du tenseur contrainte pour un transport 2 fois covariants	64
7.2.7	Objectivité du tenseur contrainte pour un transport mixte	66
7.3	Développement analytique du calcul de l'opérateur tangent	66
7.3.1	Généralités	66
7.3.2	Variation de la partie sphérique de $\sigma$ par rapport au tenseur déformation	68
7.3.3	Variation du déviateur des déformations par rapport au tenseur de déformation	69
7.3.4	Variation du multiplicateur plastique par rapport au tenseur de déformation	69
7.3.5	Variation de la trace de l'incrément de déformation correspondant à l'incrément de $t$ par rapport au tenseur de déformation	70
7.3.6	Variation du tenseur $\mathbf{C}$ par rapport au tenseur de déformation	71
7.3.7	Variation de $f$ par rapport au tenseur de déformation	72
7.3.8	Variation de $\mathbf{S}$ par rapport au tenseur de déformation	72
7.3.9	Résumé des relations nécessaire pour le calcul de l'opérateur tangent	73
7.3.10	Cas 1D	74
7.4	Implantation informatique	74
7.5	Variation de volume	75
7.6	Annexes plasticité	75
7.7	Notation sur des tenseurs du quatrième ordre particulier	75
7.8	Dépendance des différentes grandeurs aux coordonnées $\varepsilon_{ij}$	76
7.9	Coordonnées matérielles et grandeurs convectées	76
7.10	Variation de grandeurs convectées	77
7.11	Remarques concernant les calculs de gradient	78
7.12	Variation de tenseurs par rapport aux composantes $\varepsilon_{ij}$	80
7.13	Quelques définitions	82
<b>8</b>	<b>Hystérésis déviatorique</b>	<b>84</b>
8.1	Introduction	84
8.2	Historique succinct du modèle d'élasto-visco-hystérésis	84
8.3	Hysteresis contribution	85
8.3.1	Cercles neutres	85
8.3.2	Incremental behavior law	88
8.3.3	Choix de la dérivée objective	89

8.3.4	Algorithme de gestion de la mémoire discrète . . . . .	91
<b>9</b>	<b>Implantation élasto ou hyper-visco-hystérésis</b>	<b>93</b>
9.1	Partie hyperélastique . . . . .	93
9.2	Partie hystérésie . . . . .	93
9.2.1	Linéarisation temporelle . . . . .	93
9.2.2	Équation constitutive linéarisée . . . . .	94
9.2.3	Résolution numérique de l'équation constitutive linéarisée . . . . .	95
9.2.4	Calcul de l'opérateur tangent . . . . .	95
9.3	Partie viscoélastique . . . . .	96
<b>10</b>	<b>Loi type Hooke 3D initialement orthotrope, puis entraînée</b>	<b>97</b>
10.1	Relations générales . . . . .	97
10.2	Transformations finies . . . . .	98
10.3	Cas seulement déviatorique ou sphérique . . . . .	98
10.4	Compressibilité et variation de volume . . . . .	98
10.5	Opérateur tangent en déformation (transport contravariant) . . . . .	99
10.6	Opérateur tangent en degré de liberté (transport contravariant) . . . . .	100
10.7	Tests . . . . .	101
<b>11</b>	<b>Loi type Hooke 2D CP, initialement orthotrope, puis entraînée</b>	<b>107</b>
11.1	Relations générales . . . . .	107
11.2	Transformations finies . . . . .	108
11.3	Cas seulement déviatorique ou sphérique . . . . .	108
11.4	Compressibilité et variation de volume . . . . .	108
11.5	Opérateur tangent en déformation (transport contravariant) . . . . .	109
11.6	Opérateur tangent en degré de liberté (transport contravariant) . . . . .	110
<b>12</b>	<b>Loi hypoélastique 3D et 2D CP, initialement orthotrope, puis entraînée</b>	<b>111</b>
12.1	Relations générales . . . . .	111
12.2	Transformations finies . . . . .	112
12.3	Cas seulement déviatorique ou sphérique . . . . .	112
12.4	Compressibilité et variation de volume . . . . .	112
12.5	Opérateur tangent en déformation (transport contravariant) . . . . .	113
12.6	Opérateur tangent en degré de liberté (transport contravariant) . . . . .	114
<b>13</b>	<b>Transport d'un repère d'anisotropie</b>	<b>116</b>
13.1	Transport type contravariant . . . . .	116
13.2	Transport type covariant . . . . .	117
13.3	Formules de changement de base (transport contravariant) . . . . .	118
13.4	Variations des déformations d'Almansi dans le repère entraîné par rapport à celles exprimées dans $\hat{g}^j$ . . . . .	118
13.5	Variations par rapport aux degrés de liberté cinématiques . . . . .	120

<b>14 Anisotropie : opérateur de projection</b>	<b>122</b>
14.1 Introduction	122
14.2 Tenseur des contraintes	123
14.2.1 Traitement des énergies	124
14.2.2 Compressibilité et variation de volume	125
14.3 Cisaillement et variation de forme	126
14.4 Opérateur tangent en déformation (transport contravariant)	127
14.5 Opérateur tangent en degré de liberté (transport contravariant)	129
<b>15 Loi Hypo-élastique initialement orthotrope, puis entraînée</b>	<b>130</b>
15.1 Relations générales	130
15.2 Transformations finies	131
15.3 Cas seulement déviatorique ou sphérique	131
15.4 Compressibilité et variation de volume	132
15.5 Opérateur tangent en déformation (transport contravariant)	132
15.6 Opérateur tangent en degré de liberté (transport contravariant)	134
15.7 Energies	135
<b>V Contraintes planes</b>	<b>136</b>
<b>16 Variation dimension transversale</b>	<b>137</b>
16.1 Variation d'épaisseur	137
16.2 Variation de section	139
16.3 Comparaison 3D contraintes planes	140
16.4 Calcul du module de compressibilité	140
16.4.1 Cas des lois hyper-élastiques Favier et Orgeas	140
16.4.2 Cas de la loi isoélastique ISO_ELAS_ESPO1D	142
16.4.3 Cas de la loi isoélastique ISO_ELAS_SE1D	142
<b>17 Lois de contraintes planes</b>	<b>143</b>
17.1 Méthode par perturbation (explicite)	143
17.2 Méthode de Newton (implicite)	143
17.3 Opérateur tangent final	144
<b>18 Lois de contraintes doublement planes</b>	<b>144</b>
18.1 Cas où le repère de travail est celui de la condition	144
18.2 Cas où le repère de travail est différent de celui de la condition	145
18.2.1 Cas particulier où $\vec{V}_3$ est normal aux vecteurs $\vec{g}_\alpha$	148
18.3 Méthode par perturbation (explicite, le repère de travail est celui de la condition)	148
18.4 Méthode par perturbation (explicite, le repère de travail est différent de celui de la condition)	149
18.5 Meth Newton en repère de condition	150
18.6 Meth Newton hors repère de condition	151
18.6.1 Cas particulier où $\vec{V}_3$ est normal aux vecteurs $\vec{g}_\alpha$	152

18.7	Opérateur tangent final pour un repère de travail identique à celui de la condition . . . . .	153
18.8	Opérateur tangent final pour un repère de travail différent de celui de la condition . . . . .	153
18.8.1	Cas particulier où $\vec{V}_3$ est normal aux vecteurs $\vec{g}_\alpha$ . . . . .	155
<b>VI</b>	<b>Umat</b>	<b>156</b>
19	Définition d'une loi interface de type Umat	157
20	Objectifs	157
21	Prise en compte de la loi de comportement exprimée dans un repère orthonormé	157
<b>VII</b>	<b>Lois critère</b>	<b>159</b>
22	Lois critère	160
22.1	Intro lois critère . . . . .	160
22.2	Plis sur des membranes . . . . .	160
22.3	Particularités liés aux lois incrémentales . . . . .	162
22.3.1	Reconstruction d'un repère matériel ad hoc . . . . .	162
22.3.2	Prise en compte de plusieurs repère matériels ad hoc . . . . .	164
22.4	Évolution du comportement avec ou sans plis . . . . .	164
22.4.1	Suite de 2 incréments sans plis . . . . .	164
22.4.2	Incréments sans plis suivi d'un pli dans une direction . . . . .	164
22.4.3	Incréments sans plis suivi de plis dans deux directions . . . . .	165
22.4.4	Incrément avec un pli suivi d'un calcul sans plis . . . . .	165
22.4.5	Incrément avec un pli suivi d'un calcul avec un pli . . . . .	165
22.4.6	Incrément avec un pli suivi d'un calcul avec deux plis . . . . .	166
22.4.7	Incrément avec deux plis suivi d'un calcul sans plis . . . . .	166
22.4.8	Incrément avec deux plis suivi d'un calcul avec un pli . . . . .	166
22.4.9	Incrément avec deux plis suivi d'un calcul avec deux plis . . . . .	166
22.5	<b>Remarques</b> sur la variation des épaisseurs . . . . .	166
<b>VIII</b>	<b>Thermique</b>	<b>169</b>
23	Thermique	170
23.1	Équation locale d'équilibre . . . . .	170
23.2	Formulation variationnelle . . . . .	170
<b>IX</b>	<b>Contact</b>	<b>171</b>

<b>24</b>	<b>Prise en compte des conditions limites de contact</b>	<b>172</b>
24.1	Réponse à la question : le point est-il intérieur à l'élément ? . . . . .	172
24.2	Création des éléments de frontière . . . . .	172
24.3	Eléments de Contact . . . . .	173
24.4	Pénalisation . . . . .	173
24.4.1	Adaptation du facteur de pénalité en fonction de la raideur des matériaux . . . . .	173
24.4.2	Adaptation du facteur de pénalité à une zone d'accostage . . . . .	174
24.5	Frottement . . . . .	174
24.5.1	Loi de Coulomb . . . . .	174
24.6	Détails d'implantation en pénalisation . . . . .	176
<b>X</b>	<b>Sfe</b>	<b>178</b>
<b>25</b>	<b>Eléments SFE</b>	<b>179</b>
25.1	Introduction . . . . .	179
25.2	Estimation d'une courbure à partir de la variation de la normale de part et d'autre des arrêtes . . . . .	179
25.2.1	Problème de convergence . . . . .	181
25.3	Modèle original simple d'estimation de la courbure . . . . .	183
25.4	Modèle Sfe2 . . . . .	185
25.5	Modèle Sfe3 . . . . .	187
25.5.1	Test simple de convergence sur une géométrie de cylindre . . . . .	190
<b>XI</b>	<b>Chargement et Conditions limites</b>	<b>191</b>
<b>26</b>	<b>Torseur d'efforts ponctuels</b>	<b>192</b>
<b>XII</b>	<b>Méthodes de calcul</b>	<b>195</b>
<b>27</b>	<b>Calcul de grandeurs globales</b>	<b>196</b>
<b>XIII</b>	<b>Annexes</b>	<b>202</b>
<b>28</b>	<b>Eléments particuliers de calcul tensoriel</b>	<b>203</b>
28.1	Produit tensoriel de deux vecteurs . . . . .	203
28.2	Produit tensoriel de deux Tenseurs . . . . .	203
28.3	Calcul matriciel pour les changements de base . . . . .	203
28.3.1	Application pour un changement de base quelconque d'un vecteur . . . . .	204
28.3.2	Application pour un changement de base quelconque d'un tenseur . . . . .	205
28.3.3	Cas particulier de la base absolue . . . . .	205
28.4	Plusieurs systèmes de coordonnées matériels . . . . .	206

28.4.1 Opérations dans une base orthonormée 2D dans un espace 3D . . . . .	207
28.4.2 Mixte de repères orthonormés, et repères curvilignes . . . . .	208
28.5 Contraction des tenseurs . . . . .	209
28.6 Variation d'un vecteur normé . . . . .	210
28.6.1 Calcul de l'opérateur tangent . . . . .	211
<b>29 Variation de la partie sphérique de <math>\sigma</math> par rapport au tenseur déformation</b>	<b>215</b>
<b>30 Variation du déviateur des déformations par rapport au tenseur de déformation</b>	<b>215</b>
<b>31 Variation du tenseur <math>C</math> par rapport au tenseur de déformation</b>	<b>216</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>218</b>



## Liste des tableaux

1	Anisotropie à 45° dans le plan xy, 1 élément, $d\sigma/d\epsilon$ . . . . .	102
2	traction selon x , anisotropie à 0° dans le plan xy, 1 élément, $d\sigma/d\epsilon$ . . . . .	103
3	traction , anisotropie à 0° dans le plan xy, 5 x 4 x 3 elements, $d\sigma/d\epsilon$ . . . . .	103
4	Cisaillement selon xy , anisotropie à 0° dans le plan xy, 5 x 4 x 3 elements, $d\sigma/d\epsilon$ . . . . .	104
5	Cisaillement selon xy , anisotropie à 45° dans le plan xy, 5 x 4 x 3 elements, $d\sigma/d\epsilon$ . . . . .	104
6	Cisaillement selon xy , anisotropie à 0° dans le plan xy, 5 x 4 x 3 elements, $d\sigma/d\epsilon$ . . . . .	105
7	Cisaillement selon xy , anisotropie à 45° dans le plan xy, 5 x 4 x 3 elements	105
8	Cisaillement selon xy , anisotropie à 0° dans le plan xy, 5 x 4 x 3 elements, $d\sigma/d\epsilon$ . . . . .	106

## Table des figures

1	Réponse de 0 à $4.10^{-3}$ d'une poutre en traction compression, soumise à un échelon de vitesse, discrétisée en 1 élément : influence du paramètre $\Phi$ . . . . .	19
2	Accélération et vitesse transverse d'un cube en traction dynamique . . . . .	22
3	Position des cercles neutres pour un matériau vierge de tout chargement mécanique. . . . .	86
4	Position des cercles neutres après une <i>inversion du chargement au point A</i> . . . . .	86
5	Position des cercles neutres après deux <i>inversions du chargement aux points A et B</i> . . . . .	87
6	Comparaison pour un essai de traction simple, sur la variation de la dimension transversale, entre 1D avec contraintes planes, et 3D . . . . .	141
7	Algorithme de traitement pour la prise en compte de plis dans le comportement mécanique macro d'une membrane . . . . .	161
8	Positions des points . . . . .	180
9	cylindre . . . . .	182
10	4 éléments . . . . .	183
11	modèle simple : l'élément SFE . . . . .	184
12	modèle SFE2 : grandeurs pour le calcul sur une arête . . . . .	186
13	modèle SFE2 : éléments pour le calcul des fonctions d'interpolation . . . . .	187

Première partie  
**Introduction**

Ce document rassemble des éléments théoriques complémentaires à la documentation d'utilisation du logiciel d'une part et des cours d'éléments finis d'autre part. Le document n'est pas exhaustif et évolue en fonction des nouveaux développements dans Herezh++.

Deuxième partie

# Avancement temporel

# 1 Introduction

Nous considérons ici la simulation du comportement dynamique, qui est décrit par une équation intégrant en plus des forces internes et externes, les forces d’inertie. Ces dernières induisent une équation différentielle du second ordre en temps. Le problème est alors d’intégrer cette équation. Ceci est réalisé dans Herezh++ par différentes méthodes dites “d’avancement temporel” qui sont examinées dans la suite du document.

La dynamique forme une part importante des domaines couverts par la mécanique. On s’intéresse ici à la mécanique du solide déformable modélisée par éléments finis, bien que les méthodes présentées peuvent également être utilisées en mécanique des fluides. La logique habituelle s’appuie sur une discrétisation distincte espace-temps : spatiale avec des fonctions de formes permettant de représenter à un instant donné l’ensemble de la géométrie ; temporel avec un algorithme qui permet le calcul pas-à-pas de l’évolution de la structure. La discrétisation temporelle pas à pas permet de limiter le nombre d’inconnues à gérer au même moment c’est-à-dire le nombre de configurations ou le nombre de pas de temps. Il faut distinguer les méthodes multi-pas et les méthodes à un pas. On se référera à Chung-Lee ([[Chung and Lee, 1994](#)]) pour une bibliographie exhaustive sur le sujet. Pour notre part nous retiendrons les méthodes à un pas. Différents travaux montrent en effet qu’actuellement ces méthodes restent les moins coûteuses à précision égale.

Deux groupes de méthodes distinctes sont envisageables : explicites, implicites ou semi-implicites, ces dernières entraînant également les mêmes niveaux difficultés que les méthodes purement implicites. On les regroupera donc dans cette dernière catégorie.

Les méthodes explicites présentent l’avantage de conduire à des calculs simples, en particulier il n’est pas nécessaire de construire la matrice de raideur du système (à chaque pas de temps), ce qui permet une économie de calcul substantielle. En revanche les méthodes sont conditionnellement stables, c.-à-d. le pas de temps de la discrétisation temporelle est majoré par la plus petite période du système (spatialement discrétisé), contrairement aux méthodes implicites.

Les algorithmes classiques robustes usuels sont :

- les différences centrées pour les méthodes explicites,
- la méthode de Newmark pour les méthodes implicites.

On trouvera par exemple dans Géradin ([?]) une étude exhaustive de ces méthodes. Dans Hughes and Belytscho ([?]) un certain nombre de réflexions concernant l’étude de stabilité, de convergence, des pas de temps optimum ... Ainsi donc, seules les grandes lignes des méthodes classiques sont rappelées dans ce document.

L’utilisation d’un algorithme numérique temporel entraîne l’apparition de hautes fréquences numériques. Ces fréquences sont indépendantes de la réalité physique ce qui peut entraîner des difficultés d’interprétation des résultats. Aussi un certain nombre de travaux ont été effectués pour modifier les algorithmes traditionnels de manière à obtenir une filtration

automatique de ces hautes fréquences. Par exemple deux des méthodes les plus classiques sont la méthode HHT développée dans les années 70 pour la méthode implicite de Newmark et la méthode du Bulk Viscosity pour la méthode des différences centrées.

Ces dernières années plusieurs nouvelles méthodes explicites sont apparues ([?] [?] [?]). Ces méthodes sont en fait des déclinaisons de la méthode des différences finies centrées. Nous nous servons de l'étude du modèle de Tchamwa pour présenter les notions de précision et de stabilité de convergence en s'appuyant principalement sur les travaux de thèse d'Anthony Soive. Ces notions de précision et de stabilité sont fondamentales pour les algorithmes temporels appliqués à la dynamique.

## 1.1 Présentation des différents algorithmes

Nous utilisons la forme faible variationnelle des équations d'équilibres locales représentée par le principe des puissances virtuelles :

$$\int_{\mathcal{D}} \rho \vec{\gamma}^* \cdot \vec{V} dv = \int_{\mathcal{D}} \vec{F}^* \cdot \vec{V} dv - \int_{\mathcal{D}} \boldsymbol{\sigma} : \dot{\mathbf{D}} dv + \int_{\partial\mathcal{D}} \vec{T}^* \cdot \vec{V} ds \quad (1)$$

Dans le cas simple d'un comportement matériel linéaire en petite transformation, la forme discrétisée de la forme variationnelle s'exprime sous une forme matricielle classique.

$$\dot{q}^{*T} (M \ddot{q} + C \dot{q} + K q - F_{ext}) = 0 \quad (2)$$

Avec  $M$  la matrice de masse,  $C$  la matrice d'amortissement,  $K$  la matrice de raideur,  $F_{ext}$  le vecteur des efforts externes,  $q$  les degrés de libertés du système,  $\dot{q}$  les degrés de liberté des vitesses virtuelles.

L'équation devant être satisfaite quelque soit la valeur des vitesses virtuelles, cela conduit à un système d'équations.

$$M \ddot{q} + C \dot{q} + K q = F_{ext} \quad (3)$$

On voit donc apparaître dans cette équation, des dérivées temporelles du premier et du second ordre. Ce sont ces grandeurs qui sont discrétisées par les différents schémas numériques exposés ci-dessous.

Dans le cas d'un comportement non linéaire, la puissance interne n'est plus représentée sous forme de produit de matrice avec les degrés de liberté. Dans le cas de méthodes explicites, cela ne change pas les différentes expressions obtenues si l'on prend soin de remplacer les grandeurs  $C \dot{q} + K q$  par  $\mathcal{R}_{int}(q, \dot{q})$ , ce dernier terme représentant de manière globale la partie puissance interne du vecteur résidu. D'une manière équivalente on notera  $F_{ext}$  par  $\mathcal{R}_{ext}(q, \dot{q})$ , la partie puissance externe du vecteur résidu. Le cas général s'écrit alors sous la forme de :

$$M \ddot{q} + \mathcal{R}_{int}(q, \dot{q}) - \mathcal{R}_{ext}(q, \dot{q}) = 0 \quad (4)$$

Les discrétisations temporelles s'appuient sur un découpage du temps en incrément  $\Delta t$  que l'on considèrera ici en général égaux pour simplifier la présentation. Cependant on verra que ce pas de temps peu varier au cours du calcul. On note  $n$  l'indice des valeurs calculées au temps  $t = n\Delta t$ .

## 1.2 Remarques concernant les variations de pas de temps

Les différents schémas d'avancement temporel sont établis en général pour un pas de temps constant.

Supposons qu'entre deux pas de temps, celui-ci varie. Soient  $\Delta t_1$  et  $\Delta t_2$  les deux pas de temps consécutifs. Il serait nécessaire d'adapter les formules obtenues pour un pas de temps constant. Deux cas sont considérés : soit il s'agit d'un calcul implicite soit d'un calcul explicite.

### Cas d'un calcul explicite

En général le pas de temps est petit voir très petit. On considère alors que la variation de pas de temps n'est pas trop importante et que sur l'ensemble des pas de temps traités, il y a peu de changement de pas de temps relativement. En conséquence, on peut faire l'hypothèse que l'impact d'un changement de pas de temps est négligeable sur la précision globale de la réponse.

### Cas d'un calcul implicite

En général le pas de temps peut-être important. On suppose alors que l'algorithme intègre la prise en compte d'un changement de pas de temps de manière précise.

C'est le partie pris actuellement retenue pour Herezh. Cela amène 2 remarques :

1. en explicite, dans le cas de nombreux changements de pas de temps durant le calcul, il est possible que cela impact la solution finale. Donc il faut garder ce point en tête lors de l'analyse des résultats,
2. dans le cas d'un temps maxi fixé en dynamique explicite, contrairement aux schémas implicites (ou quasi-statiques), le calcul s'arrête dès que le temps en court est suffisamment proche du temps final (à la précision près). Il n'y a pas de modification du dernier pas de temps pour finir exactement au temps fin demandé. Pour l'implicite, au contraire, le dernier pas de temps est modifié pour obtenir exactement le temps final.

## 1.3 Différences centrées

### 1.3.1 Généralités

Les différences finies centrées constituent la méthode d'avancement temporel explicite la plus classique.

La discrétisation temporelle est réalisée par différences finies centrées.

$$\vec{V}_{n-\frac{\Delta t}{2}} = \frac{(\vec{X}_n - \vec{X}_{n-1})}{\Delta t} \quad \text{et} \quad \vec{V}_{n+\frac{\Delta t}{2}} = \frac{(\vec{X}_{n+1} - \vec{X}_n)}{\Delta t} \quad (5)$$

L'accélération s'en déduit.

$$\vec{\gamma}_n = \frac{(\vec{V}_{n+\frac{\Delta t}{2}} - \vec{V}_{n-\frac{\Delta t}{2}})}{\Delta t} = \frac{(\vec{X}_{n+1} - 2\vec{X}_n + \vec{X}_{n-1})}{(\Delta t)^2} \quad (6)$$

Concernant la vitesse, elle peut également être calculée à  $t$  par une méthode centrée.

$$\vec{V}_n = \frac{(\vec{X}_{n+1} - \vec{X}_{n-1})}{2\Delta t} \quad (7)$$

Les discrétisations (6, 7) s'étendent naturellement aux degrés de libertés. Prenons par exemple une interpolation classique :

$$\vec{X} = X^{ar} \varphi_r \vec{I}_a \quad (8)$$

Les fonctions d'interpolation et les vecteurs de la base absolue ne dépendent pas du temps aussi en notant  $q$  le vecteur des degrés de liberté ( $X^{ar}$ ) on obtient par différences finies des équations équivalentes à (6) et (7).

$$\ddot{q}_n = \frac{q_{n+1} - 2q_n + q_{n-1}}{(\Delta t)^2} \quad (9)$$

$$\dot{q}_n = \frac{q_{n+1} - q_{n-1}}{2\Delta t} \quad (10)$$

Pour justifier les choix effectués dans Herezh++, considérons le cas simple d'un comportement linéaire, en petites transformations. Les discrétisations précédentes sont introduites dans la forme matricielle (3). On obtient :

$$M \left( \frac{q_{n+1} - 2q_n + q_{n-1}}{(\Delta t)^2} \right) + C \left( \frac{q_{n+1} - q_{n-1}}{2\Delta t} \right) + K q_n = F_{ext} \quad (11)$$

ou encore :

$$\left( M + \frac{\Delta t}{2} C \right) q_{n+1} = \Delta t \left( \Delta t (F_{ext} - K q_n) + \frac{C}{2} q_{n-1} \right) + M (2q_n - q_{n-1}) \quad (12)$$

Cette expression montre qu'il est nécessaire d'inverser la matrice  $(M + \frac{\Delta t}{2} C)$  pour obtenir la nouvelle position  $q_{n+1}$ . Ce calcul est très rapide à effectuer dans deux cas, lorsque les matrices  $M$  et  $C$  sont constantes ou lorsqu'elles sont diagonales. Dans le premier cas par exemple en utilisant une méthode de triangulation, celle-ci peut-être réalisée une seule fois en début de programme. Dans le second cas, la rapidité est évidente. A priori la matrice de masse est naturellement constante. En revanche la matrice d'amortissement n'est constante que dans des cas très particuliers. Ceci arrive lors de l'emploi d'un amortissement "numérique" c'est-à-dire par exemple lorsqu'on emploie un amortissement artificiel pour stabiliser la réponse ou encore lors de comportement matériel très simple linéaire. Dans le cas général de comportement matériel visqueux, il n'y a aucune raison que cela conduise "naturellement" à une forme diagonale ou constante de la matrice d'amortissement. L'emploi de la formule d'Euler décentrée à droite entre les instants  $t - \Delta t$  et  $t$



pour le calcul de la vitesse est alors souvent retenue pour optimiser le temps de résolution du système.

$$\vec{V}_n = \frac{(\vec{X}_n - \vec{X}_{n-1})}{\Delta t} \quad (13)$$

Ou encore pour les degrés de liberté :

$$\dot{q}_n = \frac{q_n - q_{n-1}}{\Delta t} \quad (14)$$

Une autre solution, plus précise et plus cohérente avec la méthode des différences finies “centrée” est d’introduire l’accélération du pas précédent sous la forme :

$$\vec{V}_n = \vec{V}_{n-1/2} + \frac{\Delta t}{2} \gamma_{n-1/2} \quad (15)$$

C’est cette solution qui est retenue dans l’implantation dans Herezh++. Elle permet de n’inverser que la matrice masse, ceci même dans un cas non linéaire.

### 1.3.2 Implantation de l’algorithme DFC dans Herezh

D’une manière pratique les calculs effectués dans Herezh++ sont les suivants :

1. utilisation de l’équation d’équilibre pour obtenir l’accélération :

$$\ddot{q}_n = [M]^{-1} \left( (\mathcal{R}_{ext}(q_n, \dot{q}'_n)) - (\mathcal{R}_{int}(q_n, \dot{q}'_n)) \right) \quad (16)$$

Avec  $\dot{q}'_n$  une approximation explicite de la vitesse calculée à partir des résultats précédents à l’aide de la formule :

$$\dot{q}'_n = \dot{q}_{n-1} + \Delta t \ddot{q}_{n-1} \quad (17)$$

Les termes du membre de droite de l’expression 32 sont alors entièrement connus à partir des résultats précédents, la solution d’avancement est explicite.

2. On peut maintenant calculer précisément la vitesse :

$$\dot{q}_n = \dot{q}_{n-1} + \frac{\Delta t}{2} (\ddot{q}_{n-1} + \ddot{q}_n) \quad (18)$$

3. mise en place des conditions limites sur les positions et/ou les vitesses et/ou les accélérations, en fonction des données fournies par l’utilisateur.
4. Puis au final calcul de la nouvelle position qui permettra de calcul des efforts généralisés internes et externes.

$$q_{n+1} = q_n + \Delta t \dot{q}_n + \frac{(\Delta t)^2}{2} \ddot{q}_n \quad (19)$$

## 1.4 Newmark

La méthode de Newmark considère la discrétisation suivante pour les vitesses et pour les positions.

$$\dot{q}_{n+1} = \dot{q}_n + \Delta t ((1 - \gamma)\ddot{q}_n + \gamma\ddot{q}_{n+1}) \quad (20)$$

$$q_{n+1} = q_n + \Delta t \dot{q}_n + \frac{\Delta t^2}{2} ((1 - 2\beta)\ddot{q}_n + 2\beta\ddot{q}_{n+1}) \quad (21)$$

Le comportement obtenu est ainsi dépendant des deux paramètres  $\gamma$  et  $\beta$ . L'étude de l'algorithme de Newmark : stabilité, précision ..., est classique. Les valeurs classiques retenues pour les deux paramètres sont 0.5 et 0.5 ce qui conduit à un algorithme inconditionnellement stable et une précision du second ordre sur la fréquence. Le cas  $\beta = \frac{1}{12}$  et  $\gamma = 0.5$  conduit à une stabilité conditionnelle de l'ordre de celle nécessaire avec la méthode des différences centrées, mais à une précision du troisième ordre ce qui constitue la précision maximale que l'on peut espérer avec la méthode de Newmark.

## 1.5 Tchamwa-Wielgosz

L'algorithme proposé par Tchamwa et Wielgosz (que l'on notera par simplicité par la suite Tchamwa) est donné par les expressions suivantes :

$$M \ddot{q}_{n+1} + \mathcal{R}_{int}(q_{n+1}, \dot{q}_{n+1}) = \mathcal{R}_{ext}(q_{n+1}, \dot{q}_{n+1}) \quad (22)$$

$$\dot{q}_{n+1} = \dot{q}_n + \lambda \Delta t \ddot{q}_n \quad (23)$$

$$q_{n+1} = q_n + \alpha \Delta t \dot{q}_n + \beta \Delta t^2 \ddot{q}_n + \gamma \Delta t \dot{q}_{n+1} \quad (24)$$

L'analyse de la consistance de l'algorithme (cf. suite du document) montre que la précision est du premier ordre lorsque  $\alpha - \gamma = 1$  et que  $\Phi = (\gamma\lambda + \beta) \neq 1$ . Cette précision sera du second ordre lorsque  $\Phi = 1$ .

L'étude de l'influence des paramètres sur la convergence du schéma numérique donne (cf. partie 1.9) :

$$\Phi > 1, \quad \alpha = 0.5, \quad \gamma = 0.5, \quad \lambda = 1., \quad \beta = \Phi - \gamma\lambda \quad (25)$$

Le seul paramètre libre est alors  $\Phi$  et l'algorithme (24) devient :

$$\begin{aligned} [M]\ddot{q}_{n+1} + \mathcal{R}_{int}(q_{n+1}, \dot{q}_{n+1}) &= \mathcal{R}_{ext}(q_{n+1}, \dot{q}_{n+1}) \\ \dot{q}_{n+1} &= \dot{q}_n + \Delta t \ddot{q}_n \\ q_{n+1} &= q_n + 0.5\Delta t \dot{q}_n + (\Phi - 0.5)\Delta t^2 \ddot{q}_n + 0.5\Delta t \dot{q}_{n+1} \end{aligned} \quad (26)$$

soit encore

$$\begin{aligned} [M]\ddot{q}_{n+1} + \mathcal{R}_{int}(q_{n+1}, \dot{q}_{n+1}) &= \mathcal{R}_{ext}(q_{n+1}, \dot{q}_{n+1}) \\ \dot{q}_{n+1} &= \dot{q}_n + \Delta t \ddot{q}_n \\ q_{n+1} &= q_n + \Delta t \dot{q}_n + \Phi \Delta t^2 \ddot{q}_n \end{aligned} \quad (27)$$

La figure (1) montre l'évolution de l'amortissement en fonction du paramètre  $\Phi$ . La simulation concerne une poutre en traction-compression soumise à une vitesse initiale à une extrémité, tandis que l'autre extrémité est maintenue fixe. La géométrie et les conditions d'essai sont les suivantes : longueur = 200 mm, section = 4 mm<sup>2</sup>, vitesse initiale à l'extrémité libre = 1000 mms, masse volumique = 8.10<sup>-9</sup>, le maillage est constitué d'une seule biellette à 2 noeuds avec interpolation linéaire.

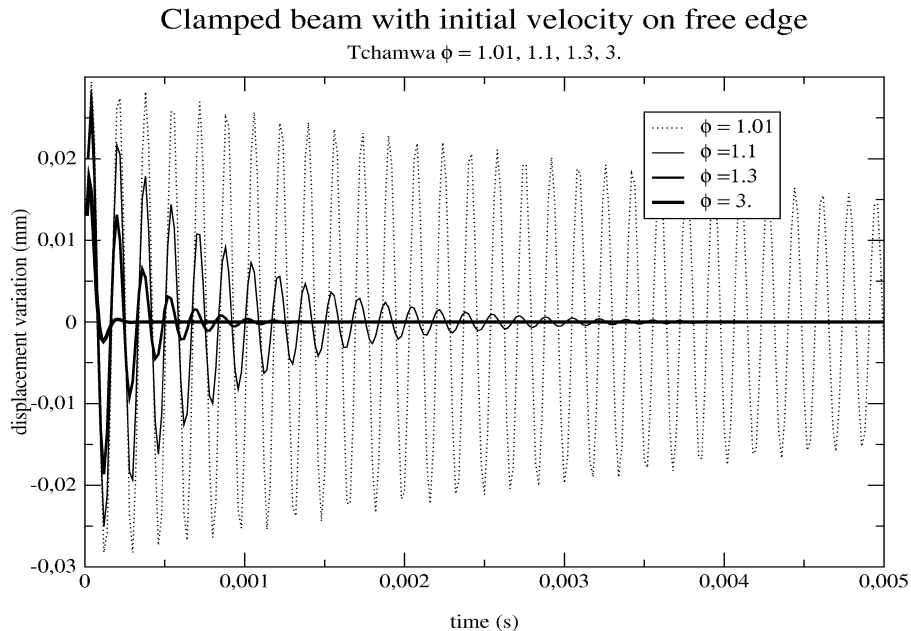


FIGURE 1 – Réponse de 0 à 4.10<sup>-3</sup> d'une poutre en traction compression, soumise à un échelon de vitesse, discrétisée en 1 élément : influence du paramètre  $\Phi$

Dans ce cas d'interpolation, la fréquence maxi que peut représenter le système est également la seule existante. Sachant que l'objectif de l'atténuation est de minimiser l'importance des hautes fréquences, on doit retrouver directement ici cette atténuation. Celle-ci est bien réelle, cependant il est nécessaire d'utiliser une valeur importante de  $\Phi$  pour obtenir une atténuation appréciable.

L'intérêt du schéma de Tchamwa concerne l'amortissement sélectif des hautes fréquences numériques, tout en évitant de modifier les basses fréquences.

## 1.6 Schéma explicite de Chung-Lee

L'algorithme proposé par Chung-Lee ( [Hulbert and Chung, 1996]) est donné par les expressions suivantes :

$$M \ddot{q}_{n+1} + \mathcal{R}_{int}(q_n, \dot{q}_n) = \mathcal{R}_{ext}(q_n, \dot{q}_n) \quad (28)$$

$$q_{n+1} = q_n + \Delta t \dot{q}_n + \Delta t^2 (\hat{\beta} \ddot{q}_n + \beta \ddot{q}_{n+1}) \quad (29)$$

$$\dot{q}_{n+1} = \dot{q}_n + \Delta t(\hat{\gamma}\ddot{q}_n + \gamma\ddot{q}_{n+1}) \quad (30)$$

L'analyse de la consistance de l'algorithme montre que la précision est du second ordre lorsque  $\hat{\beta} = 1/2 - \beta$ ,  $\gamma = 3/2$  et  $\hat{\gamma} = 1 - \gamma$ .

L'étude de l'influence des paramètres sur la convergence du schéma numérique conduit au domaine utile de  $\beta$  :

$$1. \leq \beta \leq 28/27 \quad (31)$$

L'amortissement numérique est d'autant meilleur que l'on se rapproche de 28/27. Pour cette valeur, le schéma est particulièrement efficace (cf. [Mahéo, 2006]). Cependant comme pour le schéma de Tchamwa et Wielgosz, les performances dépendent du pas de temps relativement au pas de temps critique ([Mahéo et al., 2009]).

### 1.6.1 Implantation de l'algorithme de Chung Lee dans Herezh

D'une manière pratique les calculs effectués dans Herezh++ sont les suivants :

1. utilisation de l'équation d'équilibre pour obtenir l'accélération :

$$\ddot{q}_{n(cl)} = [M]^{-1} \left( (\mathcal{R}_{ext}(q_n, \dot{q}'_n)) - (\mathcal{R}_{int}(q_n, \dot{q}'_n)) \right) \quad (32)$$

Avec  $\dot{q}'_n$  une approximation explicite de la vitesse calculée à partir des résultats précédents à l'aide de la formule :

$$\dot{q}'_n = \dot{q}_{n-1} + \Delta t \ddot{q}_{n-1} \quad (33)$$

Les termes du membre de droite de l'expression 32 sont alors entièrement connus à partir des résultats précédents, la solution d'avancement est explicite.

2. calcul de la vitesse notée  $\dot{q}(cl)$  pour la différencier de celle DFC :

$$\dot{q}(cl)_{n+1} = \dot{q}(cl)_n + \Delta t(\hat{\gamma}\ddot{q}(cl)_n + \gamma\ddot{q}(cl)_{n+1}) \quad (34)$$

Comparée au calcul en DFC (formule 18) on s'aperçoit qu'il y a un décalage au niveau de la numérotation de "n" .

3. mise en place des conditions limites sur les positions et/ou les vitesses et/ou les accélérations, en fonction des données fournies par l'utilisateur.
4. Puis au final calcul de la nouvelle position qui permettra de calcul des efforts généralisés internes et externes.

$$q(cl)_{n+1} = q(cl)_{n+1} = q(cl)_n + \Delta t\dot{q}(cl)_n + \Delta t^2(\hat{\beta}\ddot{q}(cl)_n + \beta\ddot{q}(cl)_{n+1}) \quad (35)$$

Comparée au calcul en DFC (formule 19) on s'aperçoit qu'il y a un décalage au niveau de la numérotation de "n" . Reprenons la formule DFC :

$$\begin{aligned} \dot{q}_n &= \dot{q}_{n-1} + \frac{\Delta t}{2} (\ddot{q}_{n-1} + \ddot{q}_n) \\ &= \dot{q}_{n-1} + \frac{\Delta t}{2} (\ddot{q}_{n-1} + \ddot{q}_n) \end{aligned} \quad (36)$$

## 1.7 Méthode proposée par Zhai

Le schéma d'avancement temporel proposé par Zhai [ZHAI, 1996] est une méthode explicite qui s'appuie sur une résolution en deux étapes types : prédiction puis correction. L'avancement temporel est résolu par une technique analogue à la méthode classique des différences finies centrées. Par rapport à cette dernière méthode, la méthode de Zhai introduit un terme d'amortissement des hautes fréquences.

1. prédiction :

$$\begin{aligned} q(z)_{p,n+1} &= q(z)_n + \Delta t \dot{q}(z)_n + \Delta t^2 \{(1/2 + \Psi)\ddot{q}(z)_n - \Psi\ddot{q}(z)_{n-1}\} \\ \dot{q}(z)_{p,n+1} &= \dot{q}(z)_n + \Delta t \{(1 + \varphi)\ddot{q}(z)_n - \varphi\ddot{q}(z)_{n-1}\} \end{aligned} \quad (37)$$

avec "(z)" désignant les grandeurs introduites par Zhai et "p" pour "predicted".  $q(z)_{p,n+1}$  et  $\dot{q}(z)_{p,n+1}$  correspondent à la prédiction du déplacement et de la vitesse.

2. calcul des efforts internes et externes correspondants à cette cinématique, puis résolution des équations d'équilibres → prédiction de l'accélération :

$$\ddot{q}(z)_{p,n+1} \quad (38)$$

3. correction du déplacement et de la vitesse avec une formule de type Newmark

$$\begin{aligned} q(z)_{n+1} &= q(z)_n + \Delta t \dot{q}(z)_n + \Delta t^2 \{(1/2 - \beta)\ddot{q}(z)_n + \beta\ddot{q}(z)_{p,n+1}\} \\ \dot{q}(z)_{n+1} &= \dot{q}(z)_n + \Delta t \{(1 - \gamma)\ddot{q}(z)_n + \gamma\ddot{q}(z)_{p,n+1}\} \end{aligned} \quad (39)$$

4. de nouveau, calcul des efforts internes et externes correspondants à cette cinématique corrigée, puis résolution des équations d'équilibres → accélération finale

$$\ddot{q}(z)_{n+1} \quad (40)$$

4 paramètres de contrôle sont disponibles.

Dans la pratique si l'on veut une importante précision, Zhai préconise de retenir  $\Psi = \varphi = 1/2$  et les paramètres habituels de Newmark :  $\gamma = 1/2$  et  $\beta = 1/4$ . On obtient la meilleure précision pour  $\gamma = 1/2$  et  $\beta = 1/12$ . Avec ces paramètres on obtient un très faible amortissement et un rayon de convergence environ deux fois plus faible que celui de DFC classique, ce qui n'est pas du tout intéressant.

Par exemple en utilisant comme paramètres :  $\varphi = \gamma = 1/2$  et  $\Psi = \beta = 1/6$ , on obtient un rayon de convergence un peu inférieur à DFC (5 à 10% plus faible), par contre l'atténuation est très importante, du même ordre (voir un peu supérieure) à celle de Chung Lee. En temps de calcul, la méthode est cependant environ deux fois plus lente que celles de Chung Lee ou Tchamwa compte tenue de l'étape de prédiction.

**Exemple simple d'application** : Soit un cube positionné isostatiquement sur une face, et dont la face opposée est soumise à une rampe de déplacement perpendiculairement à la face. Il s'agit donc d'un essai de traction simple. Le cube est modélisé par un seul hexaèdre, seules les déplacements dans la direction transverse au déplacement imposé, sont issus du calcul d'équilibre, ces déplacements sont directement liés au coefficient de Poisson.

La figure de gauche (2) montre l'évolution de l'accélération suivant la direction transverse au déplacement, la figure de droite est relative à la vitesse. On observe un bruit numérique constant pour les réponses du schéma DFC, atténuée pour les schémas de Zhai ( $\varphi = \gamma = 1/2$  et  $\Psi = \beta = 1/6$ ) et Chung Lee.

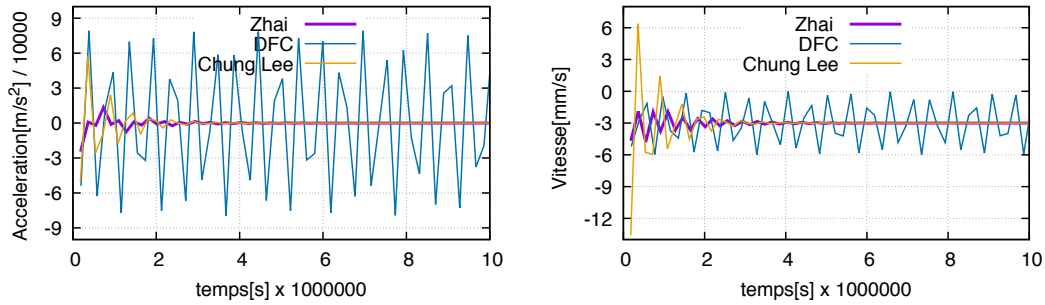


FIGURE 2 – Accélération et vitesse transverse d’un cube en traction dynamique

## 1.8 Runge-Kutta

### 1.8.1 Introduction

L’équation (4) est une équation différentielle du second ordre en temps. On peut donc envisager de la résoudre à l’aide des méthodes classiques de la famille de Runge-Kutta (RK) [Engeln-Müllges and Uhlig, 1996], [Press et al., 2002], [Wright, 2002]. L’intérêt de cette investigation est d’étudier l’impact de la précision de l’intégration temporelle de l’équation. Les schémas vus précédemment sont au mieux des schémas du second ordre c’est-à-dire que la solution approchée  $X_{n+1}$  correspond au mieux au développement de Taylor au second ordre de  $X(t + \Delta t)$  en fonction de  $\Delta t$ . Dans le cas des schémas RK, il est possible d’approcher théoriquement un ordre plus élevé. Il est alors possible d’étudier l’impact de cet ordre supérieur de troncature, comparé aux modèles classiques d’avancement temporel (DFC, Newmark par exemple).

L’objectif est ici d’utiliser le schéma classique de Runge-Kutta (RK) explicite avec pilotage en fonction d’une estimation d’erreur obtenue à l’aide de deux calculs imbriqués.

Ce type de méthodologie est courante pour la résolution de système d’équations différentielles du premier ordre ([Engeln-Müllges and Uhlig, 1996], [Press et al., 2002]), dans le cas où le système est de taille réduite (quelques dizaines d’équations). Dans le cas de la méthode des éléments finis, cette méthodologie n’est habituellement pas employée. Remarquons en particulier que la stabilité de la méthode est difficile à traiter. On peut signaler l’importance des travaux de l’école d’Auckland sur ce sujet, par exemple on peut se référer au document de thèse de W. Wright pour une présentation assez étendue ([Wright, 2002]).

Il est classiquement admis que les méthodes de type RK conduisent à un bon compromis précision - complexité, d’où l’idée d’observer leurs comportements dans le cadre de l’équation d’avancement temporel. L’objectif est ainsi de disposer d’une source de comparaison différente, pour les méthodes principalement étudiées, en particulier le modèle de Tchamwa.

Nous rappelons succinctement la modélisation utilisée, puis des précisions sont apportées quant à l’implantation au sein du code de calcul Herezh++.

### 1.8.2 Avancement temporel avec le modèle de Runge-Kutta imbriqué

L'équation initiale d'avancement temporel du second ordre est transformée en un couple d'équations du premier ordre selon :

$$\begin{aligned}\dot{V} &= M^{-1}(R_{ext} - R_{int}) \\ \dot{X} &= V\end{aligned}\tag{41}$$

Que l'on peut noter de manière plus générale :

$$\dot{y} = f(t, y)\tag{42}$$

Le vecteur “y” comprend ainsi les vitesses et les positions, la fonction “f” permet d'en calculer sa dérivée première par rapport au temps.

Le nombre d'inconnues du problème est ainsi doublé. Cependant, ces équations peuvent être traitées dans la pratique séquentiellement ce qui minimise l'inconvénient.

Lorsque l'on applique un schéma de type Runge-Kutta il est possible d'utiliser deux ordres successifs de précision, dont les solutions respectives par soustraction permettent d'obtenir une estimation de l'erreur d'intégration. Les opérations intermédiaires pour le calcul des deux ordres successifs sont mutualisées (utilisés deux fois) pour minimiser le coût de calcul. On obtient ainsi les formules classiques de “Prince-Dormand embedding formulas” ou encore de “Fehlberg embedding formulas”. Ces résultats étant suffisamment classiques, nous ne rappelons ici que le raisonnement général, mais pour plus de précision on pourra consulter par exemple la référence ([Engeln-Müllges and Uhlig, 1996]) §17.

Par exemple dans le cas de la méthode RK-45 (ordres 4 et 5 emboîtés), on peut écrire (cf.[Press et al., 2002] §16) pour l'ordre 5 :

$$\begin{aligned}k_1 &= h f(t_n, y_n) \\ k_2 &= h f(t_n + a_2h, y_n + b_{21}k_1) \\ &\dots \\ k_6 &= h f(t_n + a_6h, y_n + b_{61}k_1 + \dots + b_{65}k_5) \\ y_{n+1} &= y_n + c_1k_1 + \dots + c_6k_6 + O(h^6)\end{aligned}\tag{43}$$

où : h est le pas d'avancement en temps choisit,  $a_i$   $b_{ij}$   $c_i$  sont des coefficients fixes spécifiques à la méthode.  $t_n$  est le temps initial où la solution est supposé connue, l'objectif étant d'obtenir la solution à  $t_{n+1}$  c'est-à-dire  $y_{n+1}$ . On remarque, que les coefficients  $k_i$  peuvent se calculer successivement conduisant à  $y_{n+1}$  de manière explicite.

D'une manière analogue pour l'ordre 4 nous avons :

$$y_{n+1}^* = y_n + c_1^* k_1 + \dots + c_6^* k_6 + O(h^5)\tag{44}$$

ce qui conduit à l'estimation d'erreur :

$$err = \sum_{i=1}^6 (c_i - c_i^*) k_i\tag{45}$$

Cette estimation d'erreur est utilisée pour piloter l'avancement du calcul, en particulier le pas de temps. Dans la pratique, le pilotage n'est pas si simple qu'il peut paraître de prime abord. Il tient compte de la précision disponible sur la machine de calcul, d'un nécessaire équilibrage des différentes équations de (42), des notions : d'erreurs globales (à tout le membre du vecteur "y") ou locales à chaque composante, d'erreurs absolues ou relatives, d'une stratégie pour augmenter ou diminuer le pas d'un calcul à l'autre en fonction des résultats obtenus ...

Dans notre cas, nous nous sommes appuyés d'une part sur les algorithmes proposés dans (cf. [Press et al., 2002] §16.2 et dans ([Engeln-Müllges and Uhlig, 1996]) §17.3, et d'autre part sur l'algorithme "RKF45.CC" que l'on peut consulter à l'adresse ([Watts and Shampine, 2005]).

### 1.8.3 Implantation

L'implantation comprend deux parties. Tout d'abord, une classe (au sens C++) de méthodes générales de résolution d'un système d'équations différentielles du premier ordre par la méthode de Runge-Kutta imbriquée a été mise en place. Cette classe intègre : les méthodes RK d'ordre 2 et 3 classiques, RK d'ordre 3 et 4 suivant l'algorithme proposé par Fehlberg, RK d'ordre 4 - 5 suivant l'algorithme proposé par Cash-Karp, et enfin la méthode de pilotage.

Ces méthodes sont organisées sous forme de template d'une classe générique qui doit contenir la fonction "f" et le vecteur "y".

La seconde partie de l'implantation concerne la définition de l'algorithme d'avancement temporel sous forme d'une classe dédiée au même titre que l'algorithme de Tchamwa par exemple. L'avancement temporel s'obtient à partir de la fonction "f" calculée d'après (41) et de l'algorithme de pilotage RK. Au cours du calcul de "f", on introduit les conditions limites, et on résout le système par inversion de la matrice "M".

Par rapport aux algorithmes DFC ou Tchamwa, le coût en temps de calcul d'un avancement temporel dépend de l'ordre de la méthode, mais dans tous les cas il est bien supérieur. Par exemple dans le cas RK45, 5 nouvelles évaluations de la fonction "f" (la première provenant du pas précédent) sont nécessaires pour un pas de temps, contrairement au cas DFC ou Tchamwa où une seule évaluation est nécessaire. D'une manière simplifiée, on peut dire que les méthodes DFC et dérivées sont équivalentes à une méthode RK du premier ordre sans vérification de la précision.

## 1.9 Convergence des différents schémas numériques

Un schéma numérique est dit convergent s'il est à la fois consistant et stable. L'étude de consistance et de stabilité fait appel à la notion de matrice d'amplification et la condition associée sur son rayon spectral.

La consistance permet, dans certains cas, de contraindre les paramètres de contrôle des schémas numériques. La présentation qui suit s'appuie sur des travaux effectués dans le cadre de la thèse d'Anthony Soive.



### 1.9.1 Consistance

Si l'on écrit un schéma numérique de la forme :

$$M\ddot{q}_{n+1} + \mathcal{R}_{int}(\dot{q}_{n+1}, q_{n+1}) = \mathcal{R}_{ext}(\dot{q}_{n+1}, q_{n+1})$$

$$\dot{q}_{n+1} = f(\dot{q}_n, \ddot{q}_n, \ddot{q}_{n+1})$$

$$q_{n+1} = f(q_n, \dot{q}_n, \dot{q}_{n+1}, \ddot{q}_n, \ddot{q}_{n+1})$$

et si l'on note  $u_n^T = [\dot{q}_n, q_n]$ , on peut étudier la consistance du schéma de la façon suivante :

*On dit qu'un schéma d'intégration est consistant si*

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{u_{n+1} - u_n}{h} = \dot{u}_n$$

ce qui entraîne, pour les différents algorithmes explicités précédemment

— pour la méthode de Newmark ou HHT

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{u_{n+1} - u_n}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \begin{pmatrix} (1 - \gamma)\ddot{q}_n + \gamma\ddot{q}_{n+1} \\ \dot{q}_n + h(\frac{1}{2} - \beta)\ddot{q}_n + h\beta\ddot{q}_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ddot{q}_n \\ \dot{q}_n \end{pmatrix}$$

— pour la méthode de Tchamwa

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{u_{n+1} - u_n}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \begin{pmatrix} \lambda\ddot{q}_n \\ \alpha\dot{q}_n + \gamma\dot{q}_{n+1} + h\beta\ddot{q}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda\ddot{q}_n \\ (\alpha + \gamma)\dot{q}_n \end{pmatrix}$$

Ainsi les méthodes de Newmark et de Hilbert, Hughes et Taylor sont consistantes quelques soient la valeur de leurs paramètres. En revanche, la méthode de Tchamwa l'est si  $\lambda = 1$  et si  $\alpha + \gamma = 1$ . L'algorithme de Tchamwa devient alors :

$$\begin{cases} M\ddot{q}_{n+1} + \mathcal{R}_{int}(\dot{q}_{n+1}, q_{n+1}) = \mathcal{R}_{ext}(\dot{q}_{n+1}, q_{n+1}) \\ \dot{q}_{n+1} = \dot{q}_n + h\ddot{q}_n \\ q_{n+1} = q_n + \alpha h\dot{q}_n + \beta h^2\ddot{q}_n + \gamma h(\dot{q}_n + h\ddot{q}_n) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M\ddot{q}_{n+1} + \mathcal{R}_{int}(\dot{q}_{n+1}, q_{n+1}) = \mathcal{R}_{ext}(\dot{q}_{n+1}, q_{n+1}) \\ \dot{q}_{n+1} = \dot{q}_n + h\ddot{q}_n \\ q_{n+1} = q_n + h\dot{q}_n + (\beta + \gamma)h^2\ddot{q}_n \end{cases}$$

### 1.9.2 Stabilité de la méthode de Tchamwa

Rappelons les expressions des équations de mouvement dans le cadre de petits déplacements :

$$M\ddot{d} + C\dot{d} + Kd = F$$

$d$  étant le déplacement nodal,  $M$  la matrice masse,  $C$  la matrice d'amortissement et  $K$  la matrice de raideur. L'algorithme de Tchamwa devient, après discrétisation temporelle et en notant  $\phi = \beta + \gamma$  :

$$\begin{cases} M\ddot{q}_{n+1} + C\dot{q}_{n+1} + Kq_{n+1} = F_{n+1} \\ \dot{q}_{n+1} = \dot{q}_n + h\ddot{q}_n \\ q_{n+1} = q_n + h\dot{q}_n + h^2\phi\ddot{q}_n \end{cases}$$

En supposant un amortissement de type Rayleigh et en faisant la décomposition modale de l'équation d'équilibre, on a :

$$\ddot{q}_{n+1} + 2\xi\omega\dot{q}_{n+1} + \omega^2q_{n+1} = F_{n+1}$$

Le système s'écrit alors

$$\begin{cases} \ddot{q}_{n+1} + 2\xi\omega\dot{q}_{n+1} + \omega^2q_{n+1} = F_{n+1} \\ \dot{q}_{n+1} = \dot{q}_n(1 - 2\xi h\omega) - h\omega^2q_n + hF_n \\ q_{n+1} = \dot{q}_n(h - 2\phi\xi h^2\omega) + q_n(1 - \phi h^2\omega^2) + \phi h^2F_n \end{cases}$$

Si l'on note  $u_n = \begin{pmatrix} \dot{q}_n \\ q_n \end{pmatrix}$ ,  $A$  la *matrice d'amplification* et  $L_n$  le *vecteur de chargement*, on peut écrire

$$u_{n+1} = Au_n + L_n$$

avec

$$A = \begin{pmatrix} 1 - 2\xi h\omega & -h\omega^2 \\ h(1 - 2\phi\xi h\omega) & 1 - \phi h^2\omega^2 \end{pmatrix}$$

D'autre part, la solution exacte peut s'écrire  $u(t_{n+1}) = Au(t_n) + L_n + \tau(t_n)$  où  $\tau(t_n)$  est l'erreur de troncature locale. En faisant alors la différence entre la solution exacte et la solution discrétisée, on a

$$e(t_{n+1}) = u(t_{n+1}) - u_{n+1} = A(u(t_n) - u_n) + \tau(t_n)$$

soit encore

$$\begin{aligned} e(t_{n+1}) &= Ae(t_n) + \tau(t_n) \\ &= A\{Ae(t_{n-1}) + \tau(t_{n-1})\} + \tau(t_n) \\ &= A^2e(t_{n-1}) + A\tau(t_{n-1}) + \tau(t_n) \\ &= A^{n+1}e(t_0) + \sum_{i=0}^n A^i\tau(t_{n-i}) \end{aligned}$$

En supposant que l'erreur initiale est nulle, on obtient finalement

$$e(t_{n+1}) = \sum_{i=0}^n A^i\tau(t_{n-i}) \quad (46)$$

On dit qu'un schéma numérique est stable s'il existe un pas d'intégration  $h_0 > 0$  tel que pour tout  $h \in [0, h_0]$ , une perturbation finie du vecteur d'état à l'instant  $t_n$  n'entraîne qu'une modification non croissante du vecteur d'état  $\begin{pmatrix} \dot{q}_{n+j} \\ q_{n+j} \end{pmatrix}$  calculé à un instant ultérieur  $t_{n+j}$ .

Il faut alors que le rayon spectral  $\rho(A)$ , défini par  $\rho(A) = \max(\lambda^i)$  où  $\lambda^i$  sont les valeurs propres de  $A$ , soit strictement inférieur à 1. Les valeurs propres de  $A$  sont  $\lambda_{1,2} = A_1 + \sqrt{A_1^2 - A_2}$ , avec  $A_1 = \frac{1}{2}\text{tr}(A)$  et  $A_2 = \det(A)$ .

L'étude de ces valeurs propres permet ainsi de définir une relation entre le temps critique et le paramètre d'amortissement numérique  $\Phi$ . On obtient finalement en notant  $\Omega = \frac{\Delta t}{T} \frac{2}{\pi}$  tel que  $\Delta t$  est le pas de temps,  $T$  est la plus petite période du système :

— Pour  $\xi = 0$

Condition sur $\phi$	condition de stabilité
$\phi \geq 1$	$\Omega < \sqrt{\frac{2}{\phi - \frac{1}{2}}}$

— Pour  $\xi \neq 0$

Conditions sur $\phi$		Conditions sur $\xi$	Stabilité $\Omega = \frac{\Delta t}{T} \frac{2 \Pi}{T}$
$\phi = 1 - \frac{2\xi}{\Omega}$		$\forall \xi$	$\Omega < 2$
$\phi > 1 - \frac{2\xi}{\Omega}$	$\phi < \frac{1}{2}$	$\xi \leq \sqrt{1 - 2\phi}$	inconditionnelle
	$\phi > 1$	$\forall \xi$	$\Omega \leq \frac{-\xi + \sqrt{\xi^2 + 2(\phi - \frac{1}{2})}}{\phi - \frac{1}{2}}$
	$\frac{1}{2} \leq \phi \leq 1$	$\forall \xi$	$\Omega \leq \frac{-\xi + \sqrt{\xi^2 + 2(\phi - \frac{1}{2})}}{\phi - \frac{1}{2}}$
		$\xi \leq \sqrt{2(1 - \phi)}$	inconditionnelle
	$\xi > \sqrt{2(1 - \phi)}$	$\frac{\xi + \sqrt{\xi^2 - 2(1 - \phi)}}{1 - \phi} \leq \Omega \leq \frac{\xi - \sqrt{\xi^2 - 2(1 - \phi)}}{1 - \phi}$	

avec

**Remarque** Dans le cas où  $\Phi = 1$  on retrouve la méthode classique des différences finies centrées. On observe que de tous les méthodes c'est la méthode des différences finies centrées qui permet d'avoir un pas de temps critique maximal.

## 1.10 Amortissement numérique

L'objectif est ici d'introduire un amortissement numérique qui permet de stabiliser soit les hautes fréquences soit même l'ensemble de la structure.

### 1.10.1 Amortissement de Rayleigh

Une matrice de viscosité  $C$  est construite à partir de la matrice de masse  $M$  et de la matrice de raideur  $K$ . On a  $C = \eta(\alpha M + \beta K)$  qui correspond à la formule classique de Rayleigh,  $\eta$  représente le coefficient de viscosité.

Cette viscosité numérique introduit alors des forces généralisées visqueuses :

$$F_{visqueux} = -\eta(\alpha M + \beta K)\dot{q} \quad (47)$$

et une énergie visqueuse d'origine numérique :

$$E_{visqueux} = \int_0^t \dot{q}^T F_{visqueux} dt \quad (48)$$

Dans le cas d'un calcul explicite, la raideur n'est pas explicitement connue. On peut par exemple utiliser alors la relation approchée suivante sur un pas de temps  $\Delta t$  :

$$K_{ii} = \left| \frac{\delta F_i}{\Delta q_i} \right| \quad (49)$$

La matrice  $K$  ainsi obtenue est diagonale et mesure la raideur tangente du système. Cette expression n'est utilisable que dans le cas où il y a mouvement. Dans le cas où le ddl est immobile, on annule la contribution de  $K$ .

Dans Herezh++, l'amortissement complet de Rayleigh n'est possible qu'en implicite où la matrice de raideur est disponible explicitement. En explicite, seule la partie relative à la matrice masse n'est disponible. On se sert néanmoins de l'évaluation approchée de la raideur pour le calcul de l'amortissement critique (cf.1.10.2).

### 1.10.2 Amortissement critique

Il peut être intéressant d'utiliser une portion de l'amortissement critique qui correspond à l'amortissement maximum sans oscillation. Dans le cas d'un oscillateur masse-ressort à un ddl l'amortissement critique est  $C = 2 \sqrt{k m}$ ,  $k$  étant la raideur du ressort et  $m$  étant la masse du ressort.

Dans un calcul explicite, on peut se servir de l'approximation (49) de la raideur pour en déduire un amortissement critique  $C_i$  adapté à chaque ddl  $q_i$ . Les forces d'origines visqueuses numériques sont alors :

$$F_{visqueux} = -\eta C \dot{q} \quad (50)$$

$\eta$  apparaît alors comme la proportion de la viscosité critique.

### 1.10.3 Bulk viscosity

La méthode du bulk viscosity est une méthode classique qui permet de filtrer automatiquement une partie des hautes fréquences numériques introduites par le schéma numérique d'avancement temporel : par exemple classiquement avec les différences finis centrées. La méthode consiste à introduire un terme de pression hydrostatique  $P$  tel que :  $P = \rho l(C_1 l I_D^2 - C_2 c I_D)$  si la trace est négative, 0 sinon.

La contrainte finale vaut donc :

$$\sigma_{finale} = \sigma - P \mathbf{I} = \sigma - \rho l(C_1 l I_D^2 - C_2 c I_D) \mathbf{I} \quad (51)$$

En fait, le bulk est implanté pour tous les éléments, indépendamment de la loi utilisée. Par contre au niveau de la sortie des résultats, la part de contrainte relative au Bulk est retirée. Ainsi seules les contraintes réelles sont affichées.

Dans le cas d'un choc (ou d'une onde de choc), le coefficient  $C_1$  de la partie quadratique en vitesse de déformation, est sensé contrôler ce qui se passe avant le pic du choc, alors que le coefficient  $C_2$  de la partie linéaire est sensée contrôler ce qui se passe après le passage du pic. Dans le cas du filtrage des hautes fréquences, c'est surtout le paramètre linéaire qui est donc prépondérant.

## 1.11 Algorithme de Relaxation dynamique

### 1.11.1 Introduction

Cette partie concerne les algorithmes de relaxation dynamique. Deux types d'amortissement sont proposés : amortissement cinétique et amortissement visqueux. Le premier s'appuie tout d'abord sur les travaux de Barnes puis amélioré par Julien Troufflard (cf. travaux de thèse) et enfin ici étendue à des éléments quelconques cf. travaux de thèse de

Javier Rodriguez Garcia. Pour les détails de la bibliographie, on se reportera aux travaux de thèse de Julien et de Javier puis aux références indiquées. Sont donc indiqués ici les points particuliers, relatifs à l'implantation dans Herezh++ et les éléments théoriques nécessaires.

On considère une simulation d'un phénomène dynamique à l'aide de l'algorithme classique de DFC. L'objectif du calcul est d'obtenir la forme finale de la structure, ceci en supposant que ce résultat ne dépend pas du trajet effectué entre les configurations initiale et finale. Ainsi, dans le cas de grands pas de chargement, on ne peut raisonnablement retenir cette stratégie que dans le cas d'une loi élastique ou hyperélastique. Cependant, on sait que dans le cas de fortes non-linéarités géométriques, la forme finale peut dépendre du trajet même pour un comportement matériel élastique. Ceci constituera donc une limitation. L'algorithme est donc modifié de manière à pouvoir décomposer le chargement en plusieurs incréments (comme dans le cas d'une méthode de Newton).

Compte tenu de l'objectif, et dans le cadre des restrictions présentées, on suppose que la masse n'influence pas le résultat recherché.

L'idée est alors d'adapter pendant le calcul la valeur des composantes de la matrice masse, conjointement à une méthode d'amortissement cinétique ou d'amortissement visqueux, de manière à minimiser le temps de calcul global, ou de façon équivalente, minimiser le nombre de pas de temps conduisant à une solution stable.

### 1.11.2 Amortissement cinétique et calcul de masses fictives

L'amortissement cinétique consiste à remettre les vitesses à 0, à chaque pic d'énergie cinétique. Dans le cas où aucune énergie externe n'est fournie, seule reste disponible, l'énergie interne élastique, pour pouvoir évoluer vers la configuration d'équilibre. Lorsqu'il n'y a plus de mouvement, cela signifie que l'équilibre des forces généralisées internes et externes est réalisé : les forces d'accélération sont nulles. Ces forces d'accélération sont fonction de la masse.

Barnes propose d'adopter pour un élément triangulaire, une matrice masse diagonale dont les termes  $m_i$  sont :

$$m_i = \lambda \frac{\Delta t^2}{2} k_{imax} \quad (52)$$

avec

$$k_{imax} = \sum_e \frac{ep}{4 S_0^e} \left( \frac{E}{1 - \nu^2} + \sigma_x + \sigma_y + \sigma_{xy} \right) \quad (53)$$

où  $ep$  est l'épaisseur de l'élément  $e$ ,  $S_0^e$  la surface initiale de l'élément,  $\sigma_x$   $\sigma_y$   $\sigma_{xy}$  sont les composantes du tenseur des contraintes dans un repère orthonormé que l'on suppose lié à l'élément,  $E$  et  $\nu$  sont les coefficients d'une loi élastique isotrope. Le pas de temps est arbitraire, par simplicité il est choisi égal à 1 dans la formule du calcul de la masse. La conséquence est que ce pas de temps n'intervient pas directement au niveau de l'algorithme d'avancement temporel, si ce n'est au niveau du chargement, des conditions limites et du comportement matériel. Dans ce dernier cas on sort du contexte normal de l'utilisation de l'algorithme ! voir les remarques précédentes sur la réversibilité de la loi de comportement.

Julien Troufflard propose de supprimer le terme de surface ce qui permet d'obtenir une grandeur homogène à une masse. Il montre en particulier que dans ce cas la valeur

optimum du coefficient  $\Lambda$  est beaucoup plus stable, ce qui constitue un réel avantage lorsque l'on cherche à définir la valeur de ce paramètre de contrôle.

Dans notre cas, nous proposons d'étendre la formulation d'une part à d'autres éléments et d'autre part à d'autres lois de comportement. L'idée est ainsi d'étudier la faisabilité de cette extension.

Le terme  $\frac{E}{1-\nu^2}$  peut-être considéré comme contrôlant le changement de forme ou le changement de volume de l'élément. Il est donc remplacé par une combinaison linéaire du module de compressibilité et du module de cisaillement moyen, disponible pour toutes les lois élastiques et hyper-élastiques :  $\alpha K + \beta\mu$ . Dans un premier temps on pourra choisir par exemple  $\alpha = \beta = 1$  ce qui conduit à une grandeur sensiblement identique à la formule initiale à condition que l'incompressibilité ne soit pas trop importante.

Par exemple si  $\nu = 0.3$  on obtient :  $\alpha K + \beta\mu \approx 1.21 E$  alors qu'avec la formule de Barnes on a :  $E/(1 - \nu) \approx 1.1 E$

Le terme  $\sigma_x + \sigma_y + \sigma_{xy}$  peut-être considéré comme représentatif du niveau de contrainte atteint dans le matériau, niveau cumulant les aspects sphérique et déviatorique. Il est donc remplacé par une combinaison d'invariants

$$1/3.(\sigma_I + \sigma_{II} + \sigma_{III}) = \frac{\mathbf{I}_\sigma}{3} \text{ et } 0.5 \sigma_{mises}$$

, avec  $\sigma_{I_i}$  les valeurs propres de  $\boldsymbol{\sigma}$ , et  $\sigma_{mises}$  la contrainte de mises. A priori on prend la valeur absolue de chaque terme de manière à garantir une masse positive.

Au final on obtient :

$$k_{imax} = \sum_e \frac{ep}{4} \left( \alpha K + \beta\mu + \gamma \frac{\mathbf{I}_\sigma}{3} + \frac{\theta}{2} \sigma_{mises} \right) \quad (54)$$

Les paramètres  $\alpha, \beta, \gamma, \theta$  permettent ainsi de contrôler l'influence de chaque entité.

Dans le cas d'un élément 3D, l'épaisseur est remplacée par la longueur caractéristique suivante :  $l_{car} = (volume)^{1/3}$ . Le reste de la formule est inchangé par commodité.

Dans le cas d'un élément 1D, l'épaisseur est remplacée par la longueur caractéristique suivante :  $l_{car} = volume/(Sectionmoyenne)$ . Le reste de la formule est inchangé par commodité.

De manière à étudier le comportement de l'algorithme, différents cas de calcul sont possibles d'une part au niveau du calcul de la masse, et d'autre part au niveau du test de la convergence.

Concernant le calcul de la masse, en prenant en compte tous les éléments "N" entourant un noeud, on considère les cas suivant :

1. la formule (54) est cumulé au noeud selon :

$$k_{noeud} = \sum_{ne=1}^N k_{imax}$$

la valeur finale à un noeud dépend donc du nombre d'éléments qui contiennent le noeud.

2. on retient la valeur maximum de (54), calculé pour tous les éléments qui contiennent le noeud :

$$k_{noeud} = Max_N(k_{imax})$$

3. on retient la valeur moyenne de (54), calculé pour tous les éléments qui contiennent le noeud :

$$k_{noeud} = \frac{1}{N} \sum_{ne=1}^N k_{imax}$$

4. idem le cas 3, et de plus on divise par la surface moyenne entourant le noeud, calculée de la manière suivante :

$$k_{noeud} = \sum_{ne=1}^N k_{imax} / \frac{S_{ne}}{nbn_{ne}}$$

où  $S_{ne}$  est la surface de l'élément et  $nbn_{ne}$  est le nombre de noeuds de l'élément.

Concernant la convergence, deux cas sont investigués :

1. la convergence s'appuie sur le résidu en absolu ou relatif suivant la méthode générale utilisée par exemple pour mesurer la convergence dans un calcul statique.
2. la convergence s'appuie sur le déplacement (ou la vitesse) selon les paramètres de l'algorithme de relaxation cinétique.

### 1.11.3 Amortissement visqueux critique

L'objectif est d'utiliser un amortissement qui permet d'atteindre le plus rapidement possible la solution statique. Tout d'abord on s'intéresse à l'algorithme proposé par P. Underwood [Underwood, 1983].

**Matrice masse** La première partie concerne le calcul de la matrice masse. Underwood propose d'utiliser le théorème de Gerschgorin qui permet de trouver une borne supérieure à la valeur propre  $i$  de la raideur d'où une matrice masse fictive permettant la stabilité qui se calcule sous la forme :

$$m_{ii} \geq \frac{1}{4}(\Delta t)^2 \sum_j |K_{ij}| \quad (55)$$

avec  $m_{ii}$  les composantes diagonales de la matrice masse,  $K_{ij}$  les composantes (i,j) de la matrice de raideur. D'une manière pratique, dans notre cas, on retient également le max des 3 composantes en dimension 3 (2 ou 1 en dimension 2 ou 1), ceci pour pallier au fait qu'une des 3 raideurs peut éventuellement être nulle, par exemple dans le cas d'une membrane. Ainsi d'une manière pratique dans Herezh la relation implantée permettant le calcul des masses fictives  $m_{ii}$ , s'écrit sous la forme de :

$$m_{ii} = \frac{\lambda(\Delta t)^2}{2} S_i \text{ avec } S(i) = MAX_{a=1}^{dim} \sum_{j=1, b=1}^{n, dim} |K(a_i, b_j)| \quad (56)$$

avec "dim" la dimension du problème physique.  $\lambda$  est un paramètre qui doit-être supérieur à 0.5 pour garantir la stabilité du schéma. Underwood propose d'utiliser un temps de 10% supérieur à la limite critique, ce qui revient à prendre une valeur de  $\lambda = 0.605 \approx 0.6$

**Mise à jour de la matrice masse :** D'une manière pratique, si l'on considère la maximum sur les 3 dimensions pour le calcul de la matrice masse (cf. 55) la raideur initiale reste souvent supérieure à la raideur en cours de calcul. Cependant, des non-linéarités de structures (éventuellement de matériau) peuvent faire apparaître un accroissement de la raideur en cours de calcul. Il est alors nécessaire de mettre à jour les masses fictives pour garantir la continuité de la stabilité. Underwood propose d'utiliser un critère qui s'appuie sur "the perturbed apparent frequency error measure" fonctionnant de la manière suivante. On calcule l'erreur  $\epsilon$  selon :

$$\epsilon = MAX_{i=1}^{nbdll}(\epsilon_i) \text{ avec } \epsilon_i = \frac{\lambda(\Delta t)^2}{2} \frac{|\Delta \ddot{X}_i|}{|\Delta X_i|} \quad (57)$$

avec  $\Delta \ddot{X}_i$  l'accroissement de l'accélération pour le ddl  $i$ , lors du précédent incrément de temps, et  $\Delta X_i$  l'accroissement de la position. Puis on effectue le test  $\epsilon > 1$ , si oui, il faut soit recalculer la matrice masse ou sinon diminuer le pas de temps c'est-à-dire augmenter le paramètre  $\lambda$ .

**Amortissement visqueux** L'amortissement visqueux est introduit à l'aide d'une matrice diagonale.

$$[C] = c[M] \text{ avec } c = 2\omega_0 \quad (58)$$

$\omega_0$  est supposé être la fréquence la plus basse du système, approchée à l'aide du quotient de Rayleigh's.

$$\omega_0^2 \approx \frac{\Delta X^T K^n \Delta X}{\Delta X^T M \Delta X} \quad (59)$$

Dans le cas où la matrice  $K^n$  n'est pas directement accessible, Underwood propose une seconde approximation dans le cadre d'un algorithme d'avancement de type différences finies :

$$\omega_0^2 \approx \frac{\Delta X^T {}^l K^n \Delta X}{\Delta X^T M \Delta X} \text{ avec } {}^l K_{ii}^n = \frac{\Delta R_{i(statique)}^n}{\Delta t \dot{X}_i^{n-1/2}} \quad (60)$$

En fait la dérivée numérique peut s'effectuer soit par rapport à l'incrément de ddl soit par rapport à la vitesse :

$$(2) {}^l K_{ii}^n = \frac{\Delta R_{i(statique)}^n}{\Delta X} \quad (61)$$

Si on retient cette dernière expression sera conduirait au calcul de la fréquence minimale :

$$\omega_0^2 \approx \frac{\Delta X^T \Delta R_{i(statique)}^n}{\Delta X^T M \Delta X} \text{ ou bien } \omega_0^2 \approx \frac{\dot{X}^T \Delta R_{i(statique)}^n}{\dot{X}^T M \dot{X}} \quad (62)$$

Underwood propose également deux limitations.

- Dans le cas où la valeur obtenue pour  $\omega_0^2$  est négative, il propose de poser  $\omega_0^2 = 0$ .
- En supposant que l'on a un pas de temps proche du pas critique mis à 1, cela signifie que la fréquence maxi est proche de 2 ( $\Delta t \approx 2/\omega_{max}$ ). Dans ce cas la fréquence minimale doit également être inférieure à 2. Ainsi si l'on a :  $\omega_0^2 > 4$ , il y a une incohérence. Underwood propose de limiter  $\omega_0$  a une valeur typiquement 1.9



Troisième partie  
**Métriques**

## 2 Particularités liées à la vitesse de déformation virtuelle

La forme variationnelle de l'équation d'équilibre fait apparaître le terme de vitesse de déformation virtuelle  $\overset{*}{\mathbf{D}}$ . La présentation qui suit concerne le calcul de ce terme ainsi que sa variation par rapport aux degrés de liberté.

Tout d'abord, rappelons que la vitesse de déformation peut s'exprimer sous la forme :

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2}(V_i|_j + V_j|_i)\hat{g}^i \otimes \hat{g}^j \quad (63)$$

Dans le cas d'une discrétisation classique  $\vec{V} = V^{ar}\vec{I}_a\varphi_r$  :

$$V_i|_j = \vec{V}_{,j} \cdot \hat{g}_i = (V^{ar}\vec{I}_a\varphi_{r,j}) \cdot (X^{bs}\vec{I}_b\varphi_{s,i}) = V^{ar}\varphi_{r,j}\varphi_{s,i}X^{as} \quad (64)$$

D'où la vitesse de déformation :

$$D_{ij} = V^{ar}(\varphi_{r,j}\varphi_{s,i} + \varphi_{r,i}\varphi_{s,j})X^{as} \quad (65)$$

Dans le cas de vitesses virtuelles :

$$\overset{*}{D}_{ij} = \overset{*}{V}^{ar}(\varphi_{r,j}\varphi_{s,i} + \varphi_{r,i}\varphi_{s,j})X^{as} \quad (66)$$

Cette expression est linéaire en fonction des degrés de liberté. On en déduit sa variation par rapport aux degrés de liberté.

$$\frac{\partial \overset{*}{D}_{ij}}{\partial X^{bs}} = \delta^{ba} \overset{*}{V}^{ar}(\varphi_{r,j}\varphi_{s,i} + \varphi_{r,i}\varphi_{s,j}) \quad (67)$$

Cette expression est constante tout au long du calcul, et ne dépend que du type d'interpolation. Elle peut donc avantageusement être évaluée et stockée au début du calcul, pour chaque type d'élément dans le cas d'un calcul implicite qui s'appuie sur une matrice tangente analytique, type Newton Raphson.

Quatrième partie

# Lois de comportements

### 3 Loi de Hooke isotrope 3D et 2D

Il s'agit de la loi classique élastique de Hooke qui suppose une relation linéaire entre contraintes et déformations. La loi peut se représenter par exemple à l'aide de deux coefficients de proportionnalité :

$$-P = \frac{\text{trace}(\boldsymbol{\sigma})}{3} = K \text{trace}(\boldsymbol{\varepsilon}) \quad \text{et} \quad \mathbf{S} = 2 G \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (68)$$

où  $K$  est le module de compressibilité et  $G$  le module de cisaillement.

On a :

$$K = \frac{E}{3(1-2\nu)} \quad \text{et} \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (69)$$

avec  $E$  et  $\nu$  le module d'Young et le coefficient de Poisson.

La contrainte peu également est calculée via l'expression équivalente suivante :

$$\boldsymbol{\sigma} = \left( \frac{(E \nu)}{((1-2\nu)(1+\nu))} \mathbf{I}_\varepsilon \right) \mathbf{I} + \frac{E}{(1+\nu)} \boldsymbol{\varepsilon} \quad (70)$$

L'expression  $\text{trace}(\boldsymbol{\varepsilon})$  est sensée représenter la variation relative volumique  $\frac{\Delta \text{vol}}{\text{vol}_0}$ . En petite déformation et dans un repère orthonormé, en tenant compte de l'expression approchée :  $\lambda_i \approx 1 + \varepsilon_{ii}$ , on obtient :  $\frac{\text{vol} - \text{vol}_0}{\text{vol}_0} \approx \frac{\text{vol} - \text{vol}_0}{\text{vol}} \approx \text{trace}(\boldsymbol{\varepsilon})$ ,  $\lambda_i$  représentant l'élongation dans la direction "i" (i.e.  $\lambda_i = L_i / L_{i0}$ ).

Dans le cas de l'utilisation de la mesure de déformation logarithmique  $e_{ii} = \ln(\lambda_i)$  d'où  $\ln(V) = \text{trace}(\mathbf{e})$ , avec  $V = \text{vol} / \text{vol}_0$

Par contre dans le cas des transformations finies (grandes déformations) avec une mesure d'Almansi (mesure par défaut dans Herezh++) ou la mesure classique de Green Lagrange, l'expression représente grossièrement la variation relative de volume. Dans ce dernier contexte, la loi reste utilisable, mais la signification des coefficients change, en particulier le coefficient  $K$  ne représente plus exactement un module de compressibilité.

On retiendra donc que les résultats dépendent du type de mesure de déformation utilisé, dans le cas des grandes déformations (ou transformations finies).

Le comportement se décline aisément en 4 cas particuliers :

1. une seule contrainte est non nulle (ex : traction simple) : utilisée par exemple par les éléments biellettes,
2. état de déformation plane : utilisée par exemple par des éléments 2D (triangles, quadrangles)
3. état de contrainte plane : utilisée par exemple par des éléments 2D (triangles, quadrangles)
4. état général 3D : utilisée par exemple par des éléments volumiques.

Dans le cas de la recherche du tenseur contrainte, on dispose du tenseur de déformation, complet pour les cas 3D, 2D en déformation plane et 1D. Pour le cas de contrainte plane, il est possible d'utiliser explicitement le fait que l'effort normal est nul, ce qui permet d'obtenir la déformation normale.

La relation (70) vraie quelque soit l'état élastique dans le cas du modèle de Hooke, permet le calcul de la déformation suivant l'axe 3, compte tenu de la nullité de la contrainte, selon par exemple en mixte :

$$\varepsilon_3^3 = \frac{-\nu}{1-\nu} (\varepsilon_1^1 + \varepsilon_2^2) \quad (71)$$

La trace de  $\boldsymbol{\varepsilon}$  s'en déduit. Les termes  $\sigma_\beta^\alpha$ , ( $\alpha, \beta = 1, 2$ ) s'obtiennent alors en utilisant de nouveau la relation (70).

Dans le cas de l'utilisation de la loi en contrainte plane avec des éléments 2D (plaques, coques) l'épaisseur de l'élément varie, et est mise à jour dans le calcul. En particulier l'équilibre mécanique tient compte de la variation de l'épaisseur. On se reportera à (16.1) pour le détail du calcul de la mise à jour de l'épaisseur dans un cas générale. Bien noter que le module de compressibilité utilisé pour la mise à jour de l'épaisseur est toujours, dans le cas de la loi de Hooke, celui calculé par l'expression (69), quelle que soit la mesure de déformation utilisée. Ceci peut entraîner une différence entre les plaques ou poutres en traction, comparées à un calcul en 3D volumique, dans le cas de la mesure d'Almansi, et de grandes déformations. A priori, il est alors préférable d'utiliser une loi hyperélastique. On se reportera à (16.3) pour plus d'information. Noter également qu'il est possible d'utiliser la mesure de déformation logarithmique avec la loi de Hooke. Dans ce cas en traction simple, les calculs 3D et contraintes planes donnent les mêmes résultats (cf. 16.3).

Enfin, il est possible de définir un module d'Young thermodépendant, selon une fonction quelconque, définie soit à l'aide des fonctions analytiques déjà définies dans Herezh++ ou soit via un tableau de points.

### 3.1 Opérateur tangent $\frac{\partial \sigma^{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}}$

On part de l'expression (70) que l'on réécrit sous la forme condensée :

$$\boldsymbol{\sigma} = (\alpha_1 \mathbf{I}_\varepsilon) \mathbf{I} + \alpha_2 \boldsymbol{\varepsilon} \quad (72)$$

Ou encore :

$$\sigma^{ij} = \alpha_1 \mathbf{I}_\varepsilon \hat{g}^{ij} + \alpha_2 \varepsilon_{rm} \hat{g}^{rj} \hat{g}^{mj} \quad (73)$$

On suppose que la mesure de déformation est celle d'Almansi. Dans ce cas nous avons :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{I}_\varepsilon}{\partial \varepsilon_{kl}} &= \hat{g}^{kl} - 2 \varepsilon^{kl} \\ \frac{\partial \hat{g}^{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}} &= -2 \hat{g}^{ik} \hat{g}^{jl} \end{aligned} \quad (74)$$

D'où le calcul de l'opérateur tangent :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma^{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}} &= \alpha_1 \frac{\partial \mathbf{I}_\varepsilon}{\partial \varepsilon_{kl}} \hat{g}^{ij} + \alpha_1 \mathbf{I}_\varepsilon \frac{\partial \hat{g}^{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}} + \alpha_2 \delta^{kr} \delta^{lm} \hat{g}^{ri} \hat{g}^{mj} + \alpha_2 \varepsilon_{rm} \frac{\partial \hat{g}^{ri}}{\partial \varepsilon_{kl}} \hat{g}^{mj} + \alpha_2 \varepsilon_{rm} \hat{g}^{ri} \frac{\partial \hat{g}^{mj}}{\partial \varepsilon_{kl}} \\ &= \alpha_1 (\hat{g}^{kl} - 2 \varepsilon^{kl}) \hat{g}^{ij} - 2 \alpha_1 \mathbf{I}_\varepsilon \hat{g}^{ik} \hat{g}^{jl} + \alpha_2 \hat{g}^{ik} \hat{g}^{jl} \\ &\quad - 2 \alpha_2 \varepsilon_{rm} \hat{g}^{rk} \hat{g}^{il} \hat{g}^{mj} - 2 \alpha_2 \varepsilon_{rm} \hat{g}^{ri} \hat{g}^{mk} \hat{g}^{jl} \\ &= \alpha_1 \hat{g}^{ij} \hat{g}^{kl} - 2 \alpha_1 \hat{g}^{ij} \varepsilon^{kl} + (\alpha_2 - 2 \alpha_1 \mathbf{I}_\varepsilon) \hat{g}^{ik} \hat{g}^{jl} - 2 \alpha_2 (\hat{g}^{il} \varepsilon^{jk} + \varepsilon^{ik} \hat{g}^{jl}) \end{aligned} \quad (75)$$

En notation tensorielle cela donne pour l'opérateur tangent relatif aux variations des coordonnées deux fois contravariantes de la contrainte, par rapport aux coordonnées deux fois covariantes de la déformation, et en ne conservant pour l'opérateur que les termes qui respectent les symétries, les autres termes disparaissant lors de l'application de la méthode de Newton avec le PPV :

$$\left(\frac{\partial \sigma}{\partial \epsilon}\right)_{\dots} (sym) = \alpha_1 \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} - 2\alpha_1 \mathbf{I} \otimes \boldsymbol{\epsilon} + (\alpha_2 - 2\alpha_1 \mathbf{I}_\epsilon) \mathbf{I} \overset{*}{\otimes} \mathbf{I} - 4\alpha_2 \mathbf{I} \overset{*}{\otimes} \boldsymbol{\epsilon} \quad (76)$$

Avec la notation suivante :

$$\mathbf{T}'' = \mathbf{A} \overset{*}{\otimes} \mathbf{B} = 1/4.(A^{ik}.B^{jl} + A^{jk}.B^{il} + A^{il}.B^{jk} + A^{jl}.B^{ik})\hat{g}_i \otimes \hat{g}_j \otimes \hat{g}_k \otimes \hat{g}_l \quad (77)$$

Explication :

Les tenseurs de contraintes et de déformation sont symétriques. Dans une méthode de Newton, on va déterminer un incrément de contrainte via la relation :

$$\begin{aligned} \Delta \sigma^{ij} &= 1/2 (\Delta \sigma^{ij} + \Delta \sigma^{ji}) \\ &= \frac{\partial \sigma^{ij}}{\partial \epsilon_{kl}} \Delta \epsilon_{kl} \\ &= 1/2 \left( \frac{\partial \sigma^{ij}}{\partial \epsilon_{kl}} \Delta \epsilon_{kl} + \frac{\partial \sigma^{ij}}{\partial \epsilon_{lk}} \Delta \epsilon_{lk} \right) \\ &= 1/4 \left( \frac{\partial \sigma^{ij}}{\partial \epsilon_{kl}} \Delta \epsilon_{kl} + \frac{\partial \sigma^{ij}}{\partial \epsilon_{lk}} \Delta \epsilon_{lk} + \frac{\partial \sigma^{ji}}{\partial \epsilon_{kl}} \Delta \epsilon_{kl} + \frac{\partial \sigma^{ji}}{\partial \epsilon_{lk}} \Delta \epsilon_{lk} \right) \\ &= 1/4 \left( \frac{\partial \sigma^{ij}}{\partial \epsilon_{kl}} + \frac{\partial \sigma^{ij}}{\partial \epsilon_{lk}} + \frac{\partial \sigma^{ji}}{\partial \epsilon_{kl}} + \frac{\partial \sigma^{ji}}{\partial \epsilon_{lk}} \right) \Delta \epsilon_{kl} \end{aligned} \quad (78)$$

Ceci justifie le calcul de l'opérateur tangent, qui permet d'obtenir par produit doublement contracté, le même résultat que l'opérateur complet. D'où la notation "(sym)" qui rappelle que la relation (76) ne correspond pas terme à terme à (75). Par contre, l'opérateur ainsi calculé étant symétrique par rapport à ses deux premiers indices et par rapport à ses deux derniers indices, il est représenté par seulement 36 composantes.

On peut également consulter (28.5) pour une explication plus générale.

### 3.1.1 Cas uniquement sphérique

Cas où seul l'opérateur de la partie sphérique est conservé. En fait, on peut utiliser les mêmes relations que précédemment, avec comme particularités :  $\alpha_1 = K$  et  $\alpha_2 = 0$  d'où le résultat :

$$\left(\frac{\partial \sigma}{\partial \epsilon}\right)_{\dots} = K \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} - 2K \mathbf{I} \otimes \boldsymbol{\epsilon} + (-2K \mathbf{I}_\epsilon) \mathbf{I} \overset{*}{\otimes} \mathbf{I} \quad (79)$$

### 3.1.2 Cas uniquement déviatorique

Cas où seul l'opérateur de la partie déviatorique est conservé. En fait, on peut utiliser les mêmes relations que précédemment, avec comme particularités :  $\alpha_1 = \frac{-2G}{3} = \frac{-E}{3(1+\nu)}$  et  $\alpha_2 = 2G$  d'où le résultat en utilisant la formule (76).

## 4 Comportement hyperélastique

Les éléments théoriques concernant l'ensemble des comportements hyperélastiques implantés dans Herezh++, sont explicités dans le document "hyper-elasticite.pdf" . On se reportera donc à ce document.

## 5 Comportements hypoélastiques

### 5.1 Loi 3D isotrope

#### 5.1.1 Relations générales et intégration

Le comportement hypoélastique isotrope implanté est défini par les relations suivantes :

$$\dot{\mathbf{S}} = \mu \bar{\mathbf{D}} \text{ et } \dot{I}_\sigma = K_c I_{\mathbf{D}} \quad (80)$$

avec  $\bar{\mathbf{D}}$  le déviateur du tenseur vitesse de déformation,  $\dot{\mathbf{S}}$  une dérivée matérielle du déviateur des contraintes,  $\dot{I}_\sigma$  la dérivée de la trace du tenseur des contraintes ( $= -3 \times \text{pression}$ ) et  $I_{\mathbf{D}}$  la trace du tenseur de vitesse de déformation.

Malgré le fait que la vitesse de déformation intervienne dans les équations constitutives, il ne s'agit pas d'une loi visqueuse : la contrainte ne dépend pas de la vitesse de déformation, elle dépend de son intégrale.

Ainsi  $\mu$  est un module qui est analogue à 2 fois le module classique de cisaillement en petites déformations et  $K_c$  est un module qui est analogue à 3 fois le module classique de compressibilité en petites transformations.

On retrouve donc dans ces relations une forme incrémentale de la loi de Hooke. Cependant il faut noter qu'une loi hypoélastique ne conduit pas nécessairement à un comportement réversible. En particulier l'utilisation de modules  $\mu$  et  $K_c$  variables pendant le chargement, permet de simuler une grande variété de comportements, en général non-réversibles.

**Remarque :** Dans le cas où  $K_c$  et  $\mu$  sont constant on a les relations suivantes :

$$K_c = \frac{E}{(1 - 2\nu)} \text{ et } \mu = 2G = \frac{E}{(1 + \nu)}$$

d'où

$$E = \frac{3K_c\mu}{(\mu + 2K_c)} \text{ et } \nu = \frac{K_c - \mu}{(\mu + 2K_c)} \quad (81)$$

Dans l'implantation dans Herezh++, les paramètres de la loi  $\mu$  et  $K_c$ , peuvent être, dépendants ou non de la température, et éventuellement dépendant de l'intensité au carré du tenseur de déformation  $II_\varepsilon = \varepsilon : \varepsilon$ . On pourrait également envisager d'autres types de dépendances directes, a priori il n'y a pas de limitation.

Les paramètres  $\mu$  et  $K_c$  peuvent également être définis via des fonctions nD ce qui étend les possibilités. Cependant, contrairement à la dépendance à  $II_\varepsilon = \varepsilon : \varepsilon$ , l'opérateur tangent  $\frac{\partial \sigma^{ij}}{\partial \varepsilon^{kl}}$  ne prend pas en compte les variations de la fonction nD.

Trois types de dérivées matérielles sont implantées dans Herezh++ : Jauman (cf. 6.1 et 6.3) (c'est-à-dire 1/2 de la somme des dérivées de Lie en mixte dans les deux sens ),

de Lie deux fois covariantes (valeur par défaut), et de Lie deux fois contravariantes. Un paramètre de réglage optionnel permet de choisir entre ces 3 cas.

D'une manière pratique, la loi de comportement est intégrée par linéarisation de l'équation constitutive. Considérons un pas de temps  $\Delta t$  et l'accroissement de contrainte correspondant  $\Delta \boldsymbol{\sigma}$ . Cherchons tout d'abord à intégrer la partie sphérique de la loi :

$$\frac{\Delta I \boldsymbol{\sigma}}{\Delta t} = K_c \mathbf{I}_D \quad \text{d'où} \quad \Delta I \boldsymbol{\sigma} = K_c \Delta t \mathbf{I}_D \quad (82)$$

avec  $\Delta \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_{t+\Delta t} - \boldsymbol{\sigma}_t$ .

Le choix du type de dérivée matérielle intervient au niveau du calcul du terme  $\boldsymbol{\sigma}_t$  qui représente la grandeur que l'on doit transporter de  $t$  à  $t+\Delta t$ .

Dans le cas d'une dérivée deux fois covariante, nous avons à l'instant final :

$${}_{..t}^{t+\Delta t} \boldsymbol{\sigma}_{(t)} = \sigma_{ij}(t) \hat{g}^i \otimes \hat{g}^j \quad (83)$$

Pour la dérivée deux fois contravariantes :

$${}_{..t}^{t+\Delta t} \boldsymbol{\sigma}_{(t)} = \sigma^{ij}(t) \hat{g}_i \otimes \hat{g}_j \quad (84)$$

Pour la dérivée de Jauman, on utilise le transport correspondant à la demi-somme des deux résultats précédents.

Dans le cas de la partie déviatorique, le même raisonnement conduit à une relation similaire :

$$\Delta \mathbf{S} = \mu \Delta t \bar{\mathbf{D}} = \mu \Delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (85)$$

Au final on obtient alors :

$$I_{(t+\Delta t)} \boldsymbol{\sigma} = K_c \Delta t \mathbf{I}_D + I_{(t)} \boldsymbol{\sigma} = K_c \mathbf{I}_{\Delta \boldsymbol{\varepsilon}} + I_{(t)} \boldsymbol{\sigma} \quad (86)$$

et

$$\mathbf{S}_{(t+\Delta t)} = \mu \Delta t \bar{\mathbf{D}} + \mathbf{S}_{(t)} = \mu \Delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} + \mathbf{S}_{(t)} \quad (87)$$

### 5.1.2 Opérateur tangent $\frac{\partial \sigma^{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}}$

**Remarque** Cette partie est construite suivant un canevas analogue au cas de la loi viscoélastique de Maxwell d'où des redondances, qui permettent cependant une lecture indépendante.

L'opérateur tangent est utilisé en général (mais pas seulement) pour les équilibres globaux satisfaits de manière implicite via une méthode de Newton. C'est l'algorithme de calcul statique utilisé par défaut dans Herezh++. L'opérateur tangent est par exemple également nécessaire pour un calcul Umat classique, ainsi que pour l'application des contraintes planes et doublement planes.

Dans le cas où d'un calcul Umat classique, les calculs s'effectuent dans une base de travail orthonormée. Actuellement, les cinématiques sont considérées irrotationnelles, ainsi les dérivées temporelles sont directement effectuées dans le repère de travail. L'idée est que le programme qui utilise l'Umat a déjà effectué les transformations de repère.



Dans le cas général (en dehors du cas de l'Umat classique) on doit prendre en compte la variation des bases. Comme pour le cas de l'élasticité linéaire, on suppose que la mesure de déformation est celle d'Almansi (qui est la mesure native d'Herezh).

Le paragraphe 3.1 fournit une partie de la réponse c'est-à-dire les informations liées à la déformation. Concernant la vitesse de déformation en utilisant la relation 112 ce qui conduit à la relation 116 :

$$\frac{\partial D_{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}} = \frac{1}{\Delta t} \delta_i^k \delta_j^l$$

D'où pour la trace en tenant compte de l'expression 74, s'écrit 117 :

$$\begin{aligned} \frac{\partial D_i^i}{\partial \varepsilon_{kl}} &= \frac{\partial D_{ij} \hat{g}^{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}} = \frac{1}{\Delta t} \delta_i^k \delta_j^l \hat{g}^{ij} + D_{ij} \frac{\partial \hat{g}^{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}} = \frac{1}{\Delta t} \hat{g}^{kl} - 2 D_{ij} \hat{g}^{ik} \hat{g}^{jl} \\ &= \frac{1}{\Delta t} \hat{g}^{kl} - 2 D^{kl} \end{aligned}$$

Pour le tenseur vitesse de déformation on aura de manière similaire on obtient la relation 118 :

$$\begin{aligned} \frac{\partial D_i^j}{\partial \varepsilon_{kl}} &= \frac{\partial D_{ie} \hat{g}^{ej}}{\partial \varepsilon_{kl}} = \frac{1}{\Delta t} \delta_i^k \delta_e^l \hat{g}^{ej} + D_{ie} \frac{\partial \hat{g}^{ej}}{\partial \varepsilon_{kl}} = \frac{1}{\Delta t} \delta_i^k \hat{g}^{lj} - 2 D_{ie} \hat{g}^{ek} \hat{g}^{jl} \\ &= \frac{1}{\Delta t} \delta_i^k \hat{g}^{lj} - 2 D_i^k \hat{g}^{jl} \end{aligned}$$

En deux fois contravariants (119) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial D^{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}} &= \frac{\partial (\hat{g}^{ie} D_e^j)}{\partial \varepsilon_{kl}} \\ &= \frac{\partial \hat{g}^{ie}}{\partial \varepsilon_{kl}} D_e^j + \hat{g}^{ie} \frac{\partial D_e^j}{\partial \varepsilon_{kl}} \\ &= -2 \hat{g}^{ik} \hat{g}^{el} D_e^j + \hat{g}^{ie} \left( \frac{1}{\Delta t} \delta_e^k \hat{g}^{lj} - 2 D_e^k \hat{g}^{jl} \right) \\ &= -2 \hat{g}^{ik} D^{lj} + \left( \frac{1}{\Delta t} \hat{g}^{ik} \hat{g}^{lj} - 2 D^{ik} \hat{g}^{jl} \right) \end{aligned}$$

et pour la partie sphérique (120) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial (\mathbf{I}_D \hat{g}^{ij})}{\partial \varepsilon_{kl}} &= \frac{\partial (D_e^e \hat{g}^{ij})}{\partial \varepsilon_{kl}} = \frac{\partial D_e^e}{\partial \varepsilon_{kl}} \hat{g}^{ij} + D_e^e \frac{\partial \hat{g}^{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}} \\ &= \frac{1}{\Delta t} \hat{g}^{kl} \hat{g}^{ij} - 2 D^{kl} \hat{g}^{ij} - 2 D_e^e \hat{g}^{ik} \hat{g}^{jl} \end{aligned}$$

Nous avons maintenant les différents ingrédients pour calculer l'opérateur tangent. Rappelons la forme de la contrainte totale pour une discrétisation temporelle à 1 pas et une intégration implicite :

$$\sigma^{ij} = 1/3 (K_c \Delta t \mathbf{I}_D + \mathbf{I}_{(t)\sigma}) \hat{g}^{ij} + \mu \left( \Delta t (D^{ij} - 1/3 D_e^e \hat{g}^{ij}) + S_{(t)}^{ij} \right) \quad (88)$$

Les variations de  $\hat{g}^{ij}$  sont données par les relations 74 que l'on rappelle ici :

$$\frac{\partial \hat{g}^{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}} = -2 \hat{g}^{ik} \hat{g}^{jl}$$

Les variations de  $D^{ij}$  et  $D_e^e$  ont déjà été calculées, reste la variation du terme  $S_{(t)}^{ij}$  qui dépend du type de transport effectué. Le chapitre 6.3 décrit le calcul de l'opérateur tangent en fonction du type de transport.

On obtient alors :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma^{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}} &= \frac{K_c}{3} (\hat{g}^{kl} \hat{g}^{ij} - 2 \Delta t (D^{kl} \hat{g}^{ij} + D_e^e \hat{g}^{ik} \hat{g}^{jl})) \\ &+ \mu \left( \hat{g}^{ik} \hat{g}^{lj} - 2 \Delta t (\hat{g}^{ik} D^{lj} + D^{ik} \hat{g}^{jl}) - \frac{1}{3} \hat{g}^{kl} \hat{g}^{ij} + \frac{2 \Delta t}{3} (D^{kl} \hat{g}^{ij} + D_e^e \hat{g}^{ik} \hat{g}^{jl}) \right) \\ &+ \mu \frac{\partial S(t)^{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}} \\ &+ 1/3 \left( \hat{g}^{ij} \frac{\partial \mathbf{I}_{(t)\sigma}}{\partial \varepsilon_{kl}} - 2 \mathbf{I}_{\sigma(t)} \hat{g}^{ik} \hat{g}^{jl} \right) \end{aligned} \quad (89)$$

En notation tensorielle cela donne pour l'opérateur tangent relatif aux variations des coordonnées deux fois contravariantes de la contrainte, par rapport aux coordonnées deux fois covariantes de la déformation, et en ne conservant pour l'opérateur que les termes qui respectent les symétries, les autres termes disparaissant lors de l'application de la méthode de Newton avec le PPV (cf.28) :

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial \sigma}{\partial \epsilon} \right)_{..|..} &= \frac{K_c}{3} \left( \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} - 2 \Delta t \left( \mathbf{I} \otimes \mathbf{D} + \mathbf{I}_D \mathbf{I} \overset{*}{\otimes} \mathbf{I} \right) \right) \\ &+ \mu \left( \mathbf{I} \overset{*}{\otimes} \mathbf{I} - 2 \Delta t \left( 2 \mathbf{I} \overset{*}{\otimes} \mathbf{D} \right) - \frac{1}{3} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} + \frac{2 \Delta t}{3} \left( \mathbf{I} \otimes \mathbf{D} + \mathbf{I}_D \mathbf{I} \overset{*}{\otimes} \mathbf{I} \right) \right) \\ &+ \mu \left( \frac{\partial \sigma(t)}{\partial \epsilon} \right)_{..|..} + \frac{1}{3} \left( \frac{\partial (\mathbf{I}_{\sigma(t)} \mathbf{I})}{\partial \varepsilon} \right)_{..} \end{aligned} \quad (90)$$

Dans cette dernière expression, contrairement à l'expression avec les composantes (89), on a regroupé la variation de la trace de  $\sigma(t)$  transportée, car ses différentes expressions suivant le type de transport, sont calculées plus précisément dans le paragraphe 6.3.

Pour optimiser les temps de calcul, les coefficients des tenseurs du quatrième ordre sont regroupés.

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial \sigma}{\partial \epsilon} \right)_{..|..} &= \frac{(K_c - \mu)}{3} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} + \left( \frac{-2 (K_c - \mu) \Delta t}{3} \right) \mathbf{I} \otimes \mathbf{D} \\ &+ \left( \frac{-2 (K_c - \mu) \Delta t \mathbf{I}_D}{3} + \mu \right) \mathbf{I} \overset{*}{\otimes} \mathbf{I} \\ &+ (-4 \mu \Delta t) \mathbf{I} \overset{*}{\otimes} \mathbf{D} \\ &+ \mu \left( \frac{\partial \sigma(t)}{\partial \epsilon} \right)_{..|..} + \frac{1}{3} \left( \frac{\partial (\mathbf{I}_{\sigma(t)} \mathbf{I})}{\partial \varepsilon} \right)_{..} \end{aligned} \quad (91)$$

On rappelle la notation cf. 729 :

$$\mathbf{T}'' = \mathbf{A} \overset{*}{\otimes} \mathbf{B} = 1/4.(A^{ik}.B^{jl} + A^{jk}.B^{il} + A^{il}.B^{jk} + A^{jl}.B^{ik})\hat{g}_i \otimes \hat{g}_j \otimes \hat{g}_k \otimes \hat{g}_l$$

Dans le cas où seule la partie sphérique de la loi est retenue, ou bien seule la partie déviatorique, on fait l'hypothèse de ne conserver respectivement que les termes facteurs de  $K_c$  ou que les termes facteurs de  $\mu$ . En fait, il s'agit d'une simplification, car le déviateur des contraintes, transporté, peut contenir un terme sphérique non nul suivant le type de transport. On fait l'hypothèse de ne pas en tenir compte dans le calcul de l'opérateur tangent, en supposant que son influence est négligeable.

**Remarque** Concernant le calcul des énergies, il est fait l'hypothèse dans le post-traitement que l'énergie activée pendant le pas de temps est de type "élastique". En fait, suivant l'évolution des paramètres  $K_c$  et  $\mu$ , la loi peut simuler un comportement qui n'est absolument pas réversible. Il faut alors par exemple se référer au bilan d'énergie sauvegardé sous forme "élastique" entre une charge et une décharge pour statuer plus précisément sur la nature des énergies échangées et donc du type de loi simulé. Cette analyse ne peut pas (a priori) être réalisée pendant le calcul, d'où le rangement de l'énergie activée par défaut dans la zone "énergie élastique".

## 5.2 Loi 2D contrainte plane hypoélastique isotrope

### 5.2.1 Relations générales

Cette loi est une spécialisation de la loi 3D via la condition supplémentaire de contrainte plane selon la direction 3 qui est supposée normale aux directions 1 et 2. Les paramètres de la loi sont les mêmes que ceux de la loi 3D.

Par analogie avec l'élasticité linéaire, on calcule un pseudo coefficient de Poisson :

$$\nu' = \frac{K_c - \mu}{2 K_c + \mu} \quad (92)$$

On en déduit l'incrément de déformation d'épaisseur :

$$\Delta\varepsilon_3^3 = \frac{-\nu'}{1 - \nu'} (\Delta\varepsilon_1^1 + \Delta\varepsilon_2^2) \quad (93)$$

et la trace de l'incrément du tenseur de déformation :

$$\mathbf{I}_{\Delta\varepsilon} = \frac{1. - 2. \nu'}{1. - \nu'} (\Delta\varepsilon_1^1 + \Delta\varepsilon_2^2) \quad (94)$$

La condition de contrainte plane entraîne la nullité des composantes de contrainte  $\sigma^{i3}$ ,  $i=1$  à 3. Les autres composantes sont calculées via (86) et (87).

## 5.3 Loi 1D hypoélastique isotrope

### 5.3.1 Relations générales

Il s'agit ici de la déclinaison 1D de la loi hypoélastique isotrope 3D. On rappelle les paramètres matériaux initiaux en 3D, à savoir :

- un module de compressibilité tangent  $K_c/3$
- un module de cisaillement tangent  $\mu$

Cependant, l'utilisation pratique d'une loi 1D est plus aisée si on peut utiliser directement le comportement uni-directionnel. On suppose donc connue une relation de comportement en composante, par exemple en mixte :

$$\dot{\sigma}_1^1 = f() D_1^1 \text{ ou encore } d\sigma_1^1 = f() d\varepsilon_1^1 \quad (95)$$

Où  $f()$  est une fonction de l'état du matériau et le temps un paramètre d'avancement de la sollicitation, indépendant du temps physique.

**Remarque :** Dans le cas où  $K_c$  et  $f$  sont constant on a les relations suivantes :

$$\begin{aligned} K_c &= \frac{E}{(1-2\nu)} \text{ et } \mu = 2G = \frac{f()}{(1+\nu)} \\ \text{d'où} \\ E &= f() \text{ , } \nu = 1/2(1 - f/K_c) \text{ et } G = \frac{K_c f}{(3K_c - f)} \end{aligned} \quad (96)$$

On considère que l'état de sollicitation 1D s'effectue suivant l'axe 1, et la similitude au cas 3D s'effectue avec deux axes de direction 2, et 3, tels que les 3 axes sont orthogonaux.

Le module de compressibilité tangent  $K_c/3$  permet de calculer la vitesse de déformation dans les sens travers 2 et 3.

$$\frac{I_{\dot{\sigma}}}{3} = \frac{\dot{\sigma}_1^1}{3} = \frac{K_c}{3} I_{\mathbf{D}} = \frac{K_c}{3} D_i^i \quad (97)$$

Le comportement est isotrope ce qui conduit à  $D_2^2 = D_3^3$  qui peuvent être alors déterminées.

$$D_2^2 = D_3^3 = \frac{1}{2} \left( \frac{\dot{\sigma}_1^1}{K_c} - D_1^1 \right) \quad (98)$$

### 5.3.2 Intégration de la loi

À partir de la relation (95) sur un pas de temps on obtient sa déclinaison incrémentale sur un pas de temps :

$$\Delta_t^{t+\Delta t} \sigma_1^1 = f() \Delta_t^{t+\Delta t} \varepsilon_1^1 \quad (99)$$

Cet accroissement est cumulé avec la contrainte en début d'incrément :

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_1^1 &= \sigma_1^1(t + \Delta t) \\ &= \sigma_1^1(t) + \Delta_t^{t+\Delta t} \sigma_1^1 \\ &= \sigma_1^1(t) + f() \Delta_t^{t+\Delta t} \varepsilon_1^1 \end{aligned} \quad (100)$$

Le choix du type de dérivée matérielle intervient au niveau du calcul du terme  $\sigma_1^1(t)$  qui représente la grandeur que l'on doit transporter, "constant", de  $t$  à  $t + \Delta t$ .

Dans le cas d'une dérivée deux fois covariante, ce sont les coordonnées 2 fois covariante qui sont gardées constantes d'où à l'instant final (cf. 107) :

$${}_{..t}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\sigma}_{(t)} = \sigma_{ij}(t) \hat{g}^i \otimes \hat{g}^j$$

Pour la dérivée deux fois contravariantes (cf. 108) :

$${}_{..t}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\sigma}_{(t)} = \sigma^{ij}(t) \hat{g}_i \otimes \hat{g}_j$$

Pour la dérivée de Jauman, on utilise le transport correspondant à la demi-somme des deux résultats précédents.

Dans le cas de la loi hypoélastique 1D, seuls les vecteurs  $\hat{g}_1$  et  $\hat{g}^1$  sont utilisés pour le calcul du transport de la contrainte suivant la direction 1, de  $t$  à  $t + \Delta t$ , toutes les autres composantes de la contrainte sont nulles et les directions 2 et 3 du repère de travail sont normales à la direction 1.

On suppose connue la déformation à l'instant  $t$  dans le repère à  $t$  suivant la direction  $i$  ( $=2, 3$ )  $\varepsilon_{ii}$ . Les vecteurs  $\hat{g}_i$  ( $i=2,3$ ) dans les directions transversales sont dans notre cas supposés rester normés et perpendiculaires à la direction 1. Ainsi, on ne dispose pas par défaut de leur évolution complète (i.e. la variation de longueur), seules leurs nouvelles directions sont connues. On considère donc par simplicité, un transport selon ces axes quelques soit le type de dérivée matérielle utilisée pour le comportement 1D.

$${}_{..t}^{t+\Delta t}\varepsilon_i^i(t) = \varepsilon_i^i(t) \quad \text{et} \quad \varepsilon_i^i(t + \Delta t) = \varepsilon_i^i(t) + \frac{1}{2} \left( \frac{\Delta_t^{t+\Delta t}\sigma_1^1}{K_c} - \Delta_t^{t+\Delta t}\varepsilon_1^1 \right) \quad (101)$$

Compte tenu de la forme particulière des vecteurs  $\hat{g}_i$  ( $i=2,3$ ) et qui sont entraînés par le vecteur  $\hat{g}_1$ , on obtient bien un transport objectif des déformations transversales, au sens "indépendant des transformations isométriques". À noter que la variance n'a pas d'importance car les directions transversales sont considérées normées et forment un repère orthogonale avec la direction 1. Par contre seul le premier vecteur est totalement entraîné par la matière, les autres étant seulement entraînés en direction.

## 5.4 Traitement des énergies

Au niveau énergétique il est possible de calculer la variation globale de l'énergie, par contre il n'est pas possible d'établir le type d'énergie : réversible (élastique) ou non (plastique).

Dans Herezh pour chaque loi de comportement, on demande une séparation explicite entre les contributions élastique et plastique ce qui n'est pas possible ici, aussi de manière arbitraire, **l'énergie mise en oeuvre est stockée sous forme d'une énergie élastique**, ce qui peut-être correct ou totalement erroné suivant l'évolution des paramètres de la loi de comportement ( $Kc$   $\mu$  et  $f$ ). Il faut donc en tenir compte dans l'analyse et l'exploitation des résultats.

## 5.5 Déformation associée au type de dérivée matérielle

L'intégration d'une loi hypoélastique permet d'obtenir la contrainte en fonction de l'histoire du chargement. Dans le cas où les paramètres matériels sont fixes, on obtient alors une contrainte qui dépend uniquement de l'intégrale du tenseur vitesse de déformation ou sous forme incrémentale du tenseur d'incrément de déformation.

Cette intégrale constitue une mesure de déformation cumulée qui dépend du type de dérivée matérielle utilisée.

- Dans le cas d'une dérivée deux fois covariante, on obtiendra la mesure d'Almansi ( $e_{-2}$  cf. [Mora, 2004]),
- Dans le cas d'une dérivée de Jauman, on obtiendra une déformation cumulée logarithmique, qui correspond à une approximation de la déformation logarithmique (mesure de Hencky  $e_0$  cf. [Mora, 2004]), d'autant plus proche que les pas de temps sont petits.
- Dans le cas d'une dérivée deux fois contravariante, on obtiendra la mesure  $e_2$  cf. [Mora, 2004] qui est moins souvent utilisée explicitement.

Lors de l'utilisation d'une loi hypoélastique, le calcul de cette mesure de déformation est systématiquement effectué, et l'accès à sa valeur est possible.

Dans le cas où les coefficients matériels varient, la relation contrainte-mesure de déformation cumulée est évidemment moins simple. Cependant l'examen de la déformation cumulée peut se révéler utile pour analyser les résultats de la loi.

## 6 Loi viscoélastique de Maxwell

### 6.1 Loi 3D et intégration

D'une manière phénoménologique, la loi isotrope viscoélastique de type Maxwell est la composition en série d'un ressort et d'un amortisseur. Une première extension au comportement classique est la possibilité d'intégrer un comportement élastique pure pour la partie sphérique, ou un comportement visqueux différent de celui pour la partie déviatorique. La partie sphérique élastique peut ainsi être soit identique à une loi de Hooke c'est-à-dire sans viscosité ou soit avec une évolution visqueuse. La partie déviatorique est systématiquement visqueuse. Ainsi la loi s'écrit pour la partie sphérique dans le cas sans viscosité :

$$\mathbf{I}_\sigma = \frac{E}{(1 - 2\nu)} \mathbf{I}_\varepsilon \quad (102)$$

$\mathbf{I}_\sigma$  et  $\mathbf{I}_\varepsilon$  étant les traces des tenseurs contraintes et déformations. Et dans le cas avec viscosité :

$$\mathbf{I}_D = \frac{1}{3K} \dot{\mathbf{I}}_\sigma + \frac{\mathbf{I}_\sigma}{\mu_p} \quad (103)$$

Avec  $3K = E/(1 - 2\nu)$

Pour la partie déviatoire on a :

$$\bar{\mathbf{D}} = \frac{1}{2G} \dot{\mathbf{S}} + \frac{\mathbf{S}}{\mu} \quad (104)$$

avec  $\bar{\mathbf{D}}$  le déviateur du tenseur vitesse de déformation et  $\dot{\mathbf{S}}$  une dérivée matérielle du déviateur des contraintes. Les paramètres de la loi sont ainsi le module d'Young  $E$ , le coefficient de Poisson  $\nu$ , la viscosité  $\mu$ , qui peuvent être, dépendants ou non de la température, et éventuellement (mais ce n'est pas obligatoire) une viscosité sur la partie sphérique  $\mu_p$ .

Trois types de dérivée matérielle sont implantées dans Herezh++ : Jauman (c'est-à-dire 1/2 de la somme des dérivées de Lie en mixte dans les deux sens), de Lie deux fois covariantes (valeur par défaut), et de Lie deux fois contravariantes. Un paramètre de réglage optionnel permet de choisir entre ces 3 cas.

Une deuxième extension à la loi classique est la possibilité de choisir une viscosité non linéaire pour la partie scission. Ceci s'effectue par la définition d'une fonction multiplicative  $f(\mathbf{I}\bar{\mathbf{D}})$  définie à la suite du mot clé "fac\_mu\_cissionD=". La viscosité indiquée est alors multipliée par  $f(\mathbf{I}\bar{\mathbf{I}}_{t\bar{f}orD})$  calculée en fonction du taux de cisaillement en cours.

D'une manière pratique, la loi de comportement est intégrée par linéarisation de l'équation constitutive. Considérons un pas de temps  $\Delta t$  et l'accroissement de contrainte correspondant  $\Delta\boldsymbol{\sigma}$ . Cherchons tout d'abord à intégrer la partie sphérique de la loi (cas d'une viscosité pour la partie sphérique). A partir de (103) nous avons :

$$\frac{\Delta\mathbf{I}\boldsymbol{\sigma}}{\Delta t} = 3 K \left( \mathbf{I}_D - \frac{\mathbf{I}\boldsymbol{\sigma}}{\mu_p} \right) = 3 K \left( \mathbf{I}_D - \frac{\mathbf{I}_{(t)\boldsymbol{\sigma}}}{\mu_p} - \frac{\Delta\mathbf{I}\boldsymbol{\sigma}}{\mu_p} \right) \quad (105)$$

d'où

$$\Delta\mathbf{I}\boldsymbol{\sigma} = \frac{3 K \Delta t \mu_p}{(\mu_p + 3 K \Delta t)} \left( \mathbf{I}_D - \frac{\mathbf{I}_{(t)\boldsymbol{\sigma}}}{\mu_p} \right) \quad (106)$$

Le choix du type de dérivée matérielle intervient au niveau du calcul du terme  $\boldsymbol{\sigma}_t$  qui représente la grandeur que l'on doit transporter de  $t$  à  $t+\Delta t$ .

Dans le cas d'une dérivée deux fois covariantes nous avons à l'instant final :

$${}_{..t}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\sigma}_{(t)} = \sigma_{ij}(t) \hat{g}^i \otimes \hat{g}^j \quad (107)$$

Pour la dérivée deux fois contravariantes :

$${}_{..t}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\sigma}_{(t)} = \sigma^{ij}(t) \hat{g}_i \otimes \hat{g}_j \quad (108)$$

Pour la dérivée de Jauman, on utilise le transport correspondant à la demi-somme des deux résultats précédents.

Dans le cas de la partie déviatorique, le même raisonnement conduit à une relation similaire :

$$\Delta\mathbf{S} = \frac{2 G \Delta t \mu}{(\mu + 2 G \Delta t)} \left( \bar{\mathbf{D}} - \frac{\mathbf{S}_{(t)}}{\mu} \right) \quad (109)$$

Au final on obtient alors :

$$\mathbf{I}_{(t+\Delta t)}\boldsymbol{\sigma} = \frac{3 K \Delta t \mu_p}{(\mu_p + 3 K \Delta t)} \left( \mathbf{I}_D + \frac{1}{3 K \Delta t} \mathbf{I}_{(t)\boldsymbol{\sigma}} \right) \quad (110)$$

et

$$\mathbf{S}_{(t+\Delta t)} = \frac{2 G \Delta t \mu}{(\mu + 2 G \Delta t)} \left( \bar{\mathbf{D}} + \frac{1}{(2 G \Delta t)} \mathbf{S}_{(t)} \right) \quad (111)$$

## 6.2 Opérateur tangent

Deux types d'opérateurs tangents sont nécessaires : la variation des contraintes par rapport aux ddl, et la variation des contraintes par rapport aux composantes de la déformation (pour le fonctionnement Umat par exemple ou encore de contraintes planes...).

Le calcul de la contrainte faisant intervenir la vitesse de déformation, il nous faut connaître sa variation. Pour cela, cette dernière est linéarisée selon :

$$D_{ij} \approx \frac{\Delta \varepsilon_{ij}}{\Delta t} \quad (112)$$

d'où

$$\frac{\partial D_{ij}}{\partial ddl} = \frac{1}{\Delta t} \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial ddl} \quad (113)$$

D'une manière plus exhaustive, à partir des relations (110) (111), les termes susceptibles de varier, en dehors de la vitesse de déformation, sont : le coefficient de viscosité non linéaire  $\mu(\mathbf{II}_D)$  et la contrainte  $\boldsymbol{\sigma}_{(t)}$  transportée de  $t$  à  $t+\Delta t$ .

Pour le premier terme à partir de la définition  $\mathbf{II}_{\bar{D}} = \mathbf{D} : \mathbf{D}$  on a :

$$\frac{\partial \mu}{\partial ddl} = \mu' \left( \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial ddl} : \mathbf{D} + \mathbf{D} : \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial ddl} \right) \quad (114)$$

avec  $\mu'$  la dérivée de la fonction  $\mu \rightarrow \mu'(x) = d\mu/dx$

Pour le second terme, le résultat dépend du type de transport. Dans tous les cas, la dérivée des composantes transportées, exprimées dans la base de transport, est nulle. Ensuite, lorsque l'on change de base il faut tenir compte de la variation des composantes de la métrique.

Par exemple, supposons que l'on considère un transport deux fois covariants, et que l'on cherche à connaître la variation des composantes mixtes on a :

$$\frac{\partial \sigma_i^j}{\partial ddl} = \sigma_{ik} \frac{\partial \hat{g}^{kj}}{\partial ddl} \quad (115)$$

### 6.2.1 Opérateur tangent $\frac{\partial \sigma^{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}}$

Dans le cas où d'un calcul Umat classique, les calculs s'effectuent dans une base de travail orthonormée. Actuellement, les cinématiques sont considérées irrotationnelles, ainsi les dérivées temporelles sont directement effectuées dans le repère de travail. L'idée est que le programme qui utilise l'Umat a déjà effectué les transformations de repère.

Dans le cas général (en dehors du cas de l'Umat classique) on doit prendre en compte la variation des bases. Comme pour le cas de l'élasticité linéaire, on suppose que la mesure de déformation est celle d'Almansi (qui est la mesure native d'Herezh).

Le paragraphe 3.1 fournit une partie de la réponse c'est-à-dire les informations liées à la déformation. Concernant la vitesse de déformation en utilisant la relation 112 :

$$\frac{\partial D_{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}} = \frac{1}{\Delta t} \delta_i^k \delta_j^l \quad (116)$$



D'où pour la trace en tenant compte de l'expression 74 :

$$\begin{aligned}\frac{\partial D_i^i}{\partial \varepsilon_{kl}} &= \frac{\partial D_{ij} \hat{g}^{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}} = \frac{1}{\Delta t} \delta_i^k \delta_j^l \hat{g}^{ij} + D_{ij} \frac{\partial \hat{g}^{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}} = \frac{1}{\Delta t} \hat{g}^{kl} - 2 D_{ij} \hat{g}^{ik} \hat{g}^{jl} \\ &= \frac{1}{\Delta t} \hat{g}^{kl} - 2 D^{kl}\end{aligned}\quad (117)$$

Pour le tenseur vitesse de déformation on aura de manière similaire :

$$\begin{aligned}\frac{\partial D_i^j}{\partial \varepsilon_{kl}} &= \frac{\partial D_{ie} \hat{g}^{ej}}{\partial \varepsilon_{kl}} = \frac{1}{\Delta t} \delta_i^k \delta_e^l \hat{g}^{ej} + D_{ie} \frac{\partial \hat{g}^{ej}}{\partial \varepsilon_{kl}} = \frac{1}{\Delta t} \delta_i^k \hat{g}^{lj} - 2 D_{ie} \hat{g}^{ek} \hat{g}^{jl} \\ &= \frac{1}{\Delta t} \delta_i^k \hat{g}^{lj} - 2 D_i^k \hat{g}^{jl}\end{aligned}\quad (118)$$

En deux fois contravariants :

$$\begin{aligned}\frac{\partial D^{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}} &= \frac{\partial (\hat{g}^{ie} D_e^j)}{\partial \varepsilon_{kl}} \\ &= \frac{\partial \hat{g}^{ie}}{\partial \varepsilon_{kl}} D_e^j + \hat{g}^{ie} \frac{\partial D_e^j}{\partial \varepsilon_{kl}} \\ &= -2 \hat{g}^{ik} \hat{g}^{el} D_e^j + \hat{g}^{ie} \left( \frac{1}{\Delta t} \delta_e^k \hat{g}^{lj} - 2 D_e^k \hat{g}^{jl} \right) \\ &= -2 \hat{g}^{ik} D^{lj} + \left( \frac{1}{\Delta t} \hat{g}^{ik} \hat{g}^{lj} - 2 D^{ik} \hat{g}^{jl} \right)\end{aligned}\quad (119)$$

et pour la partie sphérique :

$$\begin{aligned}\frac{\partial 1/3 D_e^e \hat{g}^{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}} &= 1/3 \frac{\partial D_e^e}{\partial \varepsilon_{kl}} \hat{g}^{ij} + 1/3 D_e^e \frac{\partial \hat{g}^{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}} \\ &= \frac{1}{3 \Delta t} \hat{g}^{kl} \hat{g}^{ij} - 2/3 D^{kl} \hat{g}^{ij} - 2/3 D_e^e \hat{g}^{ik} \hat{g}^{jl}\end{aligned}\quad (120)$$

Nous avons maintenant les différents ingrédients pour calculer l'opérateur tangent.

### Cas où la partie sphérique est non visqueuse

$$\sigma^{ij} = K \mathbf{I}_\varepsilon \hat{g}^{ij} + \beta \left( D^{ij} - 1/3 D_e^e \hat{g}^{ij} - \frac{S^{ij}(t)}{\mu} \right)\quad (121)$$

avec  $\frac{2 G \Delta t \mu}{(\mu+2 G \Delta t)} = \beta$

Les variations de  $\mathbf{I}_\varepsilon$  et  $\hat{g}^{ij}$  sont données par les relations 74 que l'on rappelle ici :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{I}_\varepsilon}{\partial \varepsilon_{kl}} &= \hat{g}^{kl} - 2 \varepsilon^{kl} \\ \frac{\partial \hat{g}^{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}} &= -2 \hat{g}^{ik} \hat{g}^{jl}\end{aligned}$$

Les variations de  $D^{ij}$  et  $D_e^e$  ont déjà été calculées, reste la variation du terme  $S_{(t)}^{ij}$  qui dépend du type de transport effectué. Le chapitre 6.3 décrit le calcul de l'opérateur tangent en fonction du type de transport.

On obtient alors :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma^{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}} &= \left(K - \frac{\beta}{3\Delta t}\right) \hat{g}^{ij} \hat{g}^{kl} - 2K \hat{g}^{ij} \varepsilon^{kl} + \left(K \mathbf{I}_\varepsilon + \frac{\beta}{\Delta t} - \frac{\beta}{3} \mathbf{I}_D\right) \hat{g}^{ik} \hat{g}^{jl} \\ &\quad + \frac{2\beta}{3} \hat{g}^{ij} D^{kl} - 2\beta (\hat{g}^{il} D^{jk} + D^{ik} \hat{g}^{jl}) - \frac{\beta}{\mu} \frac{\partial \sigma(t)^{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}} \end{aligned} \quad (122)$$

En notation tensorielle cela donne pour l'opérateur tangent relatif aux variations des coordonnées deux fois contravariantes de la contrainte, par rapport aux coordonnées deux fois covariantes de la déformation, et en ne conservant pour l'opérateur que les termes qui respectent les symétries, les autres termes disparaissant lors de l'application de la méthode de Newton avec le PPV :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \sigma}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}\right)_{\dots} &= \left(K - \frac{\beta}{3\Delta t}\right) \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} - 2K \mathbf{I} \otimes \boldsymbol{\varepsilon} + \left(K \mathbf{I}_\varepsilon + \frac{\beta}{\Delta t} - \frac{\beta}{3} \mathbf{I}_D\right) \mathbf{I} \overset{*}{\otimes} \mathbf{I} \\ &\quad + \frac{2\beta}{3} \mathbf{I} \otimes \mathbf{D} - 4\beta \mathbf{I} \overset{*}{\otimes} \mathbf{D} - \frac{\beta}{\mu} \left(\frac{\partial \sigma(t)}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}\right)_{\dots} \end{aligned} \quad (123)$$

On rappelle la notation cf. 729 :

$$\mathbf{T}'' = \mathbf{A} \overset{*}{\otimes} \mathbf{B} = 1/4.(A^{ik}.B^{jl} + A^{jk}.B^{il} + A^{il}.B^{jk} + A^{jl}.B^{ik})\hat{g}_i \otimes \hat{g}_j \otimes \hat{g}_k \otimes \hat{g}_l$$

**Cas où la partie sphérique est visqueuse**

$$\begin{aligned} \sigma^{ij} &= \frac{I_{(t+\Delta t)} \sigma}{3} \hat{g}^{ij} + \beta \left( D^{ij} - 1/3 D_e^e \hat{g}^{ij} - \frac{S_{(t)}^{ij}}{\mu} \right) \\ &= \frac{\alpha}{3} \left( D_e^e + \frac{1}{3K} \frac{\Delta t}{\Delta t} \mathbf{I}_{(t)\sigma} \right) \hat{g}^{ij} + \beta \left( D^{ij} - 1/3 D_e^e \hat{g}^{ij} - \frac{S_{(t)}^{ij}}{\mu} \right) \end{aligned} \quad (124)$$

avec  $\frac{3K}{\mu_p+3} \frac{\Delta t}{K} \frac{\mu_p}{\Delta t} = \alpha$  et  $\frac{2G}{\mu+2} \frac{\Delta t}{G} \frac{\mu}{\Delta t} = \beta$

Tous les termes constitutifs de  $\sigma^{ij}$  ont une variation connue ce qui permet de calculer l'opérateur tangent final.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma^{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}} &= \frac{(\alpha - \beta)}{3\Delta t} \hat{g}^{ij} \hat{g}^{kl} - \frac{2(\alpha + \beta)}{3} \hat{g}^{ij} D^{kl} \\ &\quad + \left( \frac{\alpha \mathbf{I}_D}{3} + \frac{\beta}{\Delta t} - \frac{\beta}{3} \mathbf{I}_D \right) \hat{g}^{ik} \hat{g}^{jl} \\ &\quad - 2\beta (\hat{g}^{il} D^{jk} + D^{ik} \hat{g}^{jl}) - \frac{\beta}{\mu} \frac{\partial \sigma(t)^{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}} \\ &\quad + \frac{\alpha}{9K\Delta t} \left( \hat{g}^{ij} \frac{\partial \mathbf{I}_{\sigma(t)}}{\partial \varepsilon_{kl}} - 2 \mathbf{I}_{\sigma(t)} \hat{g}^{ik} \hat{g}^{jl} \right) \end{aligned} \quad (125)$$

En notation tensorielle cela donne pour l'opérateur tangent relatif aux variations des coordonnées deux fois contravariantes de la contrainte, par rapport aux coordonnées deux fois covariantes de la déformation, et en ne conservant pour l'opérateur que les termes qui respectent les symétries :

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\epsilon}} \right)_{..|..} &= \frac{(\alpha - \beta)}{3\Delta t} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} - \frac{2(\alpha + \beta)}{3} \mathbf{I} \otimes \mathbf{D} \\ &+ \left( \frac{\alpha \mathbf{I}_D}{3} + \frac{\beta}{\Delta t} - \frac{\beta}{3} \mathbf{I}_D \right) \mathbf{I} \overset{*}{\otimes} \mathbf{I} - 4\beta \mathbf{I} \overset{*}{\otimes} \mathbf{D} \\ &- \frac{\beta}{\mu} \left( \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}(t)}{\partial \boldsymbol{\epsilon}} \right)_{..|..} + \frac{\alpha}{9K\Delta t} \left( \frac{\partial (\mathbf{I}_{\sigma(t)} \mathbf{I})}{\partial \boldsymbol{\epsilon}} \right)_{..} \end{aligned} \quad (126)$$

Dans cette dernière expression, contrairement à l'expression avec les composantes (125), on a regroupé la variation de la trace de  $\boldsymbol{\sigma}(t)$  transportée, car ses différentes expressions suivant le type de transport, sont calculées plus précisément dans le paragraphe suivant : 6.3.

### 6.3 Opérateur tangent pour les tenseurs transportés $\frac{\partial A^{ij}}{\partial \epsilon_{kl}}$

Lors de l'utilisation de lois incrémentales s'appuyant sur de calcul de dérivée objective, il est nécessaire de transporter d'un incrément à l'autre, les grandeurs supposées constantes relativement au type de dérivée retenue. Dans cette partie on considère 3 types de transport : transport deux fois covariant cohérent avec la dérivée de Rivlin ou dérivée de Lie deux fois covariantes , transport deux fois contravariants cohérent avec la dérivée d'Oldroyd ou dérivée de Lie deux fois contravariantes , transport mixte cohérent avec la dérivée de Jauman (ou co-rotationnelle) ou mixte de Lie. Pour ces trois transports, nous allons déterminer l'opérateur tangent correspondant à un tenseur  $\mathbf{A}$  donné. On suppose que la mesure de déformation est celle d'Almansi.

#### 6.3.1 Transport deux fois covariant

D'une manière pratique on suppose un tenseur  $\mathbf{A}$  dont on connaît les coordonnées  $A^{ij}$  à l'instant  $t$  et qui est transporté à  $t + \Delta t$  de manière deux fois covariante. On a donc  ${}^{t+\Delta t}_{..t} A_{ij} = A_{ij}(t)$  d'où  ${}^{t+\Delta t}_{..t} A^{ij} = \hat{g}^{ie} A_{ef}(t) \hat{g}^{fj}$ , ce qui permet de calculer l'opérateur tangent :

$$\frac{\partial {}^{t+\Delta t}_{..t} A^{ij}}{\partial \epsilon_{kl}} = \frac{\partial \hat{g}^{ie}}{\partial \epsilon_{kl}} A_{ef}(t) \hat{g}^{fj} + \hat{g}^{ie} A_{ef}(t) \frac{\partial \hat{g}^{fj}}{\partial \epsilon_{kl}} = \hat{g}^{ik} \hat{g}^{el} A_{ef}(t) \hat{g}^{fj} + \hat{g}^{ie} A_{ef}(t) \hat{g}^{fk} \hat{g}^{jl} \quad (127)$$

En notation tensorielle et en ne conservant pour l'opérateur que les termes qui respectent les symétries :

$$\left( \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \boldsymbol{\epsilon}} \right)_{..|..} = 2 \mathbf{I} \overset{*}{\otimes} ..(\mathbf{A}) \quad (128)$$

Concernant la trace on a :

$${}^{t+\Delta t}_{..t} A_i^i = A_{if}(t) \hat{g}^{fi} \quad (129)$$

d'où

$$\frac{\partial {}^{t+\Delta t} A_e^e}{\partial \varepsilon_{kl}} = A_{ef}(t) \frac{\partial \hat{g}^{fe}}{\partial \varepsilon_{kl}} = A_{ef}(t) \hat{g}^{fk} \hat{g}^{el} \quad (130)$$

et

$$\frac{1}{3} \left( \frac{\partial {}^{t+\Delta t} A_e^e \hat{g}^{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}} \right) = \frac{1}{3} (A_{ef}(t) \hat{g}^{fk} \hat{g}^{el} \hat{g}^{ij} + {}^{t+\Delta t} A_e^e \hat{g}^{ik} \hat{g}^{jl}) \quad (131)$$

En notation tensorielle et en ne conservant pour l'opérateur que les termes qui respectent les symétries :

$$\frac{1}{3} \left( \frac{\partial \mathbf{I} {}^{t+\Delta t} \mathbf{A} \mathbf{I}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \right)_{\cdot|\cdot} = \frac{1}{3} \left( \mathbf{I} \otimes \cdot \mathbf{A} + \mathbf{I} {}^{t+\Delta t} \mathbf{A} \mathbf{I} \otimes^* \mathbf{I} \right) \quad (132)$$

### 6.3.2 Transport deux fois contravariants

On suppose un tenseur  $\mathbf{A}$  dont on connaît les coordonnées  $A^{ij}$  à l'instant  $t$  et qui est transporté à  $t + \Delta t$  de manière deux fois contravariants. On a donc  $\cdot A^{ij}(t + \Delta t) = A^{ij}(t)$  d'où un opérateur tangent nul :

$$\frac{\partial \cdot A^{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}} = 0. \quad (133)$$

Concernant la trace on a :

$$\cdot {}^{t+\Delta t} A_i^i = A^{if}(t) \hat{g}_{fi} \quad (134)$$

d'où en tenant compte qu'avec la déformation d'Almansi :  $\hat{g}_{ij} = 2\varepsilon_{ij} + g_{ij}$

$$\frac{\partial \cdot {}^{t+\Delta t} A_e^e}{\partial \varepsilon_{kl}} = A^{ef}(t) \frac{\partial \hat{g}_{fe}}{\partial \varepsilon_{kl}} = 2 A^{ef}(t) \delta_f^k \delta_e^l = 2 A^{kl}(t) \quad (135)$$

et

$$\frac{1}{3} \left( \frac{\partial \cdot {}^{t+\Delta t} A_e^e \hat{g}^{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}} \right) = \frac{1}{3} (A^{kl}(t) \hat{g}^{ij} + \cdot {}^{t+\Delta t} A_e^e \hat{g}^{ik} \hat{g}^{jl}) \quad (136)$$

En notation tensorielle et en ne conservant pour l'opérateur que les termes qui respectent les symétries :

$$\frac{1}{3} \left( \frac{\partial \mathbf{I} \cdot {}^{t+\Delta t} \mathbf{A} \mathbf{I}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \right)_{\cdot|\cdot} = \frac{1}{3} \left( \mathbf{I} \otimes \cdot \mathbf{A} + \mathbf{I} \cdot {}^{t+\Delta t} \mathbf{A} \mathbf{I} \otimes^* \mathbf{I} \right) \quad (137)$$

### 6.3.3 Transport mixte

On suppose un tenseur  $\mathbf{A}$  dont on connaît les coordonnées  $A^{ij}$  à l'instant  $t$  et qui est transporté à  $t + \Delta t$  de manière mixte. On a donc  ${}_J A^{ij}(t + \Delta t) = 1/2(\cdot A^{ij}(t + \Delta t) + \cdot A^{ij}(t))$  d'où l'opérateur tangent :

$$\frac{\partial {}_J A^{ij}(t + \Delta t)}{\partial \varepsilon_{kl}} = 1/2(\hat{g}^{ik} \hat{g}^{el} A_{ef}(t) \hat{g}^{fj} + \hat{g}^{ie} A_{ef}(t) \hat{g}^{fk} \hat{g}^{jl}) \quad (138)$$

En notation tensorielle et en ne conservant pour l'opérateur que les termes qui respectent les symétries :

$$\left( \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \right)_{\cdot|\cdot} = \mathbf{I} \otimes^* \cdot (\mathbf{A}) \quad (139)$$

Concernant la trace on a :

$${}_{Jt}^{t+\Delta t} A_i^i = 1/2(A_{if}(t)\hat{g}^{fi} + A^{if}(t)\hat{g}_{fi}) \quad (140)$$

d'où en utilisant les résultats du transport deux fois covariant et deux fois contravariant, on a en notation tensorielle et en ne conservant pour l'opérateur que les termes qui respectent les symétries :

$$\frac{1}{3} \left( \frac{\partial \mathbf{I}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \right)_{\dots} = \frac{1}{6} \left( \mathbf{I} \otimes \dots \mathbf{A} + \mathbf{I} \otimes \dots \mathbf{I} \otimes \dots \mathbf{I} + \mathbf{I} \otimes \dots \mathbf{A} + \mathbf{I} \otimes \dots \mathbf{I} \otimes \dots \mathbf{I} \right) \quad (141)$$

### 6.3.4 Paramètres matériaux évolutifs

Il peut-être intéressant de faire varier les paramètres matériaux en fonction de l'évolution du calcul. Dans une première étape deux dépendances sont possibles, via une fonction d'évolution pouvant dépendre :

1. de l'intensité du déviateur de vitesse via la grandeur :  $Q_{\bar{D}} = \sqrt{\bar{D} : \bar{D}}$
2. de l'intensité du déviateur de déformation via la grandeur :  $\varepsilon_{mises} = \sqrt{(2./3. (\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} : \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}))}$

Se pose alors la difficulté de calculer l'opérateur tangent  $\frac{\partial \sigma^{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}}$  dans le cas où les paramètres matériaux évolues.

Supposons que

## 6.4 Cas des contraintes planes

Il est possible de définir dans certains cas, une expression explicite du calcul de la contrainte et de l'opérateur tangent, pour des conditions de contraintes plane.

### 6.4.1 Cas avec viscosité sphérique

Dans une première étape, on considère une viscosité sur la partie déviatorique et sur la partie sphérique : équations 110 et 111. En ajoutant la partie sphérique et la partie déviatorique de la contrainte, on obtient le tenseur complet. La condition de contrainte plane s'exprime traditionnellement sur la direction 3, qui pour nous sera orthonormée d'où la variance n'a pas d'importance pour la direction 3.

$$0 = \alpha/3. \left( \mathbf{I}_D + \frac{1}{3 K \Delta t} \mathbf{I}_{(t)\sigma} \right) + \beta \left( \bar{D}_3^3 + \frac{1}{(2 G \Delta t)} S_{3(t)}^3 \right) \quad (142)$$

avec  $\frac{3 K \Delta t \mu_p}{(\mu_p+3 K \Delta t)} = \alpha$  et  $\frac{2 G \Delta t \mu}{(\mu+2 G \Delta t)} = \beta$

Sachant que :

$$\mathbf{I}_D = D_\gamma^\gamma + D_3^3 \quad \text{et} \quad \bar{D}_3^3 = 2/3 D_3^3 - 1/3 (D_\gamma^\gamma) \quad (143)$$

l'expression 142 permet de calculer  $D_3^3$

$$-\frac{\alpha + 2\beta}{3} D_3^3 = \alpha/3 \cdot \left( D_\gamma^\gamma + \frac{1}{3 K \Delta t} \mathbf{I}_{(t)\sigma} \right) + \beta \left( -1/3(D_\gamma^\gamma) + \frac{1}{(2 G \Delta t)} S_{3(t)}^3 \right)$$

ou encore

$$D_3^3 = \frac{1}{\alpha + 2\beta} \left( (\beta - \alpha) D_\gamma^\gamma - \frac{3\beta}{(2 G \Delta t)} S_{3(t)}^3 - \frac{\alpha}{3 K \Delta t} \mathbf{I}_{(t)\sigma} \right) \quad (144)$$

À partir de cette grandeur on peut déterminer successivement  $\mathbf{I}_D$  puis  $\mathbf{D}$  et enfin le tenseur des contraintes à l'aide des relations générales 3D.

La déformation suivant la direction 3 peut s'approcher à l'aide d'une hypothèse de linéarisation :

$$D_{33} \approx \frac{\Delta \epsilon_{33}}{\Delta t} \quad (145)$$

L'opérateur tangent se calcule en tenant compte de :

$$\frac{\partial D_3^3}{\partial ddl} = \frac{1}{\alpha + 2\beta} \left( (\beta - \alpha) \frac{\partial D_\gamma^\gamma}{\partial ddl} - \frac{3\beta}{(2 G \Delta t)} \frac{\partial S_{3(t)}^3}{\partial ddl} - \frac{\alpha}{3 K \Delta t} \frac{\partial \mathbf{I}_{(t)\sigma}}{\partial ddl} \right) \quad (146)$$

Sachant que les termes  $\frac{\partial S_{3(t)}^3}{\partial ddl}$  et  $\frac{\partial \mathbf{I}_{(t)\sigma}}{\partial ddl}$  ne sont dus qu'au mécanisme de transport.

Dans le cas où les paramètres de viscosité sont eux-mêmes dépendant de la déformation sous forme d'une relation par exemple non linéaire il est difficile de tenir compte dans cette relation de la sensibilité à  $D_3^3$ . D'où par simplification on ne tient compte que de la dépendance aux termes  $D_\gamma^\gamma$  ce qui conduira sans doute à une vitesse de convergence dans le cas d'un algorithme de Newton, plus lent que dans un cas 3D.

#### 6.4.2 Cas sans viscosité sphérique

Par rapport à l'étude précédente, la relation 110 est remplacée par 102 que l'on approche par linéarisation :

$$\frac{E}{(1 - 2\nu)} \mathbf{D} = \dot{\mathbf{I}}_\sigma \approx \frac{I_{(t+\Delta t)} \boldsymbol{\sigma} - I_{(t)} \boldsymbol{\sigma}}{\Delta t} \quad (147)$$

ou encore

$$I_{(t+\Delta t)} \boldsymbol{\sigma} \approx I_{(t)} \boldsymbol{\sigma} + 3K \Delta t (D_\gamma^\gamma + D_3^3) \quad (148)$$

L'assemblage de la partie sphérique à la partie déviatorique permet d'obtenir la forme complète du tenseur des contraintes d'où l'hypothèse de contrainte plane :

$$0 = 1/3 I_{(t)} \boldsymbol{\sigma} + K \Delta t (D_\gamma^\gamma + D_3^3) + \beta \left( 2/3 D_3^3 - 1/3 (D_\gamma^\gamma) + \frac{1}{(2 G \Delta t)} S_{3(t)}^3 \right) \quad (149)$$

et en terme de déformation suivant 3 :

$$D_3^3 = \frac{1}{3K \Delta t + 2\beta} \left( (\beta - 3K \Delta t) D_\gamma^\gamma - I_{(t)} \boldsymbol{\sigma} - \frac{3\beta}{(2 G \Delta t)} S_{3(t)}^3 \right) \quad (150)$$

Cette expression est analogue à 144 et conduit donc aux calculs de  $\mathbf{I}_D$  puis  $\mathbf{D}$  et enfin le tenseur des contraintes. Elle permet également de calculer l'opérateur tangent.

En fait cette expression n'est pas cohérente avec la manière dont est calculée la contrainte dans la pratique à savoir la relation 102 que l'on va réécrire de la manière suivante :

$$\mathbf{I}_\sigma = \frac{E}{(1 - 2\nu)} (\varepsilon(t + \Delta t)_\gamma^\gamma + \varepsilon(t)_3^3 + D_3^3) \quad (151)$$

De plus, quel que soient les opérations de transport (de Lie ) le tenseur transporté conserve les conditions de contraintes planes. On doit donc avoir  $\sigma_{3(t)}^3 = 0$  d'où  $S_{3(t)}^3 = -I_{(t)}\boldsymbol{\sigma}/3 = -S_{\gamma(t)}^\gamma/3$ . d'où la forme finale :

$$\begin{aligned} D_3^3 &= \frac{1}{3K\Delta t + 2\beta} \left( \beta D_\gamma^\gamma - 3K(\varepsilon(t + \Delta t)_\gamma^\gamma + \varepsilon(t)_3^3) - \frac{3\beta}{(2G\Delta t)} S_\gamma^\gamma(t) \right) \\ &= \frac{1}{3K\Delta t + 2\beta} \left( \beta D_\gamma^\gamma - 3K(\varepsilon(t + \Delta t)_\gamma^\gamma + \varepsilon(t)_3^3) + \frac{\beta}{(2G\Delta t)} I_{(t)}\boldsymbol{\sigma} \right) \end{aligned} \quad (152)$$

## 7 Plasticité Prandtl-Reuss : cas général, modèle 3D

### 7.1 Equations constitutives

On pose une décomposition additive de la déformation en une partie élastique et une partie plastique. On suppose que cette décomposition a un sens physique.

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^{(p)} + \boldsymbol{\varepsilon}^{(e)} \quad (153)$$

Qui peut également être déclinée en incrémentale :

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(p)} + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(e)} \quad (154)$$

La partie élastique est associée au tenseur des contraintes.

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{E} : \boldsymbol{\varepsilon}^{(e)} \quad (155)$$

Dans notre cas on retient la loi de comportement élastique classique de Hooke d'où :

$$\mathbf{S} = \bar{\boldsymbol{\sigma}} = 2G\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(e)} \quad \text{et} \quad I_{\sigma} = \frac{K}{3}I_{\varepsilon} \quad (156)$$

Avec en fonction du module d'Young et du coefficient de poisson :

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad \text{et} \quad K = \frac{E}{(1+\nu)} \quad (157)$$

La partie plastique est décrite de manière incrémentale.

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(p)} = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (158)$$

avec  $\lambda$  un paramètre positif. Cette expression fait apparaître une dérivée temporelle. Dans le cadre des grandes transformations, il nous faut retenir une dérivée objective.

Le cas de la dérivée temporelle du scalaire absolu,  $\dot{\lambda}$ , ne pose pas de problème car elle est intrinsèquement objective, ce qui n'est pas le cas de  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(p)}$ . Classiquement différentes possibilités existent, dans notre cas nous utiliserons des dérivées de Lie.

Dans une première étape la dérivée retenue est celle de Lie deux fois covariante  $\mathcal{L}_{..}$ . Ce choix arbitraire entraîne des problèmes de variation volumique plastique non négligeable. Classiquement une solution est d'utiliser une dérivée de Jauman  $1/2(\mathcal{L}_{..} + \mathcal{L}^{\cdot\cdot})1/2(\mathcal{L}^{\cdot} + \mathcal{L}^{\cdot})$  ce qui conduit à une mesure de déformation de type logarithmique cumulée (cf. la thèse de Vincent Mora [Mora, 2004]) qui est une approximation de la mesure de déformation logarithmique qui elle, n'entraîne pas de variation volumique plastique dans le cadre d'une loi classique de plasticité.

Dans une seconde étape nous retiendrons donc également le choix d'une dérivée de Jauman pour minimiser la variation de volume plastique.

Mais dans tous les cas il est nécessaire de bien mettre en évidence les conséquences des choix effectués dans le cadre des dérivations. Le premier choix retenue va servir de cadre pour apporter des éléments de réponses à cette analyse.



Au niveau du second membre apparait également la dérivée de la fonction de charge "f" par rapport au tenseur contrainte. Celle-ci pose également un problème de définition. Ici l'objectif est de déterminer la direction du gradient de f par rapport au tenseur des contraintes. Notons que la fonction f dépend de  $\sigma$  et d'un certain historique de chargement. Mais elle ne dépend pas directement du point M auquel est rattaché  $\sigma$ . En particulier elle ne dépend pas explicitement des composantes de la métrique. L'équation  $f = C^{te}$  traduit ainsi une surface équipotentielle, dont  $\frac{\partial f}{\partial \sigma}$  représente la direction maximum de variation. il faut donc entendre "variation par rapport à  $\sigma$ " toutes les autres données étant fixes par ailleurs, en particulier : le repère local attaché au paramétrage matériel et donc la métrique associé. Nous retiendrons la notation finale suivante qui, même si elle est surabondante, permet de rappeler le contexte des dérivations :

$$\mathcal{L}_{..}\varepsilon^{(p)} = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \sigma} \Big|_{\bar{g}_i, g_{ij}} \quad (159)$$

En fait dans ce cas particulier le gradient de f peut-être calculé par rapport à n'importe quel type de composante du tenseur contrainte cf.annexe (§7.12).

On suppose de manière classique que la partie sphérique du tenseur des contraintes est indépendante de la plasticité. En retenant un critère isotrope, compte tenu de la condition d'objectivité, on obtiend une surface de charge cylindrique centré sur la trisectrice, dans l'espace des contraintes principales. Le gradient à la surface de charge ne dépend que du déviateur des contraintes. Une expression équivalente à (159) à un coefficient sur  $\lambda$  près est :

$$\mathcal{L}_{..}\varepsilon^{(p)} = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{S}} \Big|_{\bar{g}_i} \quad (160)$$

On retient une forme de Mises pour la surface de charge

$$\sigma_{eq} - \sigma_0 - R(\bar{\varepsilon}^{(p)}) = 0 \quad (161)$$

avec  $\sigma_{eq} = \sqrt{(\frac{3}{2} \mathbf{S} : \mathbf{S})}$  la contrainte équivalente au sens de Mises,  $\sigma_0$  la limite d'élasticité initiale et  $R(\bar{\varepsilon}^{(p)})$  l'écrouissage qui dépend classiquement de la déformation plastique cumulée :

$$\bar{\varepsilon}^{(p)}(t) = \int_0^t \sqrt{\frac{2}{3} d\varepsilon^{(p)} : d\varepsilon^{(p)}} \quad (162)$$

Due à la présence des racines carrées, classiquement on utilise la forme suivante équivalente :

$$f(\mathbf{S}, \bar{\varepsilon}^{(p)}) = \frac{1}{2} \mathbf{S} : \mathbf{S} - \frac{1}{3} \bar{\sigma}^2(\bar{\varepsilon}^{(p)}) \quad (163)$$

en ayant regroupé :  $\bar{\sigma}(\bar{\varepsilon}^{(p)}) = \sigma_0 - R(\bar{\varepsilon}^{(p)})$ . La fonction d'écrouissage  $\bar{\sigma}(\bar{\varepsilon}^{(p)})$  est fonction du matériau considéré, elle constitue un paramètre matériel.

Ainsi, la déformation plastique cumulée définie le niveau d'écrouissage du matériau et le gradient de f pour un niveau d'écrouissage donnée, définit l'orientation de l'écoulement plastique.

## 7.2 Intégration numérique des équations constitutives

### 7.2.1 Introduction

On se place dans le cadre d'une résolution par éléments finis d'un problème formulé en déplacement. L'intégration des équations constitutives s'appuie donc sur un champ de déplacement ou de déformation totale supposée connue.

Due au caractère qui peut-être fortement non-linéaire de ces équations, sauf cas très simple, il n'est pas envisagé de chercher une solution analytique explicite. La méthode d'intégration retenue est numérique. Du fait du caractère non continu des dérivées aux changements de régime : élastique plastique élastique, il est a priori plus intéressant d'utiliser une méthode à un pas plutôt qu'une méthode multi-pas qui aurait tendance à lisser la solution. Cependant dans le cas de résolution explicite où il n'est pas nécessaire de calculer l'opérateur tangent de l'évolution, les techniques de type Runge-Kutta se révèlent très efficaces. Dans notre cas, nous nous plaçons dans un cadre de résolution implicite avec détermination de l'évolution tangente.

Les équations étant du premier ordre, l'algorithme le plus précis est celui de Crank-Nikolson, cependant nous retenons un modèle purement implicite par soucis de simplicité dans un premier temps. La résolution est donc incrémentale.

A partir des informations connues au temps  $t$ , on cherche l'incrément qui permet de satisfaire les équations constitutives écrites de manière implicite au temps  $t + \Delta t$ . Les données du problème en dehors des paramètres matériels sont ainsi : la déformation totale  $\boldsymbol{\varepsilon}(t + \Delta t)$ , le tenseur de déformation plastique et la déformation plastique cumulée au temps  $t$   $\boldsymbol{\varepsilon}^{(p)}(t)$  et  $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(p)}(t)$ . Les inconnues du problème sont alors : le niveau de contrainte atteint  $\boldsymbol{\sigma}(t + \Delta t)$ , le tenseur de déformation plastique et la déformation plastique cumulée au temps  $t + \Delta t$ , ce dernier terme permettant le calcul de la nouvelle position de la surface de charge.

### 7.2.2 Transport de la déformation plastique d'un incrément à l'autre

**Première partie : introduction** Soit  $\boldsymbol{\varepsilon}_n^{(p)}$  la déformation plastique obtenue à l'incrément "n" c'est-à-dire au temps  $n\Delta t$ . D'un point de vue pratique, c'est un type donné de coordonnée dans le repère local matériel qui est obtenue après résolution : covariantes, contravariantes ... Le type de coordonnée est cohérent avec le type de dérivation matérielle,  $\mathcal{L}_{..}$   $\mathcal{L}^{\cdot}$  ... Pour fixer les idées, on considèrera le type de coordonnée deux fois covariantes qui est associé à la dérivée  $\mathcal{L}_{..}$ , mais il faut noter que l'on pourra envisager les autres types de coordonnées d'une manière équivalente.

D'un pas à l'autre, il est nécessaire de sauvegarder la déformation plastique, ici en deux fois covariantes. Ainsi on aura :

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{(p)} = \underset{..t}{\Delta t} \boldsymbol{\varepsilon}_n^{(p)} + \Delta_{..} \boldsymbol{\varepsilon}^{(p)} \quad (164)$$

L'incrément de déformation plastique est ainsi cohérent avec la dérivée matérielle, c'est-à-dire deux fois covariantes.

En fait dans le cas de grandes transformations ce modèle conduit au développement d'un tenseur de déformation plastique cumulée dont la trace n'est pas nul. Aussi conformément à la loi élastique retenue, cette trace introduit une modification de la partie sphérique du

tenseur des contraintes qui est rapidement inacceptable. On a donc chercher une méthode de transport qui permet de palier cette difficulté.

**Seconde partie : 3 propositions de modèle** Le tenseur de déformation plastique cumulée est représenté d'une part par ces 3 invariants et d'autre part par son orientation par rapport à la matière. Durant le transport, l'orientation du tenseur doit-être convecté par la matière tandis-que la partie invariante doit rester constante. Deux modèles sont proposés.

**Premier modèle** On considère que l'orientation du tenseur transporté est celle du tenseur deux fois convectés.

D'une manière pratique, on calcul les trois valeurs propres du tenseur initial  $\lambda_i$ . On détermine les directions principales du tenseur deux fois convecté  $\vec{V}_i = \vec{V}^i$ , ce qui nous permet de reconstruire le tenseur transporté.

$$\Delta_t \boldsymbol{\varepsilon}_n^{(p)} = \lambda_i \vec{V}^i \otimes \vec{V}^i \quad (165)$$

**Deuxième modèle** On considère la décomposition du tenseur gradient de vitesse en sa partie vitesse de déformation et en sa partie vitesse de rotation. On utilise la partie vitesse de rotation pour transporter les directions principales du tenseur plastique initial.

**Troisième modèle** Classiquement on utilise une dérivée de Jauman qui conduit à une approximation de la dérivée logarithmique. Dans ce cas, la trace du tenseur de déformation transportée est approximativement nulle.

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{(p)} = \frac{1}{2} \left( \Delta_t \boldsymbol{\varepsilon}_n^{(p)} + \Delta_{..} \boldsymbol{\varepsilon}_n^{(p)} \right) + \Delta_{..} \boldsymbol{\varepsilon}^{(p)} \quad (166)$$

Dans cette expression on utilise la demie somme des composantes mixtes du tenseur de déformation plastique. On peut également utiliser la demie somme des composantes covariantes et contravariantes, ce qui donnera le même résultat. L'intérêt des composantes mixtes est que l'on peut également utiliser la symétrie formelle des composantes :

$$\left( \Delta_t \boldsymbol{\varepsilon}_n^{(p)} \right)_{i \cdot j} = \left( \Delta_t \boldsymbol{\varepsilon}_n^{(p)} \right)_{\cdot i}^j \quad (167)$$

dans laquelle on suppose que le tenseur de déformation plastique est symétrique.

En utilisant cette symétrie formelle, il est possible en pratique de ne calculer qu'un type de composantes mixte du tenseur de déformation plastique.

**Comparaison des deux premiers modèles** Supposons que durant l'incrément de temps seule un mouvement solide ait lieu. Dans ce cas, les deux modèles conduisent au même résultat.

Supposons maintenant que durant l'incrément de temps, seules des mouvements d'élongation ou rétrécissement aient lieu suivant les trois directions principales initiales de la déformation plastique. Dans ce cas, ces directions plastiques restent inchangées pour les deux méthodes.

Le dernier cas concerne une déformation de cission selon les axes  $\vec{V}_3$  et  $\vec{V}_2$  par exemple, consistant à un glissement des points parallèlement à  $\vec{V}_2$ . Dans le repère  $\{ O, \vec{V}_i \}$ , le déplacement est du type :

$$U^1 = 0, U^2 = \alpha z, U^3 = 0 \quad (168)$$

Dans ce cas le premier modèle induit une déformation plastique transportée dont le repère principale tourne autour de l'axe  $\vec{V}_i$  tandis que la second méthode laisse inchangé la déformation plastique initiale.

On voit donc que dans les deux cas, les mouvements solides sont bien pris en compte. Le second modèle induit une modification de direction qui est indépendante de la déformation, au contraire du premier modèle.

A priori le premier modèle qui suit la matière, semble plus physique, cependant les deux solutions sont envisageables.

**Objectivité du tenseur transporté** On verra par la suite (cf. 7.2.6) qu'un tenseur transporté deux fois covariant, deux fois contravariant ou encore mixte, est un tenseur objectif. Ceci signifie que les directions principales du tenseur  ${}_{..t}^{\Delta t} \boldsymbol{\varepsilon}_n^{(p)}$  sont identiques quelque soit le paramétrage matériel retenue. Ainsi dans le cas de la première méthode, sachant que les invariants du tenseur de déformation plastique initial sont indépendant du transport, le tenseur transporté résultat est objectif.

Dans le cas du second modèle, a condition que l'intégration du mouvement solide soit suffisamment précise, on obtient également un résultat indépendant du paramétrage matériel utilisé, car le tenseur rotation est indépendant du système de paramétrage choisit. Le résultat est donc bien un tenseur intrinsèque. A priori il semble également objectif. En effet supposons l'écriture du tenseur dans un repère matériel quelconque et supposont un mouvement solide, il est clair que ses coordonnées vont restées constantes puisque son repère principal suit le même mouvement solide que la matière. C'est donc un tenseur matériel, il est donc objectif.

**Choix final** Le transport en mixte conduit à un tenseur objectif, aussi en pratique par simplicité, nous utiliserons la troisième méthode via un transport mixte.

### 7.2.3 Ecriture des équations constitutives discrétisées pour un transport deux fois covariants

Par cohérence, le même type de transport est utilisée pour la déformation plastique et la déformation totale :

$$\boldsymbol{\varepsilon}(t + \Delta t) = \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{(e)} + {}_{..t}^{t+\Delta t} \boldsymbol{\varepsilon}_n^{(p)} + \boldsymbol{\Delta}_{..} \boldsymbol{\varepsilon}^{(p)} \quad (169)$$

que l'on utilisera plutôt sous la forme de :

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{(e)} = \boldsymbol{\varepsilon}(t + \Delta t) - \boldsymbol{\Delta}_{..} \boldsymbol{\varepsilon}^{(p)} - {}_{..t}^{t+\Delta t} \boldsymbol{\varepsilon}_n^{(p)} \quad (170)$$

ou encore :

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}^{(e)} = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(t + \Delta t) - \boldsymbol{\Delta}_{..} \boldsymbol{\varepsilon}^{(p)} - {}_{..t}^{t+\Delta t} \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_n^{(p)} \quad (171)$$

Le fait que la surface de charge ne dépende pas de la partie sphérique du tenseur des contraintes implique que  $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{S}}|_{\bar{g}_i, t}$  soit un tenseur déviatorique, d'où  $\Delta_{..}\boldsymbol{\varepsilon}^{(p)}$ , par contre sont intégrale au cours du temps, due à la spécificité du type de dérivation objective retenue, n'est pas a priori déviatorique. Ainsi la déformation plastique totale n'est pas déviatorique en générale et en particulier le tenseur  ${}_{..t}^{t+\Delta t}\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_n^{(p)}$  n'est pas déviatorique. En conclusion, dans notre cas le calcul de trace de la déformation élastique est indépendant de l'incrément de déformation plastique, ce qui nous permettra de calculer la trace du tenseur des contraintes indépendamment de la plasticité.

Sous forme discrétisée l'équation (160) devient sur un pas :

$$\Delta_{..}\boldsymbol{\varepsilon}^{(p)} = \Delta\lambda \frac{\partial f}{\partial \mathbf{S}}|_{\bar{g}_i, t} \quad (172)$$

Ce qui avec les relations (171) et (156) conduit à une première expression du déviateur des contraintes :

$$\mathbf{S}(t+\Delta t) = 2G \left( \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(t + \Delta t) - \Delta_{..}\boldsymbol{\varepsilon}^{(p)} - {}_{..t}^{t+\Delta t}\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_n^{(p)} \right) = 2G \left( \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(t + \Delta t) - \Delta\lambda \frac{\partial f}{\partial \mathbf{S}}|_{\bar{g}_i, t} - {}_{..t}^{t+\Delta t}\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_n^{(p)} \right) \quad (173)$$

Dans le cas particulier d'une surface de Mises cf.(163) on obtient pour la direction du gradient :

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{S}}|_{\bar{g}_i, t} = \mathbf{S} \quad (174)$$

Ceci permet une seconde expression pour le calcul du déviateur des contraintes :

$$\mathbf{S}(t + \Delta t) = \frac{2G}{(1 + 2G\Delta\lambda)} (\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(t + \Delta t) - {}_{..t}^{t+\Delta t}\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_n^{(p)}) \quad (175)$$

Pour simplifier les différentes expressions on introduit les notations suivantes :

$$\mathbf{C} = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(t + \Delta t) - {}_{..t}^{t+\Delta t}\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_n^{(p)}, \quad c = \mathbf{C} : \mathbf{C}, \quad \gamma = (1 + 2G\Delta\lambda) \quad \text{et} \quad \alpha = \frac{2G}{\gamma} \quad (176)$$

De même on notera pour la suite :

$$\mathbf{S}_{n+1} = \mathbf{S}(t + \Delta t) \quad \text{et} \quad \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}^{(p)} = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(p)}(t + \Delta t) \quad (177)$$

En tenant compte de l'expression du tenseur des contraintes (175) l'équation de la surface d'écoulement s'écrit alors :

$$f = \frac{1}{2}\alpha^2 c - \frac{\bar{\sigma}(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(p)})^2}{3} = 0 \quad (178)$$

La déformation plastique cumulée à l'instant  $t + \Delta t$  est approchée d'une manière analogue avec une expression incrémentale à un pas :

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}^{(p)} = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_n^{(p)} + \sqrt{\frac{2}{3}} \alpha |\Delta\lambda| \sqrt{c} \quad (179)$$

Sachant que le paramètre  $\lambda$  est positif, la valeur absolue peut être supprimée.

L'écriture simplifiée du déviateur des contraintes devient :

$$\mathbf{S}_{n+1} = \alpha \mathbf{C} \quad (180)$$

### 7.2.4 Ecriture des équations constitutives discrétisées pour un transport en mixte cohérent avec la dérivée de Jauman

On reprend le même déroulement que celui présenté dans le cas d'un transport deux fois covariant. Par cohérence, le même type de transport est utilisée pour la déformation plastique et la déformation totale :

$$\boldsymbol{\varepsilon}(t + \Delta t) = \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{(e)} + \frac{1}{2} \left( \overset{\Delta t}{\underset{\cdot}{\cdot}} \boldsymbol{\varepsilon}_n^{(p)} + \overset{\Delta t}{\underset{\cdot}{\cdot}} \boldsymbol{\varepsilon}_n^{(p)} \right) + \frac{1}{2} \left( \Delta \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^{(p)} + \Delta \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^{(p)} \right) \quad (181)$$

que l'on utilisera plutôt sous la forme de :

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{(e)} = \boldsymbol{\varepsilon}(t + \Delta t) - \frac{1}{2} \left( \overset{\Delta t}{\underset{\cdot}{\cdot}} \boldsymbol{\varepsilon}_n^{(p)} + \overset{\Delta t}{\underset{\cdot}{\cdot}} \boldsymbol{\varepsilon}_n^{(p)} \right) - \frac{1}{2} \left( \Delta \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^{(p)} + \Delta \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^{(p)} \right) \quad (182)$$

On note que la surface de charge ne dépend pas de la partie sphérique du tenseur des contraintes ce qui implique que  $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{S}}|_{\hat{g}_i, \hat{g}^j, t}$  est un tenseur déviatorique d'où  $\Delta \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^{(p)}$ .

Ici on utilise un transport mixte, d'où des coordonnées mixtes pour le tenseur de contraintes.

L'intégrale au cours du temps, due à la spécificité du type de dérivation objective retenue, ici la dérivée de Jauman, est approximativement déviatorique. En fait, si l'on considère des cycles de charges, décharges en déformations finies, avec rotations des directions principales, on observe l'apparition d'une déformation sphérique. C'est un phénomènes connue qui constitue une limitation au choix de la dérivée de Jauman. On se reportera à la thèse de Vincent Mora ([Mora, 2004]) pour une présentation et une analyse détaillée.

En utilisant donc ces approximations, on en déduit que la trace de la déformation totale est approximativement entièrement élastique d'où :

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}^{(e)} = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(t + \Delta t) - \frac{1}{2} \left( \overset{\Delta t}{\underset{\cdot}{\cdot}} \boldsymbol{\varepsilon}_n^{(p)} + \overset{\Delta t}{\underset{\cdot}{\cdot}} \boldsymbol{\varepsilon}_n^{(p)} \right) - \frac{1}{2} \left( \Delta \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^{(p)} + \Delta \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^{(p)} \right) \quad (183)$$

Sous forme discrétisée l'équation (160) devient sur un pas :

$$\Delta \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^{(p)} = \Delta \lambda \frac{\partial f}{\partial \mathbf{S}}|_{\hat{g}_i, \hat{g}^j, t} \quad (184)$$

Étant donné que seules les composantes varient, on obtient alors un tenseur tel que.

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{S}}|_{\hat{g}_i, \hat{g}^j, t} = \frac{\partial f}{\partial S_i^j} \hat{g}^j \otimes \hat{g}_i = \frac{1}{2} \left( 2 \cdot S_j^i \hat{g}^j \otimes \hat{g}_i \right) = \mathbf{S} \quad (185)$$

En fait les dérivées d'un scalaire par rapport à un tenseur donne un tenseur, quelque soit les composantes utilisées pour la dérivation. On retrouve donc ici la même expression que dans le cas d'un transport 2 fois covariants. On peut donc noter :

$$\Delta \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^{(p)} = \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^{(p)} = \Delta \lambda \mathbf{S} \quad (186)$$

Les relations (183) et (156) conduit à l'expression du déviateur des contraintes :

$$\begin{aligned}\mathbf{S}(t + \Delta t) &= 2G \left( \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(t + \Delta t) - \frac{1}{2} \left( \overset{\Delta t}{\cdot} \underset{t}{\boldsymbol{\varepsilon}}_n^{(p)} + \overset{\Delta t}{\cdot} \underset{t}{\boldsymbol{\varepsilon}}_n^{(p)} \right) - \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^{(p)} \right) \\ &= 2G \left( \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(t + \Delta t) - \frac{1}{2} \left( \overset{\Delta t}{\cdot} \underset{t}{\boldsymbol{\varepsilon}}_n^{(p)} + \overset{\Delta t}{\cdot} \underset{t}{\boldsymbol{\varepsilon}}_n^{(p)} \right) - \Delta \lambda \mathbf{S}(t + \Delta t) \right)\end{aligned}\quad (187)$$

Pour simplifier les différentes expressions on introduit les notations suivantes :

$$\begin{aligned}\mathbf{C} &= \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(t + \Delta t) - \frac{1}{2} \left( \overset{\Delta t}{\cdot} \underset{t}{\boldsymbol{\varepsilon}}_n^{(p)} + \overset{\Delta t}{\cdot} \underset{t}{\boldsymbol{\varepsilon}}_n^{(p)} \right) \\ c &= \mathbf{C} : \mathbf{C}, \quad \gamma = (1 + 2G\Delta\lambda) \\ \alpha &= \frac{2G}{\gamma}\end{aligned}\quad (188)$$

De même on notera pour la suite :

$$\mathbf{S}_{n+1} = \mathbf{S}(t + \Delta t) \quad \text{et} \quad \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}^{(p)} = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(p)}(t + \Delta t)\quad (189)$$

Ce qui conduit à la même relation que dans le cas d'un transport 2 fois covariants. Cependant il faut noter qu'ici, le tenseur  $\mathbf{C}$  n'est pas le même du fait du transport mixte de la déformation plastique.

$$\mathbf{S}_{n+1} = \alpha \mathbf{C}\quad (190)$$

Ce qui constitue une proportionnalité avec le tenseur  $\mathbf{C}$  comme dans le cas d'un transport 2 fois covariants.

L'écriture simplifiée du déviateur des contraintes devient également (180) :

$$\mathbf{S}_{n+1} = \alpha \mathbf{C}$$

L'équation de la surface d'écoulement est identique au cas du transport 2 fois covariants (cf. 178) et on peut également conserver l'expression de la déformation cumulée approchée à l'instant  $t + \Delta t$  (cf. 179)

### 7.2.5 Calcul du multiplicateur plastique

Le multiplicateur plastique  $\Delta\lambda$  peut être calculé en utilisant l'équation du critère de plasticité (178). Toujours dans le cadre d'une solution de l'équation écrite sous forme implicite, nous retenons une résolution s'appuyant sur un algorithme de Newton. La fonction  $f(\Delta\lambda)$  constitue le résidu d'équilibre et il nous faut déterminer l'opérateur tangent  $\frac{\partial f}{\partial \Delta\lambda}$ . Notons que la dérivée s'effectue pour un temps et une métrique donnée.

Soit  $\Delta\lambda^{(i)}$  la solution obtenue à l'itération  $i$ , on cherche la solution  $(i+1)$  qui permet d'annuler le résidu.

$$f(\Delta\lambda^{(i+1)}) = 0 \approx f(\Delta\lambda^{(i)}) + \delta\lambda \frac{\partial f}{\partial \Delta\lambda} \Big|_{\bar{\mathbf{g}}_i, t} + 0(\delta\lambda^2)\quad (191)$$

En négligeant les termes du second ordre on obtient la relation de récurrence.

$$\delta\lambda = -\frac{1}{\frac{\partial f}{\partial \Delta\lambda}|_{\vec{g}_i, t}} f(\Delta\lambda^{(i)}) \quad \text{et} \quad \Delta\lambda^{(i+1)} = \delta\lambda + \Delta\lambda^{(i)} \quad (192)$$

Avec pour valeur de l'opérateur tangent (quelque soit le type de transport) :

$$\frac{\partial f}{\partial \Delta\lambda}|_{\vec{g}_i, t} = -\frac{8G^3c}{\gamma^3} - \frac{4\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} \bar{\sigma} \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \bar{\varepsilon}^{(p)}} \frac{G\sqrt{c}}{\gamma^2} \quad (193)$$

Le test de fin d'itération s'appuie sur la valeur obtenue pour  $f$ . En règle générale la convergence est très rapide du fait de la forme principalement quadratique de la fonction  $f$ .

**NB :** En présence d'une divergence une réponse est de subdiviser le tenseur  $\mathbf{C}$  en  $m$  intervalles, puis d'effectuer le calcul du multiplicateur plastique  $m$  fois selon l'algorithme présenté précédemment en cumulant les valeurs intermédiaires de  $\Delta\lambda$ .

### 7.2.6 Objectivité du tenseur contrainte pour un transport 2 fois covariants

L'opération de transport de la déformation plastique d'un pas à l'autre ajouté au type de dérivée matérielle pose le problème de l'objectivité du tenseur contrainte. L'objectif de ce paragraphe est l'examen de cette objectivité.

Supposons connus à l'instant  $t$  l'ensemble des informations mécanique. Soient deux paramétrages matériels conduisant à deux systèmes de bases naturelles  $\vec{g}_i$  et  $\vec{g}'_i$ . On considère un incrément de temps  $\Delta t$  qui conduit aux nouvelles bases  $\hat{\vec{g}}_i$  et  $\hat{\vec{g}}'_i$  attachées à une variation donnée et connue de la géométrie. L'objectif est de montrer que l'on obtient le même tenseur des contraintes pour les deux systèmes de paramétrages matériels.

La première question est l'identité de la grandeur  ${}_{..t}^{t+\Delta t} \varepsilon^{pm}$ , ce tenseur est-il indépendant du paramétrage, si oui alors en particulier sa trace sera également indépendante du paramétrage. En fait la question est identique pour tout tenseur que l'on transporte deux fois covariants.

Avant d'étudier le transport d'un tenseur, on s'intéresse à l'évolution des vecteurs des bases naturelles. Soit  $\alpha_i^j$  la matrice de passage entre les deux bases naturelles définies au point matériel  $M$ .

$$\vec{g}'_k = \alpha_i^k \vec{g}_i \quad (194)$$

L'évolution d'une longueur élémentaire s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} d\vec{M} = \vec{g}_i d\theta^i \\ = \vec{g}'_k d\theta'^k \\ = \alpha_i^k \vec{g}_i d\theta'^k \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} d\hat{\vec{M}} = \hat{\vec{g}}_i d\theta^i \\ = \hat{\vec{g}}'_k d\theta'^k \\ = \alpha_i^k \hat{\vec{g}}_i d\theta'^k \end{array} \right\} \quad (195)$$

Ceci quelque soit l'incrément  $d\theta'^k$  ce qui conduit à :

$$\hat{\vec{g}}'_k = \alpha_i^k \hat{\vec{g}}_i \quad (196)$$



Ainsi la décomposition d'une base naturelle dans une autre reste constante dans le temps !

Concernant les bases duales soit la décomposition initiale :

$$\vec{g}^{\prime l} = \gamma_j^l \hat{g}_j \quad \text{avec} \quad \alpha_k^i \gamma_i^l = \delta_k^l \quad (197)$$

La matrice  $[\gamma_i^l]$  est donc l'inverse de la transposée de la matrice  $[\alpha_k^i]$ , elle est unique. Après transformation, la matrice  $[\alpha_k^i]$  reste inchangée, et pour la base duale on doit avoir une relation du même type que celle de la seconde relation de (197). L'unicité de l'inverse de la matrice  $[\alpha_k^i]$  implique que la matrice  $[\gamma_i^l]$  reste également constante dans le temps. A partir de ces constatations il est possible maintenant de montrer le caractère tensoriel de l'opération de transport.

Soit  $\mathbf{A}$  un tenseur quelconque défini à l'instant  $t$ .

$$\{\mathbf{A} = A_{ij} \vec{g}^i \otimes \vec{g}^j = A'_{ik} \vec{g}^{\prime l} \otimes \vec{g}^{\prime k} = A'_{ik} \gamma_i^l \gamma_j^k \vec{g}^i \otimes \vec{g}^j\} \rightarrow \{A_{ij} = A'_{ik} \gamma_i^l \gamma_j^k\} \quad (198)$$

Après le transport deux fois covariants on a :

$${}_{..t}^{t+\Delta t} \mathbf{A} = A_{ij} \hat{g}^i \otimes \hat{g}^j = (A'_{ik} \gamma_i^l \gamma_j^k) \hat{g}_i \otimes \hat{g}_j = A'_{ik} (\gamma_i^l \gamma_j^k) \hat{g}_i \otimes \hat{g}_j = A'_{ik} \gamma_i^l \gamma_j^k \hat{g}^l \otimes \hat{g}^k \quad (199)$$

Ce qui montre bien l'unicité du tenseur obtenu par transport. Celui-ci ne dépend pas du choix de la base utilisé pour effectuer le transport. On voit que les composantes du tenseur convecté, exprimées dans le repère matériel convecté cf.(200), ne dépendent pas explicitement de la vitesse du point matériel, c'est donc a priori un tenseur objectif cf.(Annexe7.13).

$${}_{..t}^{t+\Delta t} \mathbf{A} = A_{ij} \hat{g}^{ik} \hat{g}^{jl} \hat{g}_k \otimes \hat{g}_l \quad (200)$$

### Remarque

A l'instant initial on a :

$$\mathbf{A} = A_{ij} \vec{g}^i \otimes \vec{g}^j = (\mathbf{Id} \otimes \mathbf{Id}) : \mathbf{A} \quad (201)$$

L'incrément de déformation entre  $t$  et  $t+\Delta t$  est identique quelque soit le paramétrage matériel choisit d'où on a unicité du tenseur identité transporté.

$${}_{..t}^{t+\Delta t} \mathbf{Id} = g_{ij} \hat{g}_i \otimes \hat{g}_j = g'_{ij} \hat{g}'_i \otimes \hat{g}'_j \quad (202)$$

A partir de cette relation et de la précédent on obtient l'identité suivante intéressante qui relie les convections deux fois covariantes et deux fois contravariantes :

$$({}_{..t}^{t+\Delta t} \mathbf{Id} \otimes {}_{..t}^{t+\Delta t} \mathbf{Id}) : {}_{..t}^{t+\Delta t} \mathbf{A} = {}_{..t}^{t+\Delta t} \mathbf{A} \quad (203)$$

Maintenant que l'on a montré l'objectivité et donc le caractère intrinsèque d'un tenseur transporté, en l'appliquant à  ${}_{..t}^{t+\Delta t} \varepsilon_n^{(p)}$  on en déduit :

- $\mathbf{C}$  cf.(176) est bien objectif,
- la résolution de l'équation (178) en tenant compte de (756) conduit à un  $\Delta \lambda$  unique, et donc de même pour  $\alpha$  cf.(176)

- $\alpha$  étant unique,  $\mathbf{C}$  étant objectif et unique, la relation (757) montre que  $\mathbf{S}$  est unique et objectif. On montrerait de même que l'on obtient le même résultat pour la partie sphérique du tenseur des contraintes.

Il faut cependant remarquer que bien que le tenseur  ${}_{..t}^{t+\Delta t}\varepsilon_n^{(p)}$  soit indépendant de la base  $\vec{g}_i$  cela n'implique pas son indépendance à la déformation, en fait dans le cas d'un transport deux fois covariants le vecteur transporté est une fonction de l'accroissement de déformation entre  $t$  et  $t + \Delta t$ .

$${}_{..t}^{t+\Delta t}\varepsilon_n^{(p)} = \text{fonction}(\Delta_t^{t+\Delta t}\varepsilon) \quad (204)$$

Il faudra tenir compte de cet aspect pour le calcul de l'opérateur tangent.

### 7.2.7 Objectivité du tenseur contrainte pour un transport mixte

On peut montrer en suivant une procédure analogue au cas d'un transport 2 fois covariants, que les transports 2 fois contravariants et mixtes conduisent également à des tenseurs objectifs. En particulier le transport cohérent avec la dérivée de Jauman conduit à un tenseur objectif.

Il faut noter que comme pour le cas d'un transport 2 fois covariants, le fait d'obtenir un tenseur objectif n'implique pas son indépendance à la déformation. Aussi l'opérateur tangent résultant :  $\frac{\partial \sigma^{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}}$  est différent suivant le type de transport utilisé.

## 7.3 Développement analytique du calcul de l'opérateur tangent

### 7.3.1 Généralités

L'objectif est la détermination de l'évolution tangente du tenseur des contraintes par rapport aux degrés de liberté du problème.

L'opérateur tangent est utilisé lors du calcul de la raideur, plus précisément pour déterminer la variation de la puissance interne virtuelle :

$$P_{int}^* = \int_{\mathcal{D}} \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} \, dv = \int_{\mathcal{D}} \sigma^{ij} : D_{ij}^* \, dv \quad (205)$$

L'objectif est la détermination de l'évolution tangente du tenseur des contraintes par rapport aux degrés de liberté du problème. Nous avons vu que le tenseur contrainte ne dépend directement que du champ de déformation et de son histoire. On pourrait donc a priori en déduire que sa variation totale ne dépend que de la déformation et de la vitesse de déformation c'est-à-dire de la partie symétrique du gradient de vitesse. En fait il n'en est rien et nous allons tenter d'expliquer ce paradoxe.

Considérons tout d'abord pour simplifier le tenseur de déformation lui-même. Si l'on calcul la dérivée totale du tenseur déformation, nous obtenons un tenseur non objectif, c'est-à-dire dépendant des rotations solides, par contre si l'on ne dérive que les composantes dans un repère matériel, on obtient le tenseur vitesse de déformation qui lui est objectif. Ainsi lors de la dérivée totale de la déformation, les vecteurs de base naturelle sont également dérivée, ce qui fait apparaître une dépendance au tenseur gradient de vitesse, mais due à la non symétrie du produit tensoriel, la dépendance à la partie anti-symétrique

ne peut-être supprimée. Le résultat est donc dépendant de la vitesse de déformation et également de la vitesse de rotation.

Il nous faut donc préciser quel type de variation qui nous intéresse. En fait deux cas sont intéressant. Tout d'abord, dans le cadre d'une méthode de résolution de l'équilibre globale avec une méthode itérative de type Newton-Raphson, il est nécessaire de connaître l'évolution tangente par rapport aux degrés de libertés, des grandeurs calculées. Due au calcul de la puissance interne (cf. 735) nous devons déterminer la variation des composantes du tenseur contrainte, par exemple les composantes deux fois contravariantes  $\sigma^{ij}$ . Nous montrerons par la suite que l'on peut considérer que localement, en un point donné, pour une histoire de chargement donné . . . la variation des composantes du tenseurs contraintes peuvent être exprimée uniquement en fonction de la variation des composantes du tenseur des déformations. Ainsi on pourra écrire :

$$\frac{\partial \sigma^{ij}}{\partial d d l} = \frac{\partial \sigma^{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}} \frac{\partial \varepsilon_{kl}}{\partial d d l} \quad (206)$$

Ainsi l'opérateur tangent qui nous intéresse est la grandeur  $\frac{\partial \sigma^{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}}$  qui ne représente les composantes d'un tenseur que lorsque l'on considère un point donné fixe, il s'agit alors en fait d'une variation temporelle déguisée d'un type donné.

La notion d'opérateur tangent est également utile dans le cadre du calcul du gradient spatial du champ de contrainte, utilisé par exemple dans le cas des éléments coques avec un seul point d'intégration dans l'épaisseur. Nous avons :

$$\mathbf{grad}(\boldsymbol{\sigma}) = \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \theta^i} \hat{g}_i \quad (207)$$

que l'on peut calculer en tenant compte de la dépendance locale exclusive des composantes des contraintes aux composantes des déformations selon :

$$\mathbf{grad}(\boldsymbol{\sigma}) = \left( \frac{\partial \sigma^{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}} \frac{\partial \varepsilon_{kl}}{\partial \theta^r} + \sigma^{ij} \frac{\partial (\hat{g}_i \otimes \hat{g}_j)}{\partial \theta^r} \right) \hat{g}_i \otimes \hat{g}_j \otimes \hat{g}_r \quad (208)$$

On voit également dans cette expression que les grandeurs directement exploitables sont les variations des composantes des contraintes par rapport à celle de déformation, les autres variations ne posant pas de problème particuliers dans le cadre de la résolution de l'équation constitutive.

Notons que la variation du tenseur contrainte par rapport à un système de composantes de déformation dépend du choix de ces composantes de déformation cf. annexe (§7.12). Notons également que la variation temporelle des tenseurs  $\hat{g}_i \otimes \hat{g}_j$  ne dépend pas exclusivement des variations des composantes du tenseur déformation. Il n'est donc pas possible d'étendre directement la relation (206) établie pour les composantes de déformation, au tenseur contrainte. En fait la variation du tenseur contrainte n'est pas une grandeur objective, et la remarque précédente montre que c'est précisément la variation des vecteurs de base, qui rend la variation totale non objective. Ceci met bien en évidence l'intérêt des dérivées de Lee pour lesquelles on ne dérive que les composantes !

Suivant les notations explicitées en annexes on pourra noter :

$$\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \Big|_{\hat{g}_i, M} \Big|_{\hat{g}^j, M} \quad (209)$$

Décomposons la variation ainsi défini du tenseur contrainte en une partie sphérique et une partie déviatorique.

$$\frac{\partial \sigma_{|\hat{g}_i, M}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}_{|\hat{g}^i, M} = \frac{\partial \mathbf{S}_{|\hat{g}_i, M}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}_{|\hat{g}^i, M} + \frac{\partial(\frac{K}{3} I_{\boldsymbol{\varepsilon}} \mathbf{Id})_{|\hat{g}_i, M}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}_{|\hat{g}^i, M} \quad (210)$$

Connaissant les variations des composantes du tenseur métrique en fonction des composantes du tenseur de déformation, il est facile de passer des variations d'un type de composantes de contrainte à un autre type. Cependant il faut noter qu'en tant que composantes de tenseur, c'est-à-dire pour un point matériel fixé, pour chaque choix de composantes, on définit un tenseur différent.

$$\frac{\partial \sigma_{|\hat{g}_i, M}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}_{|\hat{g}^i, M} = \frac{\partial \sigma_{|\hat{g}^i, M}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}_{|\hat{g}^i, M} + \sigma_{rt} \left( \frac{\partial \hat{g}^{ri}}{\partial \varepsilon_{kl}} \hat{g}^{tj} + \hat{g}^{ri} \frac{\partial \hat{g}^{tj}}{\partial \varepsilon_{kl}} \right) \hat{g}_i \otimes \hat{g}_j \otimes \hat{g}_k \otimes \hat{g}_l \quad (211)$$

En utilisant la relation (226) démontrée par la suite on obtient une relation plus explicite pour la seconde partie de l'expression :

$$\frac{\partial \sigma_{|\hat{g}_i, M}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}_{|\hat{g}^i, M} = \frac{\partial \sigma_{|\hat{g}^i, M}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}_{|\hat{g}^i, M} - 2\sigma_{rt} (\hat{g}^{rk} \hat{g}^{il} \hat{g}^{tj} + \hat{g}^{ri} \hat{g}^{tk} \hat{g}^{jl}) \hat{g}_i \otimes \hat{g}_j \otimes \hat{g}_k \otimes \hat{g}_l \quad (212)$$

### 7.3.2 Variation de la partie spérique de $\sigma$ par rapport au tenseur déformation

On recherche la variation par rapport aux composantes deux fois covariantes. En tenant compte de la relation

$$I_{\boldsymbol{\varepsilon}} = \text{trace}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \mathbf{Id} : \boldsymbol{\varepsilon} = \varepsilon_{ij} \hat{g}^{ij} \quad (213)$$

Il vient en tenant compte de la relation (226) démontrée par la suite :

$$\frac{\partial I_{\boldsymbol{\varepsilon}}}{\partial \varepsilon_{ij}} = \hat{g}^{ij} + \varepsilon_{kl} \frac{\partial \hat{g}^{kl}}{\partial \varepsilon_{ij}} = \hat{g}^{ij} - 2\varepsilon_{kl} \hat{g}^{ki} \hat{g}^{lj} = \hat{g}^{ij} - (\hat{g}^{ij} - g_{kl} \hat{g}^{ki} \hat{g}^{lj}) = g_{kl} \hat{g}^{ki} \hat{g}^{lj} \quad (214)$$

Ou encore avec une notation tensorielle :

$$\frac{\partial I_{\boldsymbol{\varepsilon}}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}_{|\hat{g}_i} = g_{kl} \hat{g}^{ki} \hat{g}^{lj} \hat{g}_i \otimes \hat{g}_j = \begin{matrix} t+\Delta t \\ ..0 \end{matrix} \mathbf{G} \quad (215)$$

D'où la variation de la trace du tenseur des contraintes

$$\frac{\partial(\frac{K}{3} I_{\boldsymbol{\varepsilon}})}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}_{|\hat{g}_i} = \frac{K}{3} \begin{matrix} t+\Delta t \\ ..0 \end{matrix} \mathbf{G} \quad (216)$$

Remarquons que les expressions (758) et (226) montrent que la trace du tenseur des contraintes peut-être considérée comme une fonction exclusive des composantes covariantes de la déformation.

### 7.3.3 Variation du déviateur des déformations par rapport au tenseur de déformation

Nous allons chercher à calculer la variation des composantes deux fois covariantes du déviateur des déformation par rapport aux composantes deux fois covariantes du tenseur des déformations.

Le calcul de la variation du déviateur de la partie élastique nécessite le calcul de la variation du déviateur totale de la déformation. En tenant compte de la définition du déviateur des déformations :

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = \boldsymbol{\varepsilon} - \frac{1}{3} I_{\boldsymbol{\varepsilon}} \mathbf{Id} \quad (217)$$

il vient :

$$\frac{\partial \bar{\varepsilon}_{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}} = \delta_i^k \delta_j^l - \frac{1}{3} \left( g_{ef} \hat{g}^{ek} \hat{g}^{fl} \hat{g}_{ij} + 2 I_{\boldsymbol{\varepsilon}} \frac{\partial \hat{g}_{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}} \right) = \delta_i^k \delta_j^l \left( 1 + \frac{1}{3} I_{\boldsymbol{\varepsilon}} \right) - \frac{1}{3} (g_{ef} \hat{g}^{ek} \hat{g}^{fl}) \hat{g}_{ij} \quad (218)$$

Ces grandeurs représentent les composantes d'un tenseur uniquement lors d'une évolution temporelle, pour un point matériel fixé, c'est-à-dire indépendamment d'une variation spatiale. Dans ce cas on peut noter :

$$\frac{\partial \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \Big|_{\hat{g}^i, M} = \left( 1 + \frac{1}{3} I_{\boldsymbol{\varepsilon}} \right) \mathbf{Id} \otimes \mathbf{Id} - \frac{1}{3} (\mathbf{Id} \cdot ({}^{t+\Delta t} \mathbf{G}) \cdot \mathbf{Id}) \otimes \mathbf{Id} \quad (219)$$

### 7.3.4 Variation du multiplicateur plastique par rapport au tenseur de déformation

Maintenant il nous faut déterminer la variation du déviateur des contraintes par rapport au tenseur des déformations. Dans ce but nous cherchons tout d'abord la variation du multiplicateur plastique par rapport au tenseur déformation. Pour cela on utilise la condition de critère de plasticité qui indique que l'on doit toujours avoir  $f = 0$ . Remarquons que la fonction  $f$  peut-être considérée comme une fonction uniquement des variables  $\varepsilon_{ij}$  et  $\Delta\lambda$  cf.(7.8). On peut donc écrire :

$$df = 0 = \frac{\partial f}{\partial \varepsilon_{ij} |_{\Delta\lambda}} d\varepsilon_{ij} + \frac{\partial f}{\partial \Delta\lambda |_{\varepsilon_{ij}}} d\Delta\lambda \quad (220)$$

En tenant compte des remarques de l'annexe (7.12) on notera :

$$df = 0 = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\varepsilon} |_{\hat{g}^i, \Delta\lambda}} : d\boldsymbol{\varepsilon} |_{\hat{g}^i} + \frac{\partial f}{\partial \Delta\lambda |_{\varepsilon_{ij}}} d\Delta\lambda \quad (221)$$

La notation met en évidence le type de composantes utilisé pour les dérivations, sachant que bien que la différentielle totale soit toujours identiquement nulle, le résultat des dérivées partielles obtenu n'est pas indépendant du choix des composantes de la déformation.

Cependant, ces différentes dérivées sont des grandeurs tensorielles, donc indépendantes du repère matériel.

La relation (221) conduit à :

$$d\Delta\lambda = \left( \frac{-1}{\frac{\partial f}{\partial \Delta\lambda |_{\varepsilon_{ij}}}} \right) \left( \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\varepsilon} |_{\hat{g}^i, \Delta\lambda}} : d\boldsymbol{\varepsilon} |_{\hat{g}^i} \right) \quad (222)$$

On remarque que dans cette expression la différentielle totale de  $\Delta\lambda$  peut-être exprimée uniquement en fonction des variations des composantes deux fois covariantes de la déformation. On peut donc considérer que localement, le multiplicateur plastique peut-être présenté comme une fonction dépendant uniquement des  $\varepsilon_{ij}$ . En particulier on en déduit :

$$\frac{\partial\Delta\lambda}{\partial\partial\varepsilon_{|\hat{g}_i}} = \frac{\partial\Delta\lambda}{\partial\partial\varepsilon_{ij}} \hat{g}_i \otimes \hat{g}_j = \left( \frac{-1}{\frac{\partial f}{\partial\Delta\lambda|_{\varepsilon_{ij}}}} \right) \left( \frac{\partial f}{\partial\varepsilon_{|\hat{g}_i, \Delta\lambda}} \right) \quad (223)$$

Le terme  $\frac{\partial f}{\partial\Delta\lambda|_{\varepsilon_{ij}}}$  est calculé à la convergence de l'algorithme de Newton permettant le calcul du multiplicateur plastique. En effet ce dernier calcul est effectué pour une déformation donnée, donc des composantes fixées (cf.7.2.5). Il nous reste à déterminer la variation de f par rapport aux coordonnées du tenseur déformation. Pour cela il faut connaître la dépendance entre plasticité transporté et déformation en particulier la variation de la trace de  ${}_{..t}^{t+\Delta t}\varepsilon^{(p)}$ .

### 7.3.5 Variation de la trace de l'incrément de déformation correspondant à l'incrément de t par rapport au tenseur de déformation

Nous allons tout d'abord étudier la variation des éléments de la métrique. Pour plus de facilité nous travaillons en composantes. Nous avons tout d'abord :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\hat{g}_{ij} - g_{ij})$$

On peut donc considérer que les composantes de déformation et du tenseur métrique sont liées de manière exclusive, et en différentielle totale on a :

$$d\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}d\hat{g}_{ij}$$

ou encore

$$d\hat{g}_{ij} = 2d\varepsilon_{ij} , \quad \frac{\partial\hat{g}_{ij}}{\partial\varepsilon_{kl}} = \delta_i^k \delta_j^l \quad (224)$$

Sous forme tensorielle on écrira :

$$\frac{\partial\mathbf{Id}}{\partial\varepsilon_{|\hat{g}^i, M}} = \mathbf{Id} \otimes \bar{\mathbf{Id}} \quad (225)$$

Pour les composantes deux fois contravariantes :

$$\hat{g}^{ij} \hat{g}_{jk} = \delta_k^i$$

d'où

$$\frac{\partial\hat{g}^{ij}}{\partial\varepsilon_{lm}} \hat{g}_{jk} = -\hat{g}^{ij} \frac{\partial\hat{g}_{jk}}{\partial\varepsilon_{lm}}$$

Avec les expressions précédentes nous obtenons :

$$\frac{\partial\hat{g}^{ir}}{\partial\varepsilon_{lm}} = -2\hat{g}^{il} \hat{g}^{mr} \quad (226)$$

Sous forme tensorielle on écrira :

$$\frac{\partial \mathbf{Id}_{|\hat{g}_i, M}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}_{|\hat{g}_i, M} = -2 \mathbf{Id} \bar{\otimes} \mathbf{Id} \quad (227)$$

Nous pouvons maintenant déterminer la variation de la trace de  ${}^{t+\Delta t}_{..t} \boldsymbol{\varepsilon}^{(p)}$  par rapport aux composantes deux fois covariantes du tenseur des déformations. C'est une grandeur tensorielle cf.annexe (§7.12).

$$\begin{aligned} \frac{\partial I_{..t} {}^{t+\Delta t} \boldsymbol{\varepsilon}^{(p)}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}_{|\vec{g}_i, t} &= \frac{\partial (\varepsilon_{ij}^{(p)} \hat{g}^{ij})}{\partial \varepsilon_{lm}}_{|\vec{g}_i, t} \hat{g}_l \otimes \hat{g}_m \\ &= -2 \varepsilon_{ir}^{(p)} \hat{g}^{il} \hat{g}^{rm} \hat{g}_l \otimes \hat{g}_m \\ &= -2 \mathbf{Id} \bar{\otimes} \mathbf{Id} : {}^{t+\Delta t}_{..t} \boldsymbol{\varepsilon}^{(p)} \\ &= -2 {}^{t+\Delta t}_{..t} \boldsymbol{\varepsilon}^{(p)} \end{aligned} \quad (228)$$

${}^{t+\Delta t}_{..t} \boldsymbol{\varepsilon}^{(p)}$  étant un tenseur objectif, la variation est donc objective.

### 7.3.6 Variation du tenseur C par rapport au tenseur de déformation

Nous nous intéressons aux variations des composantes deux fois covariantes du tenseur C par rapport aux composantes deux fois covariantes du tenseur des déformations.

A partir de l'expression (176) nous avons :

$$\mathbf{C} = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} - \left( \Delta t {}_{..t} \boldsymbol{\varepsilon}^{(p)} - \frac{I_{..t} {}^{t+\Delta t} \boldsymbol{\varepsilon}^{(p)}}{3} \mathbf{Id} \right) \quad (229)$$

La variation du déviateur des déformations à été précédemment calculé, il nous faut maintenant obtenir la variation du déviateur de la partie plastique convectée.

La variation du tenseur convecté est nulle dans le cas d'une convection deux fois covariante, et la variation de la trace à déjà été calculée d'où en tenant compte des expressions déjà calculées :

$$\frac{\partial C_{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}} = \delta_i^k \delta_j^l \left( 1 + \frac{1}{3} I \boldsymbol{\varepsilon} + \frac{1}{3} I {}^{t+\Delta t}_{..t} \boldsymbol{\varepsilon}^{(p)} \right) - \frac{1}{3} (g_{ef} \hat{g}^{ek} \hat{g}^{fl}) \hat{g}_{ij} - \frac{2}{3} \left( \varepsilon_{(n)ef}^{(p)} \hat{g}^{ek} \hat{g}^{fl} \right) \hat{g}_{ij} \quad (230)$$

Comme dans cas de la variation du déviateur des déformations on peut dire que ces grandeurs représentent les composantes d'un tenseur uniquement lors d'une évolution temporelle, pour un point matérielle fixé, c'est-à-dire indépendamment d'une variation spatiale. Dans ce cas on peut noter :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{C}_{|\vec{g}^i, M}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}_{|\vec{g}_i, M} &= \left( 1 + \frac{1}{3} I \boldsymbol{\varepsilon} + \frac{1}{3} I {}^{t+\Delta t}_{..t} \boldsymbol{\varepsilon}^{(p)} \right) \mathbf{Id} \bar{\otimes} \mathbf{Id} \\ &\quad - \frac{1}{3} (\mathbf{Id} \cdot ({}^{t+\Delta t}_{..0} \mathbf{G}) \cdot \mathbf{Id}) \otimes \mathbf{Id} \\ &\quad - \frac{2}{3} (\mathbf{Id} \cdot ({}^{t+\Delta t}_{..t} \boldsymbol{\varepsilon}^{(p)}) \cdot tfor \mathbf{Id}) \otimes \mathbf{Id} \end{aligned} \quad (231)$$

### 7.3.7 Variation de $f$ par rapport au tenseur de déformation

Calculons la variation de la grandeur  $c$  cf.(176) par rapport au tenseur de déformation. On s'intéresse ici aux variations par rapport aux coordonnées deux fois covariants du tenseur des déformations.

$$\frac{\partial c}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}_{|\hat{g}_i} = \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}_{|\hat{g}_i} : \mathbf{C} + \mathbf{C} : \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}_{|\hat{g}_i} \quad (232)$$

**NB :** Due à la forme des tenseurs  $\mathbf{C}$  et  $\frac{\partial \mathbf{C}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}_{|\hat{g}_i,t}$  il n'y a pas égalité entre  $\frac{\partial \mathbf{C}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}_{|\hat{g}_i,t} : \mathbf{C}$  et  $\mathbf{C} : \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}_{|\hat{g}_i,t}$ , c'est-à-dire qu'il n'y a pas commutativité entre les deux produits tensoriels.

En reprenant l'expression de la fonction d'érouissage (178) on obtient :

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}_{|\hat{g}_i,\Delta\lambda} = \frac{1}{2}\alpha^2 \frac{\partial c}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}_{|\hat{g}_i} - \frac{2}{3}\bar{\sigma} \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \bar{\varepsilon}^{(p)}}_{|\hat{g}_i,\Delta\lambda} \frac{\partial \bar{\varepsilon}^{(p)}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}_{|\hat{g}_i,\Delta\lambda} \quad (233)$$

On utilise l'expression (756) pour déterminer la variation de la déformation plastique, en tenant compte que  $\Delta\lambda$  est positif.

$$\frac{\partial \bar{\varepsilon}^{(p)}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}_{|\hat{g}_i,\Delta\lambda} = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\alpha\Delta\lambda}{2\sqrt{c}} \frac{\partial c}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}_{|\hat{g}_i} \quad (234)$$

d'où la forme définitive de l'évolution de  $f$  à  $\Delta\lambda$  fixé.

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}_{|\hat{g}_i,\Delta\lambda} = \left( \frac{1}{2}\alpha^2 - \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\alpha\Delta\lambda\bar{\sigma}}{3\sqrt{c}} \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \bar{\varepsilon}^{(p)}}_{|\hat{g}_i,\Delta\lambda} \right) \frac{\partial c}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}_{|\hat{g}_i} \quad (235)$$

Cette expression introduite dans la relation (223) permet le calcul de la variation du multiplicateur plastique par rapport au tenseur déformation. Nous pouvons maintenant calculer la variation du déviateur des contraintes par rapport à la déformation.

### 7.3.8 Variation de $\mathbf{S}$ par rapport au tenseur de déformation

A partir de la relation (757) nous avons :

$$\frac{\partial \mathbf{S}_{n+1}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}_{|\hat{g}_i^i,M} = \alpha \left( \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}_{|\hat{g}_i^i,M} - \alpha \mathbf{C} \otimes \frac{\partial \Delta\lambda}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}_{|\hat{g}_i^i,t} \right) \quad (236)$$

Dans l'expression les deux dérivée par rapport aux déformations se trouvent systématiquement en fin d'expression de manière à ce que la relation suivante soit justifiée :

$$d\mathbf{S}_{n+1} = \frac{\partial \mathbf{S}_{n+1}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}_{|\hat{g}_i^i,M} : d\boldsymbol{\varepsilon}_{|\hat{g}_i} \quad (237)$$



### 7.3.9 Résumé des relations nécessaire pour le calcul de l'opérateur tangent

1. variation du tenseur  $\sigma$  :

$$\frac{\partial \sigma_{|\hat{g}_i, M}}{\partial \epsilon_{|\hat{g}_i, M}} = \frac{\partial \sigma_{|\hat{g}^i, M}}{\partial \epsilon_{|\hat{g}_i, M}} - 2\sigma_{rt} (\hat{g}^{rk} \hat{g}^{il} \hat{g}^{tj} + \hat{g}^{ri} \hat{g}^{tk} \hat{g}^{jl}) \hat{g}_i \otimes \hat{g}_j \otimes \hat{g}_k \otimes \hat{g}_l \quad (238)$$

et

$$\frac{\partial \sigma_{|\hat{g}^i, M}}{\partial \epsilon_{|\hat{g}_i}} = \frac{\partial \mathbf{S}_{|\hat{g}^i, M}}{\partial \epsilon_{|\hat{g}_i}} + \frac{\partial (\frac{K}{3} I \epsilon \mathbf{Id})_{|\hat{g}^i, M}}{\partial \epsilon_{|\hat{g}_i}} \quad (239)$$

2. variation des composantes de la métrique :

$$\frac{\partial \hat{g}_{ij}}{\partial \epsilon_{kl}} = \delta_i^k \delta_j^l \quad \text{et} \quad \frac{\partial \hat{g}^{ir}}{\partial \epsilon_{lm}} = -2\hat{g}^{il} \hat{g}^{mr} \quad (240)$$

3. variation de la trace de  $\sigma$  :

$$\frac{\partial (\frac{K}{3} I \epsilon)}{\partial \epsilon_{|\hat{g}_i}} = \frac{K}{3} \begin{matrix} t+\Delta t \\ \dots 0 \end{matrix} \mathbf{G} \quad (241)$$

4. variation du déviateur  $\mathbf{S}$  :

$$\frac{\partial \mathbf{S}_{n+1|\hat{g}^i, M}}{\partial \epsilon_{|\hat{g}_i}} = \alpha \left( \frac{\partial \mathbf{C}_{|\hat{g}^i, M}}{\partial \epsilon_{|\hat{g}_i, t}} - \alpha \frac{\partial \Delta \lambda}{\partial \epsilon_{|\hat{g}_i, t}} \otimes \mathbf{C} \right) \quad (242)$$

5. variation du tenseur  $\mathbf{C}$  :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{C}_{|\hat{g}^i, M}}{\partial \epsilon_{|\hat{g}_i, M}} &= \left( 1 + \frac{1}{3} I \epsilon + \frac{1}{3} I \begin{matrix} t+\Delta t \\ \dots t \end{matrix} \epsilon_{(n)}^{(p)} \right) \mathbf{Id} \bar{\otimes} \mathbf{Id} \\ &\quad - \frac{1}{3} (\mathbf{Id} \cdot \begin{matrix} t+\Delta t \\ \dots 0 \end{matrix} \mathbf{G}) \cdot \mathbf{Id} \otimes \mathbf{Id} \\ &\quad - \frac{2}{3} (\mathbf{Id} \cdot \begin{matrix} t+\Delta t \\ \dots t \end{matrix} \epsilon^{(p)}) \cdot \mathbf{Id} \otimes \mathbf{Id} \end{aligned} \quad (243)$$

6. variation du multiplicateur plastique :

$$\frac{\partial \Delta \lambda}{\partial \epsilon_{|\hat{g}_i}} = \frac{\partial \Delta \lambda}{\partial \epsilon_{ij}} \hat{g}_i \otimes \hat{g}_j = \left( \frac{-1}{\frac{\partial f}{\partial \Delta \lambda |_{\epsilon_{ij}}}} \right) \left( \frac{\partial f}{\partial \epsilon_{|\hat{g}_i, \Delta \lambda}} \right) \quad (244)$$

7. variation de la fonction de charge :

$$\frac{\partial f}{\partial \epsilon_{|\hat{g}_i, \Delta \lambda}} = \left( \frac{1}{2} \alpha^2 - \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\alpha \Delta \lambda \bar{\sigma}}{3\sqrt{c}} \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \epsilon^{(p)}_{|\hat{g}_i, \Delta \lambda}} \right) \frac{\partial c}{\partial \epsilon_{|\hat{g}_i}} \quad (245)$$

8. variation de  $c$  :

$$\frac{\partial c}{\partial \epsilon_{|\hat{g}_i}} = \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial \epsilon_{|\hat{g}_i}} : \mathbf{C} + \mathbf{C} : \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial \epsilon_{|\hat{g}_i}} \quad (246)$$

### 7.3.10 Cas 1D

L'étude du cas 1D s'effectue à partir du modèle générale 3D auquel on adjoint des hypothèses et des conditions particulières.

On considère que le tenseur des contraintes ne comporte qu'une seule composante non nulle, que l'on considèrera ici portée par l'axe 1. Cela suppose tout d'abord qu'il n'y ait pas d'effort selon l'axe 2 et 3. C'est le cas par exemple d'une traction ou compression suivant 1. Par contre lors de l'étude de la flexion d'une poutre autour de l'axe 2 ou 3, la présence d'une charge transverse répartie ou non selon ces axes va introduire une contrainte principale de traction-compression selon 1. L'utilisation d'un modèle 1D supposera alors que l'on néglige les actions suivants 2 et 3. En général cette hypothèse est effectivement justifiée. Cependant, par exemple pour des matériaux sandwich dont les peaux sont très fine, l'effet local d'écrasement selon les axes 2 ou 3, peut être non négligeable! Nous plaçons donc dans le cas aucun effort transverse n'est à prendre en compte, ni en compression-traction, ni en cisaillement.

Concernant la cinématique, on suppose un repère matériel  $\vec{g}_i$   $i = 1 \dots 3$  tel que l'axe 1 est celui de traction-compression, et tel que les deux autres axes forment avec le premier un repère orthogonale. Pendant la transformation, l'orthogonalité est conservée d'où quelque soit le système de variance utilisé, seule le terme (3,3) des composantes du tenseur des contraintes est non nulle.

$$g_{1j} = g^{1j} = g_1^j = 0, \text{ pour } j \quad (247)$$

En appelant  $\varepsilon^p$  la déformation plastique cumulée et  $\sigma_{eq}$  la contrainte de Mises, on suppose l'existence d'une fonction de charge  $f(\varepsilon^p)$ .

$$\sigma_{eq} = f(\varepsilon^p) \quad (248)$$

Dans le cas 1D, lors d'une première charge par exemple en traction nous avons :

$$\sigma_{eq} = \sigma_1^1 = E\varepsilon_1^{(e)1} = E(\varepsilon_1^1 - \varepsilon_1^{(p)1}) \quad (249)$$

La relation entre déformation totale et déformation plastique s'écrit donc sous la forme :

$$f(\varepsilon^p) = E(\varepsilon_1^1 - \varepsilon_1^{(p)1}) \quad (250)$$

## 7.4 Implantation informatique

L'objectif de ce paragraphe est de présenter quelques particularités de l'implantation informatique au sein du code Herezh++.

Au niveau des outils déjà en place, nous pouvons utiliser les différents tenseurs typé, c'est-à-dire suivant la dimension et le type de composantes. Par exemple un élément TenseurHH représente les composantes deux fois covariantes d'un tenseur en dimension 1,2 ou 3. Il en est de même pour les vecteurs avec des composantes covariantes ou contravariantes. Les différentes opérations usuelles sont surchargées ; par exemple les produit scalaire et produit deux fois contracté. Nous pouvons donc écrire un certain nombre de relations tels qu'elles apparaissent dans la partie théorique de ce document. Cependant certaines fonctionnalités ne sont pas encore présente, l'objet de ce paragraphe est de présenter leurs implantations.

## 7.5 Variation de volume

Le modèle d'élastoplasticité présenté, repose d'une part sur une loi élastique de Hooke, et d'autre part sur une plasticité indépendante de la trace du tenseur des contraintes. Cette dernière condition induit que la surface de plasticité est un cylindre dans l'espace des contraintes principales. Expérimentalement, pour les métaux, cette hypothèse est bien vérifiée, il convient donc de la suivre. L'utilisation de la loi de Hooke suppose en petite déformation, que les parties sphériques de contraintes et de déformation sont liés par un coefficient de compressibilité, la trace des déformations représentant au premier ordre la déformation volumique.

Dans le cas de grandes déformations volumiques, la variation relative de volume n'est plus représentée uniquement par la trace du tenseur des déformations. Aussi, si l'on veut conserver une relation directe élastique entre la partie sphérique du tenseur des contraintes et celle du tenseur des déformations, il est nécessaire d'utiliser une loi de comportement élastique plus sophistiquée que celle de Hooke, voir un comportement hyperélastique.

Concernant la partie plastique, celle-ci permet de calculer l'incrément de déformation plastique, qui est déviatorique. En remarquant que l'incrément de déformation plastique correspond également à la vitesse de déformation plastique fois un incrément de temps, on en déduit que la trace de la vitesse de déformation plastique est nulle c'est-à-dire que la vitesse de déformation volumique relative plastique est nulle.

$$I_{D^{(p)}} = 0 = \frac{\dot{\sqrt{g^{(p)}}}}{\sqrt{g_0}} \quad (251)$$

En supposant que la méthode d'intégration de la vitesse de déformation plastique soit cohérente avec cette condition, elle devrait conduire à une déformation déviatorique (?) plastique cumulée qui n'entraîne pas de variation de volume d'origine plastique.

## 7.6 Annexes plasticité

### 7.7 Notation sur des tenseurs du quatrième ordre particulier

On introduit quelques relations et opérateurs. Soient  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{B}$  deux tenseurs symétriques du second ordre. On définit deux types de produits tensoriels

$$\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} = A_{ij} B_{kl} \vec{g}^i \otimes \vec{g}^j \otimes \vec{g}^k \otimes \vec{g}^l \quad \text{et} \quad \mathbf{A} \bar{\otimes} \mathbf{B} = A_{ij} B_{kl} \vec{g}^i \otimes \vec{g}^k \otimes \vec{g}^j \otimes \vec{g}^l \quad (252)$$

Soit  $\mathbf{W}$  un tenseur du 4<sup>ieme</sup> ordre, on définit l'opération de double contraction par :

$$\mathbf{W} : \mathbf{A} = W_{ijkl} A^{kl} \vec{g}^i \otimes \vec{g}^j \quad (253)$$

On remarque que si  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{B}$  sont deux tenseurs symétriques, la symétrie par rapport aux deux premiers indices, ainsi que par rapport aux deux derniers indices est conservée pour le premier produit tensoriel, mais pas pour le second qui entraîne une symétrie entre le premier et le troisième indice d'une part et le deuxième et le quatrième indice d'autre part.

## 7.8 Dépendance des différentes grandeurs aux coordonnées $\varepsilon_{ij}$

L'objectif est de mettre en évidence la dépendance de différentes grandeurs utilisées dans le calcul de la contrainte à des composantes données du tenseur des déformations.

De part la définition du tenseur  $\mathbf{C}$ , dans le cas d'une convection deux fois covariantes de la déformation plastique, on observe que les composantes  $C_{ij}$  dépendent exclusivement des  $\varepsilon_{kl}$ . On note :

$$C_{ij} = C_{ij}(\varepsilon_{kl}) \quad (254)$$

Dans le cas des autre type de convection, exprimées en deux fois covariants, elles feront apparaître les composantes du tenseur métrique. Or Nous avons montré cf.(§7.3.5) que les divers composantes du tenseur métrique et les composantes du tenseur déformation sont liées de manière exclusive. On en déduit que dans tous les cas de convection le résultat précédent (254) est inchangé.

La variable  $c = \mathbf{C} : \mathbf{C} = C_{ij}C_{kl}\hat{g}^{ik}\hat{g}^{jl}$  dépend des composantes  $C_{ij}$  et des composantes deux fois contravariantes du tenseur métrique  $\hat{g}^{jl}$ . Pour les mêmes raisons que pour les composantes  $C_{ij}$  on peut donc considérer que le scalaire absolu  $c$  comme une fonction exclusive des  $\varepsilon_{kl}$ .

$$c = c(\varepsilon_{kl}) \quad (255)$$

## 7.9 Coordonnées matérielles et grandeurs convectées

Lorsque l'on introduit la définition de la déformation, on s'appuie sur la notion de grandeurs matérielles exprimées dans le repère naturelle  $\vec{g}_i$ , qui est également matériel. Pour s'assurer d'une définition locale du tenseur des déformations, on s'appuie sur des grandeurs matériels infinitésimales telles que :  $d\vec{M} = d\theta^i \vec{g}_i$ . Une grandeur associée à un point matériel est dite matérielle ou attachée à la matière lorsque ses coordonnées dans la base naturelle, sont constantes c'est-à-dire par exemple pour une grandeur vectorielle  $\vec{A}$ , lorsque :  $\vec{A} \cdot \vec{g}^i = Cte$ . On en déduit que les vecteurs de la base naturelle sont des grandeurs matérielles  $\vec{g}_i \cdot \vec{g}^j = \delta_i^j = Cte$  par contre les vecteurs de la base duale ne représente pas des grandeurs matérielles :  $\vec{g}^i \cdot \vec{g}^j = g^{ij}$ .

En conséquence le transport une fois contravariant correspond naturellement à un transport que l'on peut qualifier de matériel, en ce sens qu'il correspond à la variation naturelle de grandeurs attachées directement à la matière. Ce n'est pas le cas des grandeurs vectorielles transportées de manière covariante. Cependant cette remarque ne doit pas conduire à un transport contravariant systématique, les grandeurs physiques n'étant pas systématiquement lié rigidement à la matière, leur variation pouvant être plus complexe, tout en étant liée à la matière.

Soient deux vecteurs matériels  $\vec{A}$  et  $\vec{B}$  directement attachés à la matière, on a ainsi :

$$\hat{A} \cdot \hat{B} - \vec{A} \cdot \vec{B} = 2\varepsilon : (\hat{A} \otimes \hat{B}) \quad (256)$$

En conséquence une grandeur directement attaché à la matière n'est pas intrinséquement constante, par exemple sa norme évolue, sauf si la déformation est nulle.

## 7.10 Variation de grandeurs convectées

Soit un tenseur convecté deux fois covariant  ${}_{..}\mathbf{A}$ , on cherche à exprimer la variation temporelle du tenseur ou la variation du tenseur par rapport aux degrés de liberté du système.

Tout d'abord remarquons que la dérivée de Lee deux fois covariantes est nulle, mais il en est pas de même pour la dérivée de Lee deux fois contravariantes ni totale. Donc le résultat dépend du choix de dérivée retenue en particulier si l'on cherche à utiliser une dérivée objective de type Lee.

On se place dans le cas où l'objectif est la détermination de l'opérateur tangent. Dans ce cas nous sommes intéressés plutôt par des variation totales du type :

$$\frac{\partial {}_{..}\mathbf{A}}{\partial ddt} \text{ ou encore } {}_{..}\dot{\mathbf{A}}$$

C'est grandeur ne sont donc pas objectives, en particulier on verra qu'elles dépendent des mouvements solides.

Calculons la variation temporelle totale de  ${}_{..}\mathbf{A}$ .

$${}_{..}\dot{\mathbf{A}} = A_{ij} \frac{d(\hat{g}^i \otimes \hat{g}^j)}{dt} \quad (257)$$

en tenant compte de la relation :

$$\dot{\hat{g}}^j = -(\dot{\hat{g}}_i \cdot \hat{g}^j) \hat{g}^i = -V^j|_i \hat{g}^i \quad (258)$$

On obtient :

$${}_{..}\dot{\mathbf{A}} = -A_{ij} (V^i|_k \hat{g}^k \otimes \hat{g}^j + V^j|_k \hat{g}^i \otimes \hat{g}^k) \quad (259)$$

On voit bien dans cette expression que la variation temporelle totale de  ${}_{..}\mathbf{A}$  dépend du gradient de  $\vec{V}$  dans son ensemble et non pas seulement de la partie symétrique c'est-à-dire  $\mathbf{D}$  ou encore de la seule partie anti-symétrique  $\hat{\mathbf{\Omega}}$ . Ainsi dans ce contexte, la variation de  ${}_{..}\mathbf{A}$  par rapport à la déformation constitue une dérivée partielle et non totale.

Supposons néanmoins que l'on cherche à exhiber, toujours dans le même contexte de dérivée totale de  ${}_{..}\mathbf{A}$ , la partie relative à la déformation. On va donc effectuer une dérivée en deux parties successives, tout d'abord variation de  ${}_{..}\mathbf{A}$  par rapport à la déformation puis variation de la déformation par rapport au temps. Il est clair que la variation des coordonnées de la déformation a un sens pratique immédiat puisqu'elle constitue les composantes du tenseur de vitesse de déformation, au contraire la variation totale du tenseur de déformation n'est pas directement utilisable car ne représentant pas une grandeur objective. On va donc utiliser comme variables intermédiaires dans l'opération de dérivation les composantes de la déformation.

Pour être complet, d'une manière analogue à l'association déformation  $\varepsilon$  vitesse de déformation  $\mathbf{D}$ , on associe un opérateur rotation  $\mathbf{\Omega}$  à la vitesse de rotation  $\hat{\mathbf{\Omega}}$ . L'opérateur rotation  $\mathbf{\Omega}$  représente les mouvements solides, on ne cherche pas à l'explicitier plus en détail, en particulier par rapport aux mouvement globaux, car a priori cela n'est pas nécessaire dans l'étude des lois de comportement en coordonnées matérielles entraînées.

A partir de cette décomposition on a :

$$\dot{\mathbf{A}} = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \varepsilon_{ij}} \frac{d\varepsilon_{ij}}{dt} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \Omega_{ij}} \frac{d\Omega_{ij}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \varepsilon_{ij}} D_{ij} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \Omega_{ij}} \dot{\Omega}_{ij} \quad (260)$$

Sachant d'autre part que :

$$\mathbf{grad}(\vec{\mathbf{V}}) = V_i|_j \hat{g}^j \otimes \hat{g}^i = \mathbf{D} + \dot{\mathbf{\Omega}} = (D_{ij} + \dot{\Omega}_{ij}) \hat{g}^i \otimes \hat{g}^j \quad (261)$$

on obtient à l'aide de (259) :

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{A}} &= -(A_{kj} \hat{g}^{kr} V_r|_i + A_{ik} \hat{g}^{kr} V_r|_j) \hat{g}^i \otimes \hat{g}^j \\ &= \{-(A_{kj} \hat{g}^{kr} D_{ri} + A_{ik} \hat{g}^{kr} D_{rj}) - (A_{kj} \hat{g}^{kr} \dot{\Omega}_{ri} + A_{ik} \hat{g}^{kr} \dot{\Omega}_{rj})\} \hat{g}^i \otimes \hat{g}^j \\ &= \{-(A_{kr} \hat{g}^{kj} \hat{g}^i \otimes \hat{g}^r + A_{rk} \hat{g}^{ki} \hat{g}^r \otimes \hat{g}^j)\} (D_{ij} + \dot{\Omega}_{ij}) \end{aligned} \quad (262)$$

d'où par identification

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \varepsilon_{ij}} = \{-(A_{kr} \hat{g}^{kj} \hat{g}^i \otimes \hat{g}^r + A_{rk} \hat{g}^{ki} \hat{g}^r \otimes \hat{g}^j)\} \quad (263)$$

On peut donner à cette grandeur une signification plus générale. Plaçons nous dans l'espace des déformations. Nous savons que le tenseur déformation et le tenseur transporté sont des grandeurs indépendantes du repère dans lequel elles s'expriment. Choisissons un repère donné  $\hat{g}_i$  avec les notations précédemment introduites nous pouvons écrire en utilisant la symétrie de  $\mathbf{D}$  :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \varepsilon|_{\hat{g}_{i,t}}} &= -(\delta_i^e \delta_j^f A_{kr} \hat{g}^{kj} \hat{g}^i \otimes \hat{g}^r \otimes \hat{g}_e \otimes \hat{g}_f + \delta_j^e \delta_i^f A_{rk} \hat{g}^{ki} \hat{g}^r \otimes \hat{g}^j \otimes \hat{g}_f \otimes \hat{g}_e) \\ &= -(\delta_i^e A_{kr} \hat{g}^{kf} \hat{g}^i \otimes \hat{g}^r \otimes \hat{g}_e \otimes \hat{g}_f + \delta_j^e A_{rk} \hat{g}^{kf} \hat{g}^r \otimes \hat{g}^j \otimes \hat{g}_f \otimes \hat{g}_e) \\ &= -(\delta_i^e A_{kr} \hat{g}_{et} \hat{g}^i \otimes \hat{g}^r \otimes \hat{g}^t \otimes \hat{g}^k + \delta_j^e A_{rk} \hat{g}_{et} \hat{g}^r \otimes \hat{g}^j \otimes \hat{g}^k \otimes \hat{g}^t) \\ &= -(A_{kr} \hat{g}_{it} \hat{g}^i \otimes \hat{g}^r \otimes \hat{g}^t \otimes \hat{g}^k + A_{rk} \hat{g}_{jt} \hat{g}^r \otimes \hat{g}^j \otimes \hat{g}^k \otimes \hat{g}^t) \\ &= -(A_{lj} \hat{g}_{ik} + A_{ik} \hat{g}_{jl}) \hat{g}^i \otimes \hat{g}^j \otimes \hat{g}^k \otimes \hat{g}^l \\ &= -(\mathbf{Id} \bar{\otimes} \mathbf{A}^T + \mathbf{A} \bar{\otimes} \mathbf{Id}) \end{aligned} \quad (264)$$

## 7.11 Remarques concernant les calculs de gradient

Soit une grandeur tensorielle  $\mathbf{A}$  défini en tout point matériel, d'où un champ de tenseur  $\mathbf{A}$ . Calculons sa variation spatiale par rapport à un paramétrage matériel  $\theta^i$ .

$$\mathbf{A}, i = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \theta^i} \quad (265)$$

On en déduit le gradient spatial classique :

$$d\mathbf{A} = \mathbf{grad}(\mathbf{A}) \cdot d\vec{\mathbf{M}} = (\mathbf{A}, i \vec{g}^i) \cdot (d\theta^j \vec{g}_j) \quad \text{avec} \quad \mathbf{grad}(\mathbf{A}) = \mathbf{A}, i \vec{g}^i \quad (266)$$

Notons que de part la construction de la base naturelle nous avons :

$$d\vec{M} = \frac{\partial M}{\partial \theta^i} = \vec{g}_i d\theta^i$$

c'est-à-dire qu'il n'y a pas de variation des vecteurs de base dans cette définition.

$$d\vec{M} \neq \vec{g}_i d\theta^i + d\vec{g}_i \theta^i$$

. Ainsi lorsque l'on calcul le gradient, on effectue les variations de la grandeur par rapport aux coordonnées matérielles uniquement, sans tenir compte de la variation des vecteurs de base ce qui pourrait conduire à la notation suivante pour le gradient qui rappellerait que la base est constante :

$$\mathbf{grad}(\mathbf{A}) = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \vec{M}|_{\vec{g}_i}} \vec{g}^i \quad (267)$$

Maintenant on peut se poser la question de savoir si il en serait de même pour la base duale. Auparavant nous pouvons faire quelques remarques sur la base duale.

Tout d'abord, à partir de l'existence d'un paramétrage matériel, d'un champ de bases naturelles associées et des bases duales correspondantes on suppose qu'il soit possible de construire un paramétrage covariant  $\theta_j$  tel que :

$$d\vec{M} = d\theta_j \vec{g}^j \quad (268)$$

Il est clair que ce paramétrage n'est pas unique mais cela n'a pas d'importance ici. Par contre les relations précédentes permettent d'établir une relation unique entre les incréments.

$$d\theta_j g^{ij} = d\theta^i \quad \text{ou encore} \quad \frac{\partial \theta^i}{\partial \theta_j} = g^{ij} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \theta_i}{\partial \theta^j} = g_{ij} \quad (269)$$

Cette relation montre que lors de l'évolution temporelle d'un élément de matière  $d\vec{M}$ , l'élément infinitésimal  $d\theta_j$  n'est pas constant, donc que dans tous les cas le nouveau paramétrage ne peut pas être matériel. Ceci met bien en évidence les rôles non symétriques des bases naturelles et des bases duales dans le cas d'un paramétrage matériel. Cependant à un temps donné, pour un choix particulier de paramétrage covariant, ce dernier constitue un paramétrage comme un autre, et l'on a :

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \theta^i} = \mathbf{A},_i = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \theta_j} \frac{\partial \theta_j}{\partial \theta^i} = \mathbf{A},^j g_{ij} \quad (270)$$

Ce qui en utilisant les mêmes notations que précédemment conduirait à relation généralisée :

$$\mathbf{grad}(\mathbf{A}) = \mathbf{A},_i \vec{g}^i = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \vec{M}|_{\vec{g}_i}} \vec{g}^i = \mathbf{A},^i \vec{g}_i = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \vec{M}|_{\vec{g}^i}} \vec{g}_i \quad (271)$$

Le calcul du gradient est indépendant du choix de type de coordonnées : covariants ou contravariants. Dans chaque cas on considère que la base associée est fixe dans le calcul du gradient. Dans tous les cas la notation "un peu abusive" de variation d'un tenseur par rapport au vecteur position c'est en fait une variation par rapport à des composantes.

## 7.12 Variation de tenseurs par rapport aux composantes $\varepsilon_{ij}$

Soient deux systèmes de coordonnées matérielles  $\theta^i$  et  $\theta'^i$ . Chacun de ces deux systèmes conduit à un système de base naturelle associé et à une définition des composantes du tenseur des déformations.

$$\varepsilon_{ij} \text{ et } \varepsilon'_{kl} \quad (272)$$

Entre les deux systèmes il existe une matrice de passage qui demeure fixe pendant l'évolution de la transformation (cf. § 7.2.6, expression 197).

$$\vec{g}_i = \beta_i^j \vec{g}'_j \quad (273)$$

et on a la relation suivante classique, critère de tensorialité :

$$\varepsilon_{ij} = \beta_i^k \beta_j^l \varepsilon'_{kl} \quad (274)$$

La relation est définie pour un point matériel. On a également la même relation entre les composantes de tenseurs pour des points matériels différents, dans ce cas la matrice  $\beta$  n'est plus constante pendant l'évolution. Dans tous les cas la relation précédente entre grandeurs scalaires permet d'écrire :

$$\frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial \varepsilon'_{kl}} = \beta_i^k \beta_j^l \quad (275)$$

Considérons maintenant la variation d'un tenseur  $\mathbf{A}$  par rapport aux composantes du tenseur de déformation. On considère que le tenseur  $\mathbf{A}$  est une fonction des composantes  $\varepsilon_{ij}$  et d'autres grandeurs, en particulier il peut être fonction des composantes des tenseurs métriques, ce qui constitue le cas difficile. En fait il existe une relation directe entre  $\varepsilon_{ij}$  et  $\hat{g}_{ij}$  mais lorsque l'on calcule une différentielle totale on peut toujours faire un choix particulier de variables indépendantes. Ainsi on peut écrire :

$$d\mathbf{A} = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \varepsilon_{ij} |_{\hat{g}_{kl}, \hat{g}'^{rs}}} d\varepsilon_{ij} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \hat{g}^{ij} |_{\varepsilon_{kl}, \hat{g}'^{rs}}} d\hat{g}^{ij} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \hat{g}'^{ij} |_{\varepsilon_{kl}, \hat{g}_{rs}}} d\hat{g}'^{ij} \quad (276)$$

On note :

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \varepsilon_{ij} |_{\hat{g}_{kl}, \hat{g}'^{rs}}} = \mathbf{H}^{ij} \quad (277)$$

Pour les deux systèmes de coordonnées matérielles considérées, il faut considérer que l'on a :

- $\varepsilon_{ij}$  dépend exclusivement des  $\varepsilon'_{kl}$  et l'on a la relation (274), i.e.  $\varepsilon_{ij}$  est indépendant des  $\hat{g}'_{kl}$  et  $\hat{g}'^{rs}$ .
- de manière analogue aux composantes de déformation,  $\hat{g}^{ij}$  dépend exclusivement des  $\hat{g}'^{rs}$  et l'on a :

$$\hat{g}^{ij} \beta_i^k \beta_j^l = \hat{g}'^{kl}$$

- et enfin  $\hat{g}_{ij}$  dépend exclusivement des  $\hat{g}'_{rs}$  et l'on a :

$$\hat{g}_{ij} = \beta_i^k \beta_j^l \hat{g}'_{kl}$$



Dans ces conditions les grandeurs  $\mathbf{H}^{ij}$  représentent les composantes d'un tenseur car en considérant la variation partielle de  $\mathbf{A}$  on peut maintenant écrire compte tenu des indépendances signalées si-dessus :

$$\mathbf{H}^{ij} = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \varepsilon_{ij} |_{\hat{g}_{kl}, \hat{g}^{rs}}} = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \varepsilon'_{kl} |_{\hat{g}'_{ep}, \hat{g}'^{rs}}} \frac{\partial \varepsilon'_{kl}}{\partial \varepsilon_{ij}} = \frac{1}{\beta_i^k \beta_j^l} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \varepsilon'_{kl} |_{\hat{g}'_{ep}, \hat{g}'^{rs}}} = \frac{1}{\beta_i^k \beta_j^l} \mathbf{H}^{kl} \quad (278)$$

Dans cette démonstration, nous n'avons pas besoin de faire apparaître explicitement les vecteur de base. La grandeur ainsi défini représente le gradient de la grandeur  $\mathbf{A}$  par rapport aux composantes de déformation, les composantes du tenseurs métriques étant maintenu fixe. Ce gradient est valide que ce soit pour des points matériels différents ou pour un même point matériel à différents temps. On notera :

$$\mathbf{grad}_{(\varepsilon_{ij} |_{\hat{g}_{kl}, \hat{g}^{rs}})}(\mathbf{A}) = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \varepsilon_{ij}} \vec{g}_i \otimes \vec{g}_j \quad (279)$$

avec

$$d\mathbf{A} = \mathbf{grad}_{(\varepsilon_{ij} |_{\hat{g}_{kl}, \hat{g}^{rs}})}(\mathbf{A}) d\varepsilon_{ij} + \mathbf{grad}_{(\hat{g}_{kl} |_{\varepsilon_{ij}, \hat{g}^{rs}})}(\mathbf{A}) d\hat{g}_{kl} + \mathbf{grad}_{(\hat{g}^{rs} |_{\varepsilon_{ij}, \hat{g}_{kl}})}(\mathbf{A}) d\hat{g}^{rs} \quad (280)$$

Si l'on change de système de coordonnées, on obtient le même résultat pour le tenseur gradient  $\mathbf{grad}_{(\varepsilon_{ij} |_{\hat{g}_{kl}, \hat{g}^{rs}})}(\mathbf{A})$ .

D'une manière identique on montrerait que la variation des composantes de  $\mathbf{A}$  par rapport aux composantes de déformation, pour un même point matériel, représentent aussi les composantes d'un tenseur. On précisera alors que le point M est fixe d'où la notation :

$$\mathbf{grad}_{(\varepsilon_{ij}) |_M}(\mathbf{A}) = \frac{\partial A^{kl}}{\partial \varepsilon_{ij}} \vec{g}_k \otimes \vec{g}_l \otimes \vec{g}_i \otimes \vec{g}_j \quad \text{avec} \quad d\mathbf{A} = \mathbf{grad}_{(\varepsilon_{ij}) |_M}(\mathbf{A}) d\varepsilon_{ij} \quad (281)$$

Par contre, considérons le champ spatial des tenseur  $\mathbf{A}$ , la variation spatiale des composantes de ce tenseur par rapport aux composantes de déformation ne représentent pas les composantes d'un tenseur. Il manque la variation des vecteurs de base qui, dans ce cas ne sont pas nulles.

Maintenant, si l'on considère la dépendance des variables  $\varepsilon_{ij}$ ,  $\hat{g}_{kl}$ ,  $\hat{g}^{rs}$  entre elles, on peut calculer un gradient totale par rapport aux composantes  $\varepsilon_{ij}$ . Rappelons les dépendances totales :

$$\frac{\partial \hat{g}_{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}} = 2\delta_i^k \delta_j^l, \quad \frac{\partial \hat{g}^{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}} = -2\hat{g}^{ik} \hat{g}^{jl}, \quad (282)$$

On pourra donc écrire :

$$\begin{aligned} d\mathbf{A} &= \left( \mathbf{grad}_{(\varepsilon_{ij} |_{\hat{g}_{kl}, \hat{g}^{rs}})}(\mathbf{A}) + \mathbf{grad}_{(\hat{g}_{kl} |_{\varepsilon_{ij}, \hat{g}^{rs}})}(\mathbf{A}) \frac{\partial \hat{g}_{kl}}{\partial \varepsilon_{ij}} + \mathbf{grad}_{(\hat{g}^{rs} |_{\varepsilon_{ij}, \hat{g}_{kl}})}(\mathbf{A}) \frac{\partial \hat{g}^{rs}}{\partial \varepsilon_{ij}} \right) d\varepsilon_{ij} \\ &= \left( \mathbf{grad}_{(\varepsilon_{ij} |_{\hat{g}_{kl}, \hat{g}^{rs}})}(\mathbf{A}) + \mathbf{grad}_{(\hat{g}_{kl} |_{\varepsilon_{ij}, \hat{g}^{rs}})}(\mathbf{A}) 2\delta_k^i \delta_l^j - 2\mathbf{grad}_{(\hat{g}^{rs} |_{\varepsilon_{ij}, \hat{g}_{kl}})}(\mathbf{A}) \hat{g}^{ri} \hat{g}^{sj} \right) d\varepsilon_{ij} \\ &= \mathbf{grad}_{(\varepsilon_{ij})}(\mathbf{A}) d\varepsilon_{ij} \end{aligned} \quad (283)$$

Le gradient ainsi défini est total, c'est un tenseur, par contre due au fait que les coordonnées du tenseur métrique dépendent ici des coordonnées du tenseur déformation, le résultat dépend du type de coordonnée choisit pour la dérivation c'est-à-dire qu'a priori :

$$\mathbf{grad}_{(\varepsilon_{ij})}(\mathbf{A}) \neq \mathbf{grad}_{(\varepsilon^{ij})}(\mathbf{A})$$

Ce point montre la particularité de la dérivation par rapport au tenseur déformation, alors que la définition d'un gradient par rapport à des composantes qui sont indépendantes de celle du tenseur métrique ne pose pas de pb. Si on se réfère au paragraphe concernant le calcul des gradients spatiaux cf.(7.11) on notera donc :

$$\mathbf{grad}_{(\varepsilon_{ij})}(\mathbf{A}) = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \varepsilon_{ij}} \hat{g}_i \otimes \hat{g}_j = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \Big|_{\hat{g}_i} \quad (284)$$

Dans le cas des lois de comportement et en particulier pour la plasticité, nous avons besoin de définir des variations par rapport au tenseur de déformation. Il faut donc faire attention à définir une variation par rapport à des composantes données. En particulier notons qu'en général on a :

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \Big|_{\hat{g}_i} \neq \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \Big|_{\hat{g}^i} \quad (285)$$

bien que ces deux grandeurs définissent chacun un tenseur.

### 7.13 Quelques définitions

Une coordonnée est dite matérielle lorsqu'elle est attachée à la matière. Pour un même point matériel, elle reste fixe dans le temps. On parle de coordonnée Lagrangienne.

Un repère est dit matériel lorsqu'il est attaché à la matière. Il suit les déformations de la matière. A tout système de coordonnée de matérielle  $\theta^i$ , on peut associer un système de repères matériels curvilignes dont les vecteurs de base sont  $\vec{g}_i = \frac{\partial \vec{M}}{\partial \theta^i}$ . On parle de repère naturel associé au paramétrage. Un repère naturel associé à un paramétrage matériel est un repère matériel.

Une grandeur associée à un point matériel est dite matérielle ou attachée à la matière lorsque ses coordonnées dans une base naturelle matérielle, sont constantes c'est-à-dire par exemple pour une grandeur vectorielle  $\vec{A}$ , lorsque :  $\vec{A} \cdot \vec{g}^i = Cte$ .

Une grandeur est dite isotrope par rapport à la matière lorsqu'elle ne dépend pas d'une direction particulière de la matière.

Une grandeur est dite tensorielle lorsqu'elle satisfait par exemple un critère de tensorialité. Un critère classique est celui des règles de changement de base pour les composantes du tenseur. Une grandeur tensorielle bien que s'exprimant dans un repère, est indépendante du repère de calcul. Une fois connue ses composantes dans un repère donné, par les règles de changement de base, identiques pour tous les tenseurs, on a accès aux composantes dans n'importe quelle base.

Une grandeur est dite objective pour un objet donné, lorsqu'elle ne dépend pas de la position de l'observateur qui la calcule. D'une manière plus précise, la grandeur est en fait indépendante de tout mouvement solide de l'objet. Ou encore si deux observateurs ont des

mouvements relatifs constants différent entre eux, par rapport à l'objet, ils doivent obtenir le même résultat dans le calcul de la grandeur. Exemples de grandeurs objectives : une coordonnée matérielle, un repère matériel ou plus généralement une grandeur matérielle. Cependant il n'y a pas que les grandeurs matérielles qui sont objectives. La déformation n'est pas une grandeur matérielle, mais c'est une grandeur objective. On peut définir différents tenseur de déformation : Green-Lagrange, Almansi, Cauchy . . .

Une grandeur tensorielle n'est pas forcément objective. Un exemple classique est celui de la dérivée temporelle totale du tenseur de déformation : c'est un tenseur non objectif. Par contre les dérivées de Lee, qui consistent dans la pratique à ne dériver que les composantes d'une grandeur exprimée dans un repère matériel, conduisent à des tenseurs objectifs. En particulier la dérivée de Lee deux fois covariantes du tenseur de déformation donne le tenseur vitesse de déformation.

Une grandeur qui n'est pas tensorielle, peut-être objective. Par exemple le n-uplet constitué par la température, et la pression d'un gaz, ne forme pas les coordonnées d'un vecteur, ce sont cependant des grandeurs objectives.

Enfin un point important (pas vraiment démontré) : un tenseur exprimé dans un repère matériel, dont les composantes ne font appels explicitement qu'à des dérivées temporelles de la position du point matériel, est automatiquement objectif.

## 8 Comportement d’hystérésis déviatorique

### 8.1 Introduction

Le modèle proposé s’appuie sur de nombreux travaux de recherche. Nous proposons, dans ce chapitre, d’en retracer brièvement l’historique. Ce modèle a été initialement implanté dans le logiciel Herezh dans une version écrite en Fortran 77 (f77) (1992-1997) puis dans une version en C++ (2002-...). Les modèles et les algorithmes utilisés reposent principalement sur les travaux de Denis Favier [Favier, 1988a] et de Pierre Pégon [?]. Cependant dans le cas du code Herezh++, des développements originaux ont également introduit à travers différentes collaborations avec Guilhem Bless (en particulier concernant une nouvelle technique de détection et de gestion des points d’inversion), Hervé Laurent (loi Hyper-visco-hystérésis), Denis Favier (sur tous les aspects de l’hystérésis), que je tiens à remercier.

### 8.2 Historique succinct du modèle d’élasto-visco-hystérésis

Le modèle d’élasto-hystérésis a été présenté initialement par Pierre Guélin en 1980 [Guélin, 1980]. Durant une dizaine d’années, il a été approfondi et validé expérimentalement. L’objectif initial était la modélisation des Alliages à Mémoire de Forme (AMF). Un certain nombre d’applications ont ensuite concerné des matériaux divers (inox, matériaux granulaires, élastomères,...). Ces travaux se sont concrétisés par deux documents importants : les thèses d’état de Denis Favier [Favier, 1988a] et de Pierre Pégon [?].

La modélisation de phénomènes cycliques est l’objectif principal de ce type de loi. Ce modèle ayant, en effet, peu d’intérêt dans le cas d’un chargement monotone.

L’originalité de ce modèle provient de la prise en compte de la partie d’hystérésis sous forme d’une mémorisation discrète. L’idée principale repose sur des états discrets des variables thermodynamiques globales telles que la puissance ou les énergies mises en jeu. Notons également que l’on cherche avant tout, une modélisation phénoménologique même si le comportement décrit peut s’expliquer et s’analyser au niveau microscopique.

Par rapport aux modèles classiques de plasticité (car l’hystérésis s’apparente à de la plasticité), la modélisation s’appuie sur un concept de décomposition des efforts intérieurs plutôt que sur celui beaucoup plus classique de décomposition des déformations (déformation élastique, déformation plastique visqueuse ...)

The superposition of stresses states that the Cauchy stress tensor  $\sigma$  is expressed from the contributions of :

- an hyperelastic or reversible stress contribution of Mooney-Rivlin, named  $\sigma_e$ , time and loading path independent,
- a viscoelastic stress contribution, named  $\sigma_v$ , which can be divided in several particular elementary contributions. This contribution is time dependent,
- a pure hysteresis stress contribution, named  $\sigma_h$ , only deviatoric. This contribution is time independent but follows incremental parameter. The hysteretic stress contribution depends on the loading path and takes into account an irreversible part for any loading.

The Cauchy stress tensor is then expressed by the relation :

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_e + \boldsymbol{\sigma}_v + \boldsymbol{\sigma}_h \quad (286)$$

The superposition of hyperelasticity, viscosity and hysteresis stress contributions allows reversible, non-reversible and viscous phenomena to be described together. The above relation 286 defines an elasto-visco-hysteresis tensorial scheme, analogous to the elasto-hysteresis one, each contribution being presented in the following part.

### 8.3 Hysteresis contribution

The hysteresis model, adapted to cyclic loading condition, is composed of an incremental behavior law (constitutive law) and an inversion and crossing point management algorithm during the cyclic evolution path.

For not heavy the notation, the subscript  $h$  is not used in this section but all stress depends on this hysteretic contributions in the following.

#### 8.3.1 Cercles neutres

Le terme "cercles neutres" désigne un ensemble d'hypersurfaces dans l'espace des contraintes. Dans le cas particulier des cinématiques irrotationnelles, ces surfaces sont décrites exhaustivement dans le plan déviatoire par des cercles de rayons allant de zéro jusqu'à l'infini et emboîtées, comme des poupées russes, les uns à l'intérieur des autres. Ces surfaces sont de même nature mécanique que les surfaces de charge des modèles élastoplastiques plus classiques. Ces cercles sont qualifiés de "neutres" parce que la dissipation intrinsèque du modèle est nulle lorsque la contrainte suit un chemin de chargement compris dans l'une de ces surfaces ou sur un de ces cercles. Bien que ces cercles neutres n'interviennent pas explicitement dans l'écriture du modèle d'hystérésis pure, ils sont à la base de sa construction ([Pegon, 1988]). C'est pourquoi nous les présentons ici au lecteur, afin de mieux comprendre les objets, qui vont suivre lors de la présentation de l'algorithme de gestion de la mémoire discrète. Le caractère de cet ensemble de cercles neutres utile au modèle d'hystérésis pure est la position de ces cercles les uns relativement aux autres. Cette position évolue au cours du chargement mécanique comme nous allons l'expliquer à présent. La position initiale, c'est-à-dire pour un matériau vierge de tout chargement mécanique, est représentée à la figure 3, où les cercles sont tous concentriques autour du point de contrainte nulle. La position des cercles est ensuite fonction du chemin suivi par la contrainte depuis l'état vierge du matériau. Tant que la contrainte se déplace vers des cercles toujours plus grands, la position reste inchangée ; c'est le cas des chemins 1 et 2 de la figure 3. Par contre, lorsque la contrainte se dirige vers des cercles plus petits, alors la position change brutalement ou instantanément de sorte que :

- les cercles plus grands ne changent pas de position,
- les cercles plus petits se déplacent pour venir au contact du point courant représentant la contrainte, tout en respectant l'emboîtement des cercles les uns dans les autres.

Ce mouvement est illustré à la figure 4 par les chemins 3 et 4, succédant au chemin 2. Le même raisonnement est appliqué pour les chemins 5 et 6 de la figure 5, succédant au chemin 4. L'évènement décrit par ces mouvements instantanés des cercles neutres, ci-dessus

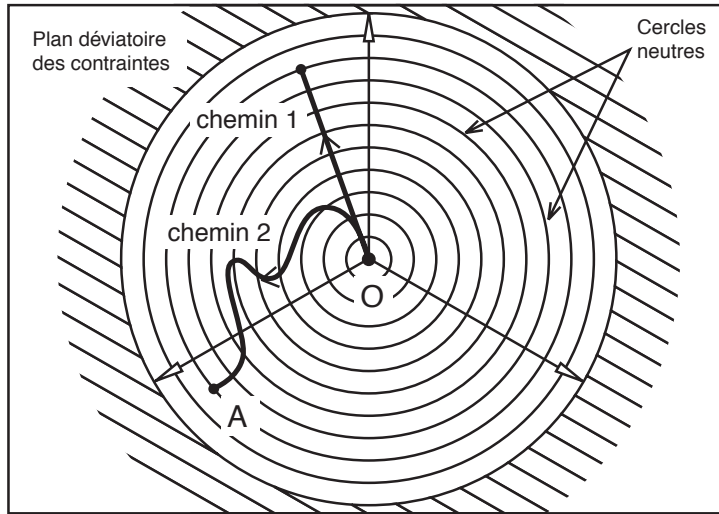


FIGURE 3 – Position des cercles neutres pour un matériau vierge de tout chargement mécanique.

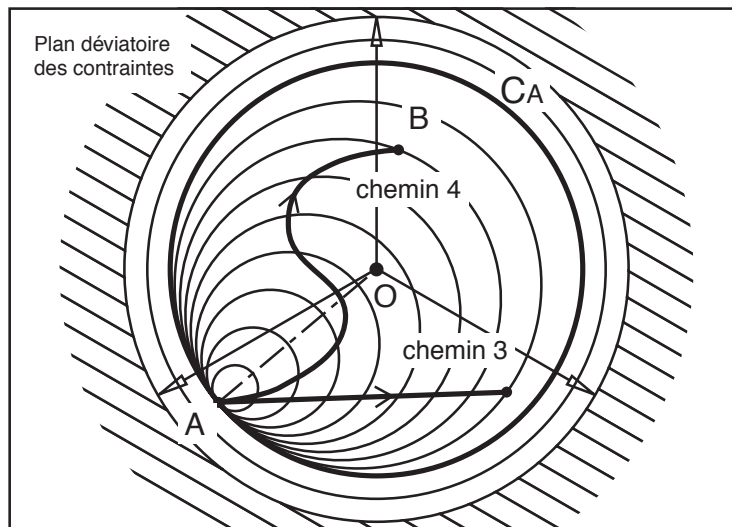


FIGURE 4 – Position des cercles neutres après une *inversion du chargement au point A*.

présentés, est appelé *inversion*, puisqu'il généralise la notion simple d'inversion du chargement mécanique dans le cas unidimensionnel, de la traction par exemple. L'algorithme de gestion de la mémoire discrète vise à mémoriser, entre autres, la contrainte à ces instants d'inversion. Elle sera alors notée par la suite

$$\bar{\sigma}_{R_i} \quad (287)$$

où  $R$  rappelle un caractère de *référence* de cette contrainte qui sera utilisée par l'équation constitutive du modèle et où  $i$  est le numéro d'ordre de l'inversion associée, indiquant

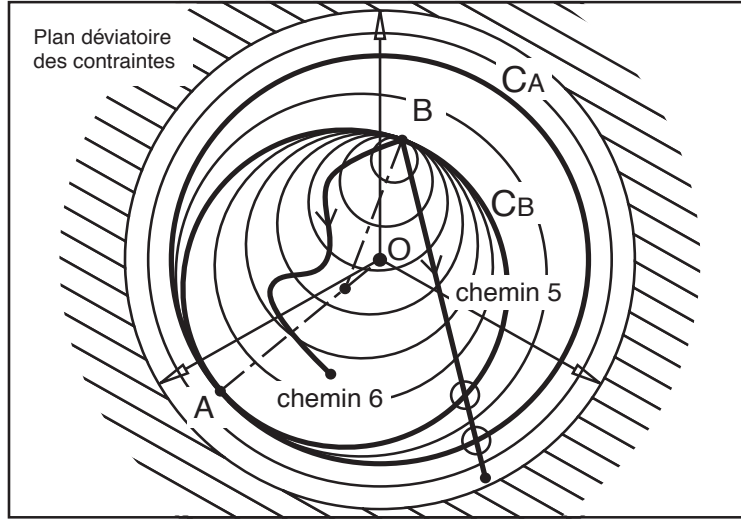


FIGURE 5 – Position des cercles neutres après deux *inversions du chargement aux points A et B*.

par là le nombre d'autres inversions précédemment mémorisées par l'algorithme. L'entier  $i$  sera 1 pour le point d'inversion A et 2 pour le point d'inversion B de la figure 5. Une autre contrainte associée à une inversion est utile à l'algorithme de mémorisation. Elle est notée

$$\bar{\sigma}_{O_i} . \quad (288)$$

Elle est la contrainte déviatoire au centre du cercle neutre à l'instant de la  $i^{\text{ème}}$  inversion ; le cercle  $C_A$  pour la première inversion et le cercle  $C_B$  pour la seconde inversion de la figure 5. Nous noterons sans numéro d'ordre  $i$

$$\bar{\sigma}_R \text{ et } \bar{\sigma}_O \quad (289)$$

les contraintes relatives à la *dernière inversion* ayant eu lieu. Enfin, nous noterons

$$\bar{\sigma}_t \text{ ( ou } \bar{\sigma} \text{ ) } , \bar{\sigma}_{O_i} \text{ et } R_t \quad (290)$$

respectivement, la contrainte déviatoire actuelle, la contrainte déviatoire au centre du cercle actuellement traversé par  $\bar{\sigma}_t$  et le rayon de ce dernier. Après les *inversions*, un second type d'évènement, appelé *coïncidence*, est privilégié par le mouvement des cercles neutres. Ces évènements ont lieu lorsque la contrainte traverse un cercle associé à une inversion précédente. Deux coïncidences arrivent lors du chemin 5 à la traversée des cercles  $C_B$  puis  $C_A$  sur la figure 5. La position des cercles neutres change alors instantanément, de sorte que :

- les cercles plus grands ne changent pas de position,
- les cercles plus petits retrouvent leur position précédant l'instant d'inversion associée au cercle traversé.

Tout se passe comme si les traces de l'inversion associée au cercle traversé sont effacées. Par exemple, sur la figure 5, lorsque la contrainte sur le chemin 5 traverse le cercle  $C_B$ ,

les cercles de rayon inférieur à  $C_B$  retrouvent leur position telles que sur la figure 4. Et de même, à la traversée du cercle  $C_A$ , les cercles plus petits retrouvent leur position de la figure 3. Le terme *première charge* désigne un chargement mécanique au cours duquel les cercles neutres sont tous concentriques autour de l'origine comme présentée à la figure 3. Un tel type de chargement est rencontré lorsque l'on commence à solliciter un matériau vierge, mais également à la suite de suffisamment de coïncidences pour effacer toute trace d'inversions précédentes. Ainsi, sur la figure 5, lors du chemin 5 et au-delà de la traversée du cercle  $C_A$ , le matériau retrouve un chargement de *première charge*. Le terme *trajet radial* désigne une portion de chemin de chargement tel que, dans le plan déviatoire de la contrainte :

- elle soit selon une ligne droite,
- cette ligne droite parte du dernier point d'inversion, autrement dit le point représentant la contrainte  $\bar{\sigma}_R$ ,
- et dans le cas particulier de la première charge, les trajets radiaux partent de l'origine du plan représentant la contrainte nulle.

Le terme dual de *radial* est *neutre*. Un trajet neutre est une portion de chemin de chargement telle que, dans le plan déviatoire de la contrainte, elle se situe sur ou le long d'un cercle neutre.

### 8.3.2 Incremental behavior law

From the outset, rheological models containing elastic and slip elements have been considered to be derived from a general pure hysteresis model ([Guélin, 1980]). The material is assumed to be isotropic and the hysteresis contribution is only deviatoric. The constitutive relation is obtained by time integration of relation :

$$\dot{\bar{\sigma}} = 2\mu\bar{D} + \beta\Phi\Delta_R^t\bar{\sigma} \quad (291)$$

avec :

$$\begin{aligned} \Phi &= \Delta_R^t\bar{\sigma} : \bar{D} - \frac{Q_{\Delta\sigma}^2 \dot{w}'}{2\mu w'} \\ \beta &= -\frac{2\mu}{(w'Q_0)^{np}(Q_{\Delta\sigma})^{2-np}} \\ Q_{\Delta\sigma} &= \sqrt{\Delta_R^t\bar{\sigma} : \Delta_R^t\bar{\sigma}} \end{aligned} \quad (292)$$

sachant que  $\Delta_R^t\bar{\sigma} = \bar{\sigma} - \bar{\sigma}_R$  et  $w' = w \cos(\alpha)$

Les notations suivantes sont utilisées :

- $R$  est un indice qui représente un instant de référence, appelé instant d'inversion du chargement,
- $t$  est le pseudo-temps courant (le temps est ici un paramètre d'avancement, son amplitude peut-être choisit de manière arbitraire, dans notre cas on le prendra variant de 0 à 1 sur un pas de temps).



La grandeur  $\Phi$  représente la dissipation intrinsèque égale à la dissipation d'origine thermique plus la dissipation d'origine entropique. La grandeur  $Q_{\Delta\sigma}$  représente la norme de l'accroissement de contrainte depuis l'instant d'inversion  $R$ .

Dans cette équation constitutive, les paramètres matériaux sont ainsi :

- $\mu$  représentant le module à l'origine du comportement en cisaillement,
- $np$  est le coefficient de Prager, qui gère le passage à la saturation,
- $Q_0$  est le seuil de saturation en cisaillement.

L'angle de phase  $\alpha$  est un angle dans le plan déviatoire de la contrainte. À condition d'interpréter  $\Delta_R^t \bar{\sigma}$  comme un vecteur dans ce plan affine allant du point représentant la contrainte  $\bar{\sigma}_R$  à la contrainte actuelle  $\bar{\sigma}$ , et aussi  $\Delta_R^O \bar{\sigma} = \bar{\sigma}_O - \bar{\sigma}_R$  comme un vecteur allant de  $\bar{\sigma}_R$  à  $\bar{\sigma}_O$ , alors  $\alpha$  est l'angle formé par ces deux vecteurs associés à  $\Delta_R^O \bar{\sigma}$  et  $\Delta_R^t \bar{\sigma}$ .

Le paramètre de Masing  $w$  vaut 1 sur le trajet de première charge et 2 sur les autres trajets. Dans le cas de trajet de chargement radiaux, la variation d'angle de phase est nulle ce qui simplifie l'équation constitutive.

Dans le cas où l'angle de phase  $\alpha$  vaut  $\Pi/2$ , le trajet est neutre, et purement réversible :

$$\dot{\bar{\sigma}} = 2\mu \bar{D}\bar{\sigma} \quad (293)$$

En retenant comme produit scalaire le produit doublement contracté et la norme associée :  $\|\mathbf{A}\| = \sqrt{\mathbf{A} : \mathbf{A}}$ , le cosinus de l'angle de phase peut être simplement représenté par la projection, dans l'espace des tenseurs, de  $\Delta_R^t \bar{\sigma}$  sur  $\Delta_R^O \bar{\sigma}$ , soit :

$$\cos(\alpha) = \frac{\Delta_R^t \bar{\sigma} : \Delta_R^O \bar{\sigma}}{\|\Delta_R^t \bar{\sigma}\| \|\Delta_R^O \bar{\sigma}\|} \quad (294)$$

**Remarque** Dans le modèle initial ([Favier, 1988a],[Pegon, 1988]) l'angle de phase  $\varphi$ , dans le plan déviatoire, entre la projection d'une direction principale et la direction du déviateur d'un tenseur  $\mathbf{B}$  était calculé à partir d'invariants à l'aide de la formule classique suivante :

$$\cos(3\varphi) = \sqrt{6} \frac{\text{tr}(\bar{\mathbf{B}} \cdot \bar{\mathbf{B}} \cdot \bar{\mathbf{B}})}{(\text{tr}(\bar{\mathbf{B}} \cdot \bar{\mathbf{B}}))^{3/2}} \quad (295)$$

Chaque angle de phase ainsi déterminé n'est connu qu'à  $\pi/3$  près ce qui complexifie la détermination de l'angle  $\alpha$  entre les deux tenseurs  $\Delta_R^t \bar{\sigma}$  et  $\Delta_R^O \bar{\sigma}$ , d'où l'utilisation dans ce travail de la formule (294) qui ne présente pas ce type de difficulté.

### 8.3.3 Choix de la dérivée objective

L'équation constitutive (291) est une équation différentielle en temps. De manière à obtenir des grandeurs intégrées objectives, il nous faut retenir un choix de dérivée temporelle objective. Nous retenons pour notre calcul, dans un premier temps, une dérivée corotationnelle de Jaumann.

$$\dot{\sigma} = \frac{1}{2}(\mathcal{L}_{v..}\sigma + \mathcal{L}_v \cdot \sigma) \quad (296)$$

**Discussion** : Ce choix n'est pas anodin pour les grandes transformations. Dans le cas où l'on utilise une mesure de déformation logarithmique, la dérivée matérielle de la déformation est très proche de la vitesse de déformation  $\mathbf{D}$  ce qui n'est pas le cas pour les autres mesures. Le fait d'utiliser par exemple la mesure de déformation de Green-Lagrange ou d'Almansi ne pose pas pour autant de problème conceptuel puisque l'équation constitutive proposée ne dépend pas explicitement de la déformation.

Cependant, dans le cas d'une cinématique complexe (en particulier rotationnelle), notons qu'il n'existe qu'un seul repère rigide par rapport auquel l'intégration de la vitesse de déformation donne une mesure de déformation, il s'agit de la mesure de déformation logarithmique. La dérivée associée n'est pas alors la dérivée de Jaumann. Néanmoins, dans le cas de faible rotation, la dérivée de Jaumann en constitue une bonne approximation.

Par contre, dans le cas d'une intégration dans un repère matériel convecté, les dérivées de Lie deux fois covariantes ou deux fois contravariantes permettent d'obtenir aisément de vraies mesures de déformation, ce qui est le cas pour la mesure d'Almansi. On voit donc que d'un point de vue cinématique, les intégrations ou dérivations dans les repères convectés sont particulièrement intéressantes. La difficulté avec l'utilisation de ces mesures de déformation réside alors dans la signification de leurs invariants. En effet, seule la mesure logarithmique permet d'isoler et comptabiliser facilement la déformation volumique par rapport à la déformation de forme. Dans tous les autres cas, l'expression représentant la variation relative de volume en fonction des invariants classiques n'est pas simple ce qui pose des problèmes particulièrement ardues en plasticité classique où le respect d'une déformation volumique plastique nulle est demandé.

Dans le cadre du comportement hystérétique proposé, le comportement irréversible est intimement lié à un comportement réversible. Ainsi, il n'y a pas de décomposition possible (ce qui est voulu d'ailleurs) entre partie plastique isovolume et partie réversible pilotant le changement de volume. Le problème de l'utilisation d'invariants "pratiques" pour la déformation, ne se pose plus. Ainsi le choix d'une mesure d'Almansi qui est de manière exacte l'intégration deux fois covariantes de  $\mathbf{D}$  ou d'une autre mesure peut dépendre d'autres critères.

Concernant le choix de la dérivée matérielle de la contrainte, il est clair qu'au-delà de considération d'objectivité, qui impose d'avoir une dérivée qui respecte ce principe, il est nécessaire de prendre de plus en compte des considérations physiques pour choisir un type de dérivée. Dans notre cas, de précédentes investigations montrent que la dérivée de Jaumann, conduit à des résultats en général satisfaisants. Mais seule une confrontation finale avec l'expérience et prenant donc en compte la physique du matériau, permettra de valider plus en avant ce choix.

Reste le problème de la cohérence entre le type de dérivée utilisée pour la contrainte et le type de déformation associée à  $\mathbf{D}$ . Si l'on considère, que le choix du type de dérivée matérielle doit également s'appuyer sur la physique du matériau, il est vraisemblable qu'il n'y a pas à chercher de cohérence entre d'une part, les dérivées qui s'appliquent à la contrainte hystérétique, et d'autre part, les dérivées qui s'appliquent à la déformation, qui elles doivent s'appuyer sur des concepts purement géométriques. De la même manière, il n'est pas obligatoire de chercher à utiliser la même mesure de déformation pour chaque contribution : visqueuse, hyperélastique, et hystérétique, à condition que toutes les mesures employées soient calculées à partir de la même géométrie initiale et finale. On utilise

ainsi, le fait qu'intrinsèquement, toutes les mesures sont équivalentes.

### 8.3.4 Algorithme de gestion de la mémoire discrète

L'algorithme présenté est différent de l'algorithme original présenté par exemple par Pierre Pégon ([Pegon, 1988]) et implanté dans la version Fortran77 d'Herezh ([Rio et al., 1995]). L'algorithme s'appuie sur les travaux développés par Guilhem Blès. En particulier, l'idée d'utiliser des hyper-sphères avec différentes bornes a été originalement proposée par Guilhem Blès. L'idée est donc de travailler directement dans l'espace des tenseurs d'ordre 2.

D'une manière analogue au chapitre (8.3.2), on introduit un produit scalaire à l'aide du produit doublement contracté " : " d'où la norme  $\|\cdot\|$  et la distance "d" associée.

Au cours d'une transformation, on introduit le tenseur  $\bar{\sigma}_{O_i}$ , représentant le centre du cercle neutre associé à la  $i^{\text{ème}}$  inversion (cf. section 8.3.1). Ce tenseur satisfait l'équation suivante dans le cas où plusieurs points d'inversions sont enregistrés :

Si  $i \geq 2$

$$d(\bar{\sigma}_{O_i}, \bar{\sigma}_{R_{i-1}}) = d(\bar{\sigma}_{O_i}, \bar{\sigma}_{R_i}) \quad (297)$$

$$\text{et } \bar{\sigma}_{O_i} = \gamma (\bar{\sigma}_{R_{i-1}} - \bar{\sigma}_{O_{i-1}}) + \bar{\sigma}_{O_{i-1}} \quad (298)$$

Pour le premier point, on pose :  $\bar{\sigma}_{O_1} = \mathbf{0}$  le tenseur nul.

En fait cette relation, dans le cas d'un espace à 2 dimensions, revient à chercher le centre du cercle passant par les deux points d'inversion successifs et situé sur la droite passant par le précédent centre et point d'inversion. Dans notre cas, nous serons en dimension 9, du fait de l'utilisation des coordonnées mixtes, ce qui conduira à des calculs un peu plus complexes, mais l'idée reste similaire.

La résolution de l'équation (298) conduit à la solution :

$$\gamma = \frac{1}{2} \left( \frac{\|(\bar{\sigma}_{R_i} - \bar{\sigma}_{O_{i-1}})\|^2 - \|(\bar{\sigma}_{R_{i-1}} - \bar{\sigma}_{O_{i-1}})\|^2}{(\bar{\sigma}_{R_{i-1}} - \bar{\sigma}_{O_{i-1}}) : (\bar{\sigma}_{R_i} - \bar{\sigma}_{R_{i-1}})} \right) \quad (299)$$

Cette équation doit toujours avoir une solution  $\gamma$  comprise entre 0 et 1 car :

- le produit  $(\bar{\sigma}_{R_{i-1}} - \bar{\sigma}_{O_{i-1}}) : (\bar{\sigma}_{R_{i-1}} - \bar{\sigma}_{R_i})$  est positif, car on se situe après un point d'inversion,
- de par l'algorithme de gestion des points d'inversions et de coïncidence, on a :

$$\begin{aligned} \|(\bar{\sigma}_{R_i} - \bar{\sigma}_{O_{i-1}})\|^2 - \|(\bar{\sigma}_{R_{i-1}} - \bar{\sigma}_{O_{i-1}})\|^2 &= (\bar{\sigma}_{R_i} - \bar{\sigma}_{R_{i-1}}) : ((\bar{\sigma}_{R_i} - \bar{\sigma}_{O_{i-1}}) + (\bar{\sigma}_{R_{i-1}} - \bar{\sigma}_{O_{i-1}})) \\ &\leq 2 \cdot (\bar{\sigma}_{R_i} - \bar{\sigma}_{R_{i-1}}) : (\bar{\sigma}_{R_{i-1}} - \bar{\sigma}_{O_{i-1}}) \end{aligned} \quad (300)$$

Ainsi le tenseur  $\bar{\sigma}_{O_i}$  est fonction de  $\bar{\sigma}_{R_i}$ ,  $\bar{\sigma}_{R_{i-1}}$  et  $\bar{\sigma}_{O_{i-1}}$  ;

$$\bar{\sigma}_{O_i} = \mathcal{F}_O(\bar{\sigma}_{R_i}, \bar{\sigma}_{R_{i-1}}, \bar{\sigma}_{O_{i-1}}), \quad (301)$$

où la fonction  $\mathcal{F}_O$  peut être déduite des relations 298 et 299.

L'algorithme utilise également le terme  $R_t$  défini à la section 8.3.1 et qui se calcule ainsi :

$$R_t = \|(\bar{\sigma}_t - \bar{\sigma}_{O_t})\| \quad \text{où} \quad \bar{\sigma}_{O_t} = \mathcal{F}_O(\bar{\sigma}_t, \bar{\sigma}_R, \bar{\sigma}_O). \quad (302)$$

Comme pour l'algorithme précédent ([Pegon, 1988]), la mémoire discrète du modèle d'hystérésis pure fonctionne comme une pile informatique. Représentons cette mémoire pour un cas où sept inversions seraient mémorisées ;

indice d'inversion $i$	0	1	2	3	4	5	6	$i_{\max} = 7$
$\bar{\sigma}_{R_i}$	$\nexists$	$\bar{\sigma}_{R_1}$	$\bar{\sigma}_{R_2}$	$\bar{\sigma}_{R_3}$	$\bar{\sigma}_{R_4}$	$\bar{\sigma}_{R_5}$	$\bar{\sigma}_{R_6}$	$\bar{\sigma}_R = \bar{\sigma}_{R_7}$
$\bar{\sigma}_{O_i}$	$\nexists$	$\bar{\sigma}_{O_1} = \mathbf{0}$	$\bar{\sigma}_{O_2}$	$\bar{\sigma}_{O_3}$	$\bar{\sigma}_{O_4}$	$\bar{\sigma}_{O_5}$	$\bar{\sigma}_{O_6}$	$\bar{\sigma}_O = \bar{\sigma}_{O_7}$
$R_i$	$\nexists$	$R_1$	$R_2$	$R_3$	$R_4$	$R_5$	$R_6$	$R_{i_{\max}} = R_7$

(303)

A chaque nouvelle mémorisation, la pile s'agrandit en ajoutant une colonne par le côté droit. L'indice  $i_{\max}$ , nombre d'inversions en mémoire, s'incrémente alors de un. Lorsqu'une inversion mémorisée doit être effacée à l'occasion d'une coïncidence (cf. section 8.3.1) la dernière colonne à droite disparaît et l'indice  $i_{\max}$  diminue de la valeur un. L'équation constitutive du modèle (éq. 291) fait intervenir l'information de la fin de la pile, c'est-à-dire la dernière colonne  $i_{\max}$ . Notons que les termes  $\bar{\sigma}_{O_i}$  et  $R_i$  peuvent ne pas être mémorisés puisqu'ils se déduisent des termes  $\bar{\sigma}_{R_i}$  par les relations suivantes :

$$\bar{\sigma}_{O_i} = \mathcal{F}_O(\bar{\sigma}_{R_i}, \bar{\sigma}_{R_{i-1}}, \bar{\sigma}_{O_{i-1}}) \quad (304)$$

$$R_i = \|(\bar{\sigma}_{R_i} - \bar{\sigma}_{O_i})\|. \quad (305)$$

L'algorithme de gestion de la mémoire discrète, proposé ici, peut alors être formulé ainsi :

**Si**  $i_{\max} = 0$  – Cas de la *première charge* ;

**Si**  $\Phi \geq 0$  – Pas d'évènement pour la mémoire discrète.

**Sinon** ( $\Phi < 0$ ) – Première inversion : incrémentation de  $i_{\max}$  ( $i_{\max} = 1$ ) et mémorisation de la contrainte actuelle  $\bar{\sigma}_R = \bar{\sigma}_{R_1} = \bar{\sigma}_t$ .

**Sinon** ( $i_{\max} \geq 1$ )

**Si**  $R_t < R_{i_{\max}}$  – Pas de coïncidence ;

**Si**  $\Phi \geq 0$  – Pas d'évènement pour la mémoire discrète, si ce n'est de garder les termes mémorisés constants au cours du temps.

**Sinon** ( $\Phi < 0$ ) – Inversion supplémentaire : incrémentation de  $i_{\max}$  ( $i_{\max} = i_{\max} + 1$ ) et mémorisation de la contrainte actuelle  $\bar{\sigma}_R = \bar{\sigma}_{R_{i_{\max}}} = \bar{\sigma}_t$ .

**Sinon** ( $R_t \geq R_{i_{\max}}$ ) – Coïncidence : effacement de la mémoire  $\bar{\sigma}_R$  et décrémentation de  $i_{\max}$  ( $i_{\max} = i_{\max} - 1$ ).

**Fin de l'algorithme.**

**Remarque** Contrairement à la gestion de la mémoire via la fonction d'aide (cf. travaux précédents [Pegon, 1988]) à chaque coïncidence, une seule mémorisation est effacée. Cependant, lors d'un trajet radial, il y a pour une même valeur d'intensité de contrainte, deux coïncidences successives qu'il faut alors détecter. Par contre, lorsque le trajet fait intervenir un angle  $\alpha$  non nul, deux coïncidences successives font intervenir des intensités de contraintes différentes.

## 9 Implantation informatique et intégration de l'équation d'avancement de la loi de comportement dans le code Herezh++

Cette partie concerne l'implantation informatique d'une loi d'élasto ou hyper-visco-hystérésis. Le comportement final intègre trois contributions : hyperélastique, viscoélastique et hystérétique. On se place dans le cadre d'une résolution de l'équilibre global par la méthode de Newton-Raphson. Cependant, ces développements s'étendent sans difficultés aux cas dynamiques d'une formulation explicite, sans calcul de raideur.

### 9.1 Partie hyperélastique

L'implantation ne pose aucune difficulté particulière. Supposons l'itération "i", la connaissance des coordonnées initiales et finales permet le calcul de la base naturelle à ces deux instants d'où l'on déduit le tenseur  $\mathbf{B}$ , à partir duquel se calcul explicitement le tenseur des contraintes hyperélastiques, ainsi que son évolution tangente.

### 9.2 Partie hystérésie

L'équation différentielle en  $t$ , pseudo-temps, est intégrée selon une méthode implicite. Dans une première étape, l'équation est linéarisée en temps ce qui conduit à une équation non linéaire en contraintes finales. Ensuite, cette équation est résolue par une méthode itérative de type Newton.

Considérons un pas de temps  $t$  vers  $t + dt$ . L'objectif est de déterminer les contraintes à  $t + dt$ , en fonction des contraintes initiales à  $t$ . Du à l'algorithme de pilotage des inversions, il sera également nécessaire de définir des grandeurs additionnelles de contrôle.

#### 9.2.1 Linéarisation temporelle

Le gradient de vitesse se décompose en deux parties : le tenseur vitesse de déformation et le tenseur vitesse de rotation (représenté par le pseudo-vecteur : le rotationnelle). De manière à linéariser l'évolution temporelle sur le pas de temps, il nous faut adopter une hypothèse cinématique. Pour notre part, nous considérerons que la vitesse de déformation est constante sur le pas de temps. Cette hypothèse revient à privilégier les mouvements de corps rigide par rapport aux mouvements de déformation. Ce choix n'est pas unique, en particulier il est possible de considérer une vitesse du déplacement sur un pas de temps constant. Cependant, de précédentes études ont montré que lorsque le pas de temps est faible, le type d'hypothèse retenu n'a a priori aucune incidence sur le résultat final. Nous retenons donc l'hypothèse la plus simple pour la linéarisation ceci en tenant compte d'un type de dérivée de Lie deux fois covariantes pour la déformation  $\mathcal{L}_{\cdot}\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D}$  où la déformation concernée est celle d'Almansi. Dans ce cas, nous avons sur un pas de temps :

$$\mathbf{D} = \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial t} \vec{g}^i \otimes \vec{g}^j \quad \rightarrow \quad \mathbf{D}_{moy} = \frac{\Delta \varepsilon_{ij}}{\Delta t} \vec{g}^i \otimes \vec{g}^j \quad (306)$$

où  $\vec{g}^i$  sont les vecteurs de la base duale à la base naturelle associée au paramétrage matériel retenu. D'une manière analogue, la dérivée temporelle de la contrainte, ici celle de Jauman, est linéarisée :

$$\dot{\sigma} = \frac{1}{2}(\mathcal{L}_{\cdot}\sigma + \mathcal{L}^{\cdot}\sigma) = \frac{1}{2}(\mathcal{L}^{\cdot}\sigma + \mathcal{L}_{\cdot}\sigma) \rightarrow \dot{\sigma}_{moy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta\sigma_{\cdot j}^i}{\Delta t}\vec{g}_i \otimes \vec{g}^j + \frac{\Delta\sigma_i^{\cdot j}}{\Delta t}\vec{g}^i \otimes \vec{g}_j\right) \quad (307)$$

Dans cette dernière expression, on peut également se servir de la symétrie formelle :  $\sigma_{\cdot j}^i = \sigma_j^{\cdot i}$

Les vecteurs de base sont ceux du temps final. Lorsqu'il y aura un risque de confusion, on indiquera le temps auquel on se réfère.

### 9.2.2 Équation constitutive linéarisée

L'équation constitutive (291) est linéarisée à partir des expressions précédentes :

$$\dot{\sigma}_{moy} = 2 \mu \bar{D}_{moy} + \beta_{moy} \Phi_{moy} \Delta_R^t \bar{\sigma}_{moy} \quad (308)$$

Les grandeurs moyennes étant les seules utilisées, dans la suite, par simplicité, nous ne mentionnerons plus indice *moy*. De plus, nous observons que le dénominateur  $\Delta t$  est en facteur pour tous les termes, ce qui est logique, il sera donc simplifié dans les différentes expressions.

De manière à simplifier le nombre de types de composantes manipulées, nous allons exprimer l'équation constitutive en composantes mixtes covariantes contravariants. Pour cela, en suivant le raisonnement proposé par Pierre Pégon [Pegon, 1988] (II.32-II.33) nous pouvons remarquer :

- qu'à chaque type de composantes, on peut associer un schéma particulier d'évolution : i.e. l'équation (308) pour chaque type de composante,
- ces deux schémas mixtes conduisent à des solutions non symétriques possédant la relation :  $\sigma_j^{i(2)} = \sigma_j^{i(1)}$ . Les indices (1) et (2) indique que chaque grandeur est issue d'une équation d'évolution distincte de l'autre. Par cohérence :  $\phi^{(1)} = \phi^{(2)}$

On pose alors :  $\sigma = 1/2(\sigma^{(1)} + \sigma^{(2)})$ , ce qui conduit à une contrainte symétrique, cohérente avec la dérivée de Jaumann.

Ainsi, il est possible d'utiliser un seul des deux schémas mixtes avec l'équation (308), par exemple pour déterminer  $\sigma_j^{i(2)}$ , à partir de laquelle la contrainte finale est obtenue selon :

$$\sigma^{ij} = \frac{1}{2} \left( \sigma_k^{i(1)} g^{kj} + \sigma_k^{j(1)} g^{ki} \right) \quad (309)$$

et le schéma retenu s'écrit :

$$\Delta\sigma_i^{\cdot j(1)} \vec{g}^i \otimes \vec{g}_j = (2 \mu \bar{D}_i^{\cdot j} \Delta t + \beta \Phi^{(1)} \Delta t \Delta_R^t \bar{\sigma}_i^{\cdot j(1)}) \vec{g}^i \otimes \vec{g}_j \quad (310)$$

Par la suite, lorsqu'il n'y aura pas de confusion, pour simplifier les expressions nous supprimons l'indice (1).

Dans le cadre d'une résolution par éléments finis avec une formulation en déplacement, en ce qui concerne la loi de comportement, la cinématique est connue à une itération

donnée de Newton-Raphson, et l'inconnue est la contrainte finale. Le problème s'écrit sous la forme d'une recherche de zéro d'une fonction scalaire non linéaire :

$$R(\Delta\sigma_i^j) = \Delta\sigma_i^j - (2 \mu \bar{\Delta}\varepsilon_i^j + \beta \Phi \Delta t \Delta_R^t \bar{\sigma}_i^j) \quad (311)$$

L'ensemble des  $\Delta$  sans indice sont à comprendre comme étant  $\Delta_t^{t+\Delta t}$ .

### 9.2.3 Résolution numérique de l'équation constitutive linéarisée

L'équation est résolue par une méthode de Newton. Tout d'abord, nous allons expliciter le calcul des différents termes du résidu.

Calculons tout d'abord  $\bar{\Delta}\varepsilon_i^j$ .

Nous considérons connu les différentes composantes du tenseur métrique et donc le terme  $\Delta\varepsilon_{ij}$  d'où :

$$\Delta\varepsilon_i^j = \Delta\varepsilon_{ik} g^{kj} \rightarrow \mathbf{I}_{\Delta\varepsilon} = \Delta\varepsilon_i^i \rightarrow \bar{\Delta}\varepsilon_i^j = \Delta\varepsilon_{ik} g^{kj} - \frac{\Delta\varepsilon_r^r}{3} g_i^j \quad (312)$$

Concernant le terme  $\Phi \Delta t$ , en utilisant l'expression précédente :

$$\begin{aligned} \Phi \Delta t &= \Delta_R^t \bar{\sigma} : \bar{\mathbf{D}} \Delta t - \frac{Q_{\Delta\sigma}^2 \dot{\omega}' \Delta t}{2 \cdot \mu \omega'} \\ &= \Delta_R^t \bar{\sigma} : \bar{\Delta}\varepsilon - \frac{Q_{\Delta\sigma}^2 \Delta\omega'}{2 \cdot \mu \omega'} \end{aligned} \quad (313)$$

Maintenant, nous nous intéressons au terme  $\beta$ .

La difficulté principale est l'obtention de  $w'$ , c'est-à-dire le calcul de l'angle de variation de phase  $\alpha$ . Pour cela nous utilisons la relation (294). Cette dernière nécessite le calcul des contraintes  $\bar{\sigma}_{o_i}$ .

La relation (294) donne directement le cosinus de l'angle de variation de phase, d'où la valeur de  $w'$ . Les relations (298) et (299) permettent d'obtenir  $\bar{\sigma}_{o_i}$  en fonction des données précédentes.

Nous avons donc ainsi de disponible tous les termes constitutifs du résidu. La mise en oeuvre de la méthode de Newton nécessite maintenant le calcul d'un opérateur tangent, ce qui permet la convergence quadratique. Pour ce faire il nous faut calculer la variation des différents termes du résidu par rapport aux composantes de la contrainte, écrite ici sous forme mixte.

### 9.2.4 Calcul de l'opérateur tangent

À partir de l'expression (311) on a :

$$\frac{\partial R(\Delta\sigma_i^j)}{\partial \Delta_R^t \sigma_k^l} = \delta_i^k \delta_l^j (1 - \beta \Phi \Delta t) - \left( \frac{\partial \beta}{\Delta_R^t \sigma_k^l} \Phi \Delta t + \beta \frac{\partial \Phi \Delta t}{\partial \Delta_R^t \sigma_k^l} \right) \Delta_R^t \bar{\sigma}_i^j \quad (314)$$

Dans cette expression le calcul de la variation de  $\Phi\Delta t$  ce déduit de l'expression (313) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial\Phi\Delta t}{\partial\Delta_R^t\sigma_k^l} = & \bar{\Delta}\varepsilon_l^k \\ & - \frac{\Delta\omega}{\mu\omega'} Q_{\Delta\sigma} \frac{\partial Q_{\Delta\sigma}}{\partial\Delta_R^t\sigma_k^l} \\ & - \frac{Q_{\Delta\sigma}^2}{2\mu} \left( \frac{\partial\Delta\omega}{\partial\Delta_R^t\sigma_k^l} \frac{1}{\omega'} - \frac{\Delta\omega}{\omega'^2} \frac{\partial\omega'}{\partial\Delta_R^t\sigma_k^l} \right) \end{aligned} \quad (315)$$

Concernant le calcul de la variation de  $\beta$ , comme pour le calcul de  $\beta$ , la difficulté principale est la variation de  $w'$  c'est-à-dire la variation du  $\cos(\alpha)$ . La relation (294) donne :

$$\frac{\partial\cos(\alpha_t)}{\partial\Delta_R^t\sigma_k^l} = \frac{\Delta_R^t\sigma_l^k}{\|\Delta_R^t\sigma\| \|\Delta_{o_i}^R\bar{\sigma}\|} \left( \frac{\Delta_R^t\sigma : \Delta_{o_i}^R\bar{\sigma}}{\|\Delta_R^t\sigma\|^2} - 1 \right) \quad (316)$$

Il nous faut également la variation de  $Q_{\Delta\sigma}$  déduite de la relation (292) :

$$\frac{\partial Q_{\Delta\sigma}}{\partial\Delta_R^t\sigma_k^l} = \frac{\Delta_R^t\sigma_l^k}{\|\Delta_R^t\sigma\|} \quad (317)$$

D'où à partir de (292), la relation finale :

$$\begin{aligned} \frac{\partial\beta}{\partial\Delta_R^t\sigma_k^l} = & 2\mu \left( \left[ \frac{np w Q_0}{(w'Q_0)^{np+1}(Q_{\Delta\sigma})^{2-np}} \right] \left( \frac{\partial\cos(\alpha_t)}{\partial\Delta_R^t\sigma_k^l} \right) \right. \\ & \left. + \left( \frac{(2-np)}{(w'Q_0)^{np}(Q_{\Delta\sigma})^{2-np+1}} \right) \left( \frac{\partial Q_{\Delta\sigma}}{\partial\Delta_R^t\sigma_k^l} \right) \right] \end{aligned} \quad (318)$$

### 9.3 Partie viscoélastique

Les équations sont linéarisées en temps, ici sur un pas de temps, suivant un schéma Euler purement implicite. Le type de dérivée se traduit via le type de transport des contraintes calculées à l'instant  $t$  et transportées à l'instant  $t + \Delta t$ .



## 10 Loi type Hooke 3D initialement orthotrope, puis entraînée

### 10.1 Relations générales

Il s'agit de la loi classique d'élasticité linéaire de Hooke en considérant un comportement initialement orthotrope. On pourra se reporter à ([Manach and Rio, 1999]) pour une présentation analogue des concepts utilisés comme base de départ. À mesure que le matériau se déforme, le comportement initialement orthotrope devient anisotrope au travers de l'utilisation d'un repère d'anisotropie matériellement entraîné. On s'intéresse tout d'abord à l'expression de la loi dans le repère d'anisotropie.

Supposons connu un repère d'orthotropie orthonormé nommé  $\vec{O}'_a$  par la suite (a= 1..3). Dans ce repère les relations classiques de comportement s'écrivent :

$$\begin{aligned}\varepsilon_{11} &= \frac{1}{E_1}(\sigma_{11} - \nu_{12}\sigma_{22} - \nu_{13}\sigma_{33}) \\ \varepsilon_{22} &= \frac{1}{E_2}(-\nu_{21}\sigma_{11} + \sigma_{22} - \nu_{23}\sigma_{33}) \\ \varepsilon_{33} &= \frac{1}{E_3}(-\nu_{31}\sigma_{11} - \nu_{32}\sigma_{22} + \sigma_{33})\end{aligned}\quad (319)$$

et

$$\varepsilon_{ab} = \frac{1}{2 \cdot G_{ab}}\sigma_{ab} \quad \text{avec} \quad a \neq b \quad (320)$$

**NB :** Remarquons que la variance des coordonnées n'a pas d'importance ici initialement, car le repère est orthonormé. Par contre, une fois déformée il faudra tenir compte de l'évolution du repère.

On suppose que l'énergie de déformation est convexe, l'orthotropie classique nécessite alors les relations de symétrie :

$$\frac{-\nu_{12}}{E_1} = \frac{-\nu_{21}}{E_2}, \quad \frac{-\nu_{13}}{E_1} = \frac{-\nu_{31}}{E_3}, \quad \frac{-\nu_{23}}{E_2} = \frac{-\nu_{32}}{E_3} \quad (321)$$

Le comportement dépend donc de 9 paramètres et d'un repère particulier d'orthotropie.

Si de plus, on souhaite que le potentiel élastique associé soit quadratique défini positif, les coefficients doivent satisfaire aux relations suivantes (cf. [Lemaitre and Chaboche, 2004]) :

$$\begin{aligned}1. -\nu_{12} \cdot \nu_{21} > 0 \quad , \quad 1. -\nu_{23} \cdot \nu_{32} > 0 \quad , \quad 1. -\nu_{13} \cdot \nu_{31} > 0 \\ 1. -\nu_{12} \cdot \nu_{23} \cdot \nu_{31} - \nu_{21} \cdot \nu_{13} \cdot \nu_{32} - -\nu_{12} \cdot \nu_{21} - \nu_{13} \cdot \nu_{31} - \nu_{23} \cdot \nu_{32} > 0\end{aligned}\quad (322)$$

En tenant compte des relations (321) :

$$\begin{aligned}1. > \nu_{12}^2 \cdot \frac{E_2}{E_1} \quad , \quad 1. > \nu_{23}^2 \cdot \frac{E_3}{E_2} \quad , \quad 1. > \nu_{13}^2 \cdot \frac{E_3}{E_1} \\ 1. - \nu_{12} \cdot \nu_{13} \cdot \nu_{23} \cdot \left( \frac{E_3}{E_1} - \frac{E_2}{E_1} \cdot \frac{E_3}{E_2} \right) - \nu_{12}^2 \cdot \frac{E_2}{E_1} - \nu_{13}^2 \cdot \frac{E_3}{E_1} - \nu_{23}^2 \cdot \frac{E_3}{E_2} > 0\end{aligned}\quad (323)$$

**Remarque** Le fait d'avoir un potentiel quadratique défini positif a plusieurs avantages. Dans le cas de petites déformations, cela garantit l'unicité de la solution. Les simulations obtenues sont conformes à de nombreux matériaux courants. Cependant, ce n'est pas a priori une condition obligatoire.

## 10.2 Transformations finies

Au cours de la transformation, on considère une évolution du repère initialement orthotrope.

Deux types de transport sont pris en compte :

- transport covariant puis normalisation des vecteurs
- transport contravariants puis normalisation des vecteurs

Le fait de normaliser les vecteurs de la base permet de garantir que les comportements dans le sens des axes d'orthotropies initiales, demeurent identiques, dans le cas où les couplages dus aux coefficients de Poisson sont négligeables. A priori ce type de comportement n'est correct que pour des déformations modérées. On se reportera à ([Manach and Rio, 1999]) pour des illustrations des limitations du modèle.

Les opérations spécifiques de type de transport sont détaillées en (13).

Les expressions 319 et 320 sont alors à utiliser dans le repère transporté  $\hat{O}'_a$ .

## 10.3 Cas seulement déviatorique ou sphérique

Le découpage en une partie déviatorique et une partie sphérique peut s'effectuer via les relations classiques en utilisant les coordonnées mixtes ce qui permet d'obtenir directement la trace puis la partie déviatorique.

$$\mathbf{I}_\sigma = \text{trace}(\boldsymbol{\sigma}) = \sigma_i^i \text{ d'où } \mathbf{S} = \boldsymbol{\sigma} - \frac{\mathbf{I}_\sigma}{3} \mathbf{Id} \quad (324)$$

## 10.4 Compressibilité et variation de volume

Contrairement au cas isotrope, la compressibilité est dépendante des directions dans lesquelles le volume change.

La compressibilité est utile pour calculer par exemple les pas de temps critique en dynamique explicite.

Dans Herezh++ deux cas sont considérés. Soit la variation de volume constatée est suffisamment grande pour pouvoir calculer la compressibilité via la définition :

$$\frac{\mathbf{I}_\sigma}{3} = -P = K_s \log \left( \frac{\text{vol}}{\text{vol}_0} \right) = K_s \times \text{variation relative de volume}$$

Soit la variation de volume est nulle et dans ce cas on considère arbitrairement les 3 directions d'orthotropie. Supposons un essai de traction simple suivant l'axe 1, dans ce cas

$$\log \left( \frac{\text{vol}}{\text{vol}_0} \right) \approx \text{trace}(\boldsymbol{\epsilon}) = \left( \frac{1}{E_1} - \frac{\nu_{21}}{E_2} - \frac{\nu_{31}}{E_3} \right) \sigma_{11} = \left( \frac{1}{E_1} - \frac{\nu_{21}}{E_2} - \frac{\nu_{31}}{E_3} \right) \text{trace}(\boldsymbol{\sigma}) \quad (325)$$

d'où :

$$K_{s1} = \left( \frac{1}{E_1} - \frac{\nu_{21}}{E_2} - \frac{\nu_{31}}{E_3} \right)^{-1} = \left( \frac{1}{E_1} - \frac{\nu_{12}}{E_1} - \frac{\nu_{13}}{E_1} \right)^{-1} \quad (326)$$

et idem pour les 2 autres directions. Au final, on retient comme valeur initiale pour la compressibilité, c'est-à-dire la compressibilité pour une déformation nulle, la moyenne dans les trois directions :

$$\begin{aligned} K_s &= \frac{1}{3} (K_{s1} + K_{s2} + K_{s3}) \\ &= \frac{1}{3} \left( \left( \frac{1}{E_1} - \frac{\nu_{21}}{E_2} - \frac{\nu_{31}}{E_3} \right)^{-1} + \left( \frac{-\nu_{12}}{E_1} + \frac{1}{E_2} - \frac{\nu_{23}}{E_2} \right)^{-1} + \left( \frac{-\nu_{13}}{E_1} - \frac{\nu_{23}}{E_2} + \frac{1}{E_3} \right)^{-1} \right) \end{aligned} \quad (327)$$

## 10.5 Opérateur tangent en déformation (transport contravariant)

On considère ici des coefficients matériels fixes où variants peu relativement aux déformations où aux degrés de liberté.

Les relations (319) et (320) donnent les variations du tenseur des contraintes dans le repère transporté.

$$\begin{aligned} d\varepsilon^{11} &= \frac{1}{E_1} (d\sigma^{11} - \nu_{12} d\sigma^{22} - \nu_{13} d\sigma^{33}) \\ d\varepsilon^{22} &= \frac{1}{E_2} (-\nu_{21} d\sigma^{11} + d\sigma^{22} - \nu_{23} d\sigma^{33}) \\ d\varepsilon^{33} &= \frac{1}{E_3} (-\nu_{31} d\sigma^{11} - \nu_{32} d\sigma^{22} + d\sigma^{33}) \end{aligned} \quad (328)$$

et

$$d\varepsilon^{ab} = \frac{1}{2 \cdot G_{ab}} d\sigma^{ab} \quad \text{avec } a \neq b \quad (329)$$

En inversant les relations, on obtient une relation linéaire à coefficients constants :

$$\frac{\partial \sigma^{ab}}{\partial \varepsilon^{cd}} = H^{ab}_{..cd} \quad (330)$$

qui s'exprime dans le repère transporté  $\hat{O}'_a$  et son dual.

Le repère n'étant pas fixe, il nous faut connaître sa variation par rapport aux repères de travail :  $\hat{g}_j$  et  $\hat{g}^j$  pour accéder à l'opérateur tangent dans le repère naturel.

À l'aide de (403) on peut calculer la variation de  $\sigma^{ab}$  (composantes dans la base convectée) par rapport aux composantes du tenseur de déformation dans la base  $\hat{g}^j$ .

$$\frac{\partial \sigma^{ab}}{\partial \varepsilon_{kl}} = \frac{\partial \sigma^{ab}}{\partial \varepsilon^{cd}} \frac{\partial \varepsilon^{cd}}{\partial \varepsilon_{kl}} = H^{ab}_{..cd} \frac{\partial \varepsilon^{cd}}{\partial \varepsilon_{kl}} \quad (331)$$

Par définition nous avons dans le sens inverse, c'est-à-dire du repère d'orthotropie convecté vers la base de travail cf. 13.3 :

$$\hat{g}_j = \beta'^b_j \hat{O}'_b \quad \text{et} \quad \hat{g}^j = \gamma'^j_b \hat{O}^b$$

dans cette transformation  $[\beta'^j_b]^T$  joue le rôle de  $[\gamma'^j_b]$  :

$$[\gamma'^j_b] = [\beta'^j_b]^T \quad \text{ou encore } \gamma'^j_b = \beta'^j_b$$

Nous avons :

$$\sigma^{ij} = \gamma'^i_{.a} \sigma^{ab} \gamma'^j_{.b} \text{ ou bien } [\sigma^{ij}] = [\gamma'^i_{.a}] \sigma^{ab} [\gamma'^j_{.b}]^T \text{ ou encore } [\sigma^{ij}] = [\beta_a^i]^T \sigma^{ab} [\beta_b^j] \quad (332)$$

d'où :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma^{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}} &= \frac{\partial \gamma'^i_{.a}}{\partial \varepsilon_{kl}} \sigma^{ab} \gamma'^j_{.b} + \gamma'^i_{.a} \frac{\partial \sigma^{ab}}{\partial \varepsilon_{kl}} \gamma'^j_{.b} + \gamma'^i_{.a} \sigma^{ab} \frac{\partial \gamma'^j_{.b}}{\partial \varepsilon_{kl}} \\ &= \frac{\partial \beta_a^i}{\partial \varepsilon_{kl}} \sigma^{ab} \beta_b^j + \beta_a^i \frac{\partial \sigma^{ab}}{\partial \varepsilon_{kl}} \beta_b^j + \beta_a^i \sigma^{ab} \frac{\partial \beta_b^j}{\partial \varepsilon_{kl}} \end{aligned} \quad (333)$$

que l'on peut calculer à l'aide des relations ( 391,331 et 403).

### Remarque

Dans le cas où on voudrait les variations du tenseur des contraintes dans le repère,  $\hat{g}^j$  nous devrions utiliser la variation de l'inverse de la matrice de passage  $\beta_a^i$ .

$$\sigma_{ij} = \beta'^a_i \sigma_{ab} \beta'^b_j = \gamma^a_i \sigma_{ab} \gamma^b_j \quad (334)$$

d'où :

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}} = \frac{\partial \beta'^a_i}{\partial \varepsilon_{kl}} \sigma_{ab} \beta'^b_j + \beta'^a_i \frac{\partial \sigma_{ab}}{\partial \varepsilon_{kl}} \beta'^b_j + \beta'^a_i \sigma_{ab} \frac{\partial \beta'^b_j}{\partial \varepsilon_{kl}} \quad (335)$$

que l'on peut calculer à l'aide des relations ( 398,331 et 403).

## 10.6 Opérateur tangent en degré de liberté (transport contra-variant)

Comme pour le cas précédent, on considère ici des coefficients matériels fixes où variants peu relativement aux degrés de liberté.

Les relations (319) et (320) donnent les variations du tenseur des contraintes dans le repère transporté.

$$\begin{aligned} d\varepsilon^{11} &= \frac{1}{E_1} (d\sigma^{11} - \nu_{12} d\sigma^{22} - \nu_{13} d\sigma^{33}) \\ d\varepsilon^{22} &= \frac{1}{E_2} (-\nu_{21} d\sigma^{11} + d\sigma^{22} - \nu_{23} d\sigma^{33}) \\ d\varepsilon^{33} &= \frac{1}{E_3} (-\nu_{31} d\sigma^{11} - \nu_{32} d\sigma^{22} + d\sigma^{33}) \end{aligned} \quad (336)$$

et

$$d\varepsilon^{ab} = \frac{1}{2} \frac{d\sigma^{ab}}{G_{ab}} \text{ avec } a \neq b \quad (337)$$

En inversant les relations, on obtient une relation linéaire à coefficients constants :

$$\frac{\partial \sigma^{ab}}{\partial \varepsilon^{cd}} = H^{ab}_{..cd} \quad (338)$$

qui s'exprime dans le repère transporté  $\hat{O}'_a$  et son dual.

Ces repères n'étant pas fixe, il nous faut connaître leurs variations .

D'où la variation des composantes contravariantes du tenseur des contraintes dans le repère entraîné :

$$\frac{\partial \sigma^{ab}}{\partial ddl} = \frac{\partial \sigma^{ab}}{\partial \varepsilon^{cd}} \frac{\partial \varepsilon^{cg}}{\partial ddl} = H^{ab}_{..cd} \frac{\partial \varepsilon^{cg}}{\partial ddl} \quad (339)$$

et par définition nous avons dans le sens inverse, c'est-à-dire du repère d'orthotropie convecté vers la base de travail cf. 417 :

$$\hat{g}_j = \beta'^b_j \hat{O}'_b \quad \text{et} \quad \hat{g}^j = \gamma'^j_b \hat{O}^b \quad (340)$$

dans cette transformation  $[\beta'^b_j]^T$  joue le rôle de  $[\gamma'^j_b]$  :

$$[\gamma'^j_b] = [\beta'^b_j]^T \quad (341)$$

Nous avons :

$$\sigma^{ij} = \gamma'^i_a \sigma^{ab} \gamma'^j_b \quad (342)$$

d'où :

$$\frac{\partial \sigma^{ij}}{\partial ddl} = \frac{\partial \gamma'^i_a}{\partial ddl} \sigma^{ab} \gamma'^j_b + \gamma'^i_a \frac{\partial \sigma^{ab}}{\partial ddl} \gamma'^j_b + \gamma'^i_a \sigma^{ab} \frac{\partial \gamma'^j_b}{\partial ddl} \quad (343)$$

que l'on peut calculer à l'aide des relations (405, 339 et 424).

## 10.7 Tests

On considère des tests académiques de traction et cisaillement, avec un seul élément, puis avec un groupe d'éléments. On utilise 3 types d'algorithme :

- implicite quasi-statique et Newton-Raphson, avec l'opérateur tangent direct par rapport aux degrés de liberté.
- Implicite quasi-statique et Newton-Raphson, avec l'opérateur tangent par rapport aux déformations. Cet opérateur est également nécessaire pour l'application des contraintes planes et doublement planes ainsi que pour le critère pli.
- Implicite quasi-statique et relaxation dynamique. Est également représentatif des calculs en explicite.

On regarde :

- la convergence en nombre d'itération,
- le résultat final,
- les temps de calcul.

On se place en petites transformations et on cherche à retrouver un comportement isotrope classique.

Maillage 1 : un cube de 100x100x100 mm, un seul élément : hexaèdre linéaire à 8 points d'intégration. Maillage 2 : un prisme de dimension : 100 x 10 x 40 mm, 5 x 4 x 3 elements ) mm, hexaèdre linéaire à 8 points d'intégration.

Loi isoélastique : E=100000 MPa,  $\nu = 0.3$  Déplacement imposé : 0.1%

Loi ortho-entraînée : (cf. mise en données Herezh++, manuel de l'utilisateur)

```

E1= 100000 E2= 100000 E3= 100000 \
nu12= 0.3 nu13= 0.3 nu23= 0.3\
G12= 3.8462e+04 G13= 3.8462e+04 G23= 3.8462e+04

```

**Essai de traction en implicite, méthode de Newton, opérateur tangent direct :**

Maillage constitué d'une seule hexaèdre, avec une direction d'anisotropie à 45° dans le plan xy

```

fct_repere1  FONCTION_EXPRESSION_LITTERALE_nD
fct= 1. , 1. , 0. , -1. , 1. , 0.
fin_parametres_fonction_expression_litterale_

```

précision demandée pour la convergence : 1.e-5,

TABLE 1 – Anisotropie à 45° dans le plan xy, 1 élément,  $d\sigma/d\text{ddd}$

traction selon x	isoelas	ortho
nb iteration	2	2
résidu final	4.57928e-07	0.0878818
résidu relatif	1.83556e-12	3.52262e-07
max force int	249476	249478
temps cpu loi	8 mls	56 mls
$\sigma$	9.985019975019e+01	9.985096120342e+01
traction selon z	isoelas	ortho
nb iteration	2	2
résidu final	5.15967e-07	0.0387284
résidu relatif	2.0682e-12	1.55239e-07
max force int	249476	249476
temps cpu loi	8 mls	52 mls
$\sigma$	9.985019975019e+01	9.985020903861e+01
traction selon y	isoelas	ortho
nb iteration	2	2
résidu final	4.98684e-07	0.0878818
résidu relatif	1.99893e-12	3.52262e-07
max force int	249476	249478
temps cpu loi	8 mls	52 mls
$\sigma$	9.985019975019e+01	9.985096120342e+01

Avec une direction d'anisotropie selon les axes de travail :

On introduit un maillage plus dense :

```

# prisme de dimension : 100 x 10 x 40 ( 5 x 4 x 3 elements 360 ddl)
# geometrie prismatique, decoupage en hexaedre(s), interpolation lineaire.

```

TABLE 2 – traction selon x , anisotropie à 0° dans le plan xy, 1 élément,  $d\sigma/d\text{ddd}$

	isoelas	ortho
nb iteration	2	2
résidu final	4.57928e-07	0.0387284
résidu relatif	1.83556e-12	1.55239e-07
max force int	249476	249476
temps cpu loi	8 mls	56 mls
$\sigma$	9.985019975019e+01	9.985020903861e+01

TABLE 3 – traction , anisotropie à 0° dans le plan xy, 5 x 4 x 3 elements,  $d\sigma/d\text{ddd}$

selon x	isoelas	ortho
nb iteration	3	3
résidu final	0.000276869	0.000139263
résidu relatif	8.32352e-08	4.18668e-08
max force int	3326.35	3326.35
<b>temps cpu loi :</b>		
version avec verif	666 mls	3811 mls
version rapide	325 mls	2519 mls
$\sigma$	9.985019871731e+01	9.985019942661e+01

On reporte arbitrairement la contrainte du point d'intégration 1 à l'élément 1.

**Essai de cisaillement en implicite, méthode de Newton, opérateur tangent direct :**

Avec une direction d'anisotropie selon les axes de travail :

TABLE 4 – Cisaillement selon xy , anisotropie à 0° dans le plan xy, 5 x 4 x 3 elements,  $d\sigma/ddd$

	isoelas	ortho
nb iteration	2	2
résidu final	0.00994687	0.00285352
résidu relatif	6.54477e-06	1.87724e-06
max force int	1519.82	1520.06
temps cpu loi	493 mls	2771 mls
$\tau$	1.276326415303e+01	1.276563302249e+01

TABLE 5 – Cisaillement selon xy , anisotropie à 45° dans le plan xy, 5 x 4 x 3 elements,  $d\sigma/ddd$

	isoelas	ortho
nb iteration	2	3
résidu final	0.00994687	6.34098e-06
résidu relatif	6.54477e-09	4.17223e-09
max force int	1519.82	1519.81
temps cpu loi	493 mls	3668 mls
$\tau$	1.276326415303e+01	1.276322799760e+01

**Essai de cisaillement en implicite, méthode de Newton, opérateur tangent par rapport aux déformations :**

Avec une direction d'anisotropie selon les axes de travail :

**Conclusions sur Newton :**

- Newton : on retrouve globalement le même type de convergence entre les deux comportements,
- les temps de calcul avec la loi orthotrope entraîné est plus important que celui de la loi de Hooke qui est la plus simple des lois.
  - dans le cas d'un opérateur tangent direct par rapport aux ddl (situation par défaut dans Herezh), On observe un rapport de temps de 6 pour la version avec vérification et 8 pour la version rapide.
  - dans le cas d'un opérateur tangent par rapport aux déformations (il faut utiliser les options : `LOI_ADDITIVE_EN_SIGMA` et `tangent_ddl_via_eps= 1`, cf. documentation utilisateur), le rapport de temps est d'environ 2 pour la version avec



TABLE 6 – Cisaillement selon xy , anisotropie à 0° dans le plan xy, 5 x 4 x 3 elements,  $d\sigma/d\varepsilon$

	isoelas	ortho
nb iteration	2	2
résidu final	0.00994687	0.0024875
résidu relatif	6.54477e-06	1.63645e-09
max force int	1519.82	1520.06
<b>temps cpu loi :</b>		
version avec verif	496 mls	715 mls
version rapide	239	236
$\tau$	1.276326415303e+01	1.276563258827e+01

TABLE 7 – Cisaillement selon xy , anisotropie à 45° dans le plan xy, 5 x 4 x 3 elements

	isoelas	ortho
nb iteration	2	3
résidu final	0.00994687	2.63335e-06
résidu relatif	6.54477e-09	1.73269e-09
max force int	1519.82	1519.81
<b>temps cpu loi :</b>		
version avec verif	495 mls	951 mls
version rapide	247	339
$\tau$	1.276326415303e+01	1.276322799850e+01

vérification, et 1.5 ou 1 (cf. essai de cisaillement) pour la version rapide, ce qui est remarquable compte tenu de la complexité de la loi d'orthotropie entraînée.

— les contraintes finales sont identiques à la précision près.

**Essai de cisaillement en implicite, méthode de relaxation dynamique, opérateur tangent par rapport aux déformations :**

Pour limiter le temps de calcul, on réduit la précision relative à 1.e-4

TABLE 8 – Cisaillement selon xy , anisotropie à 0° dans le plan xy, 5 x 4 x 3 elements,  $d\sigma/d\varepsilon$

	isoelas	ortho $d\sigma/d\varepsilon$	ortho $d\sigma/dddl$
nb iteration	1886	1886	1886
résidu final	0.18643	0.186426	0.186426
résidu relatif	0.000122501	0.000122479	0.000122479
max force int	1521.87	1520.06	1522.11
<b>temps cpu loi :</b>			
version avec verif	46232 mls	79212 mls	79837
version rapide	15585	33966	35119
$\tau$	1.274969193150e+01	1.275202798889e+01	1.275202802867e+01

**Remarque :** les résidus et force int indiqués sont récupéré au dernier affichage : ici 1850, d'où une précision relative qui n'est pas encore celle demandée.

**Conclusions sur la relaxation dynamique :**

- les convergences sont identiques entre élasticité et ortho-entraînée,
- Dans le cas où on utilise la loi 3D avec l'opérateur tangent direct  $d\sigma/dddl$ , on obtient un temps cpu avec la version rapide de 35119 qui est très proche de celle avec l'opérateur  $d\sigma/d\varepsilon$ , ce qui est logique compte tenu que cet opérateur n'est pas utilisé en relaxation dynamique. Par contre cela montre que l'encapsulage de la loi ortho-entraînée dans une loi additive ne modifie pas le temps de calcul (ou très peu).
- en version rapide ou avec vérification, on observe un temps cpu 2 fois plus important en ortho-entraînée par rapport à l'élasticité classique, ce qui semble correct compte tenu de la complexité de la loi ortho-entraînée
- les contraintes finales sont identiques à la précision près.

# 11 Loi type Hooke 2D CP, initialement orthotrope, puis entraînée

## 11.1 Relations générales

On suit un raisonnement analogue à celui développé en 3D, mais en intégrant une condition de contrainte plane dans la direction 3, qui est supposée normale au plan dans lequel les contraintes sont non nulles. Les notations sont identiques au cas 3D (voir 10 pour plus de précision).

**Remarque importante** : on considère que le repère d'orthotropie initial est tel que :

- les deux premiers vecteurs sont coplanaires avec la base de travail  $\vec{g}_\alpha$ ,  $\alpha = 1, 2$
- le troisième vecteur est normal au deux premiers.

L'état de contrainte plane se traduit par la nullité des composantes de contrainte  $\sigma_{i3}$  et en utilisant les relations 3D : (319) on obtient :

$$\begin{aligned}\varepsilon_{11} &= \frac{1}{E_1}(\sigma_{11} - \nu_{12}\sigma_{22}) \\ \varepsilon_{22} &= \frac{1}{E_2}(-\nu_{21}\sigma_{11} + \sigma_{22}) \\ \varepsilon_{33} &= \frac{1}{E_3}(-\nu_{31}\sigma_{11} - \nu_{32}\sigma_{22}) = \frac{-\nu_{13}\sigma_{11}}{E_1} + \frac{-\nu_{23}\sigma_{22}}{E_2}\end{aligned}\quad (344)$$

et

$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{2 \cdot G_{12}}\sigma_{12}\quad (345)$$

**NB** : Remarquons que la variance des coordonnées n'a pas d'importance ici initialement, car le repère est orthonormé. Par contre, une fois déformée il faudra tenir compte de l'évolution du repère.

Comme pour le cas 3D, on suppose que l'énergie de déformation est convexe, l'orthotropie classique nécessite alors les relations de symétrie (321).

Au final le comportement dépend de 6 paramètres et d'un repère particulier d'orthotropie. En effet, par rapport au cas 3D, les paramètres  $E_3$ ,  $G_{13}$  et  $G_{23}$  ne sont plus nécessaires.

Si de plus, on souhaite que le potentiel élastique associé soit quadratique défini positif, les coefficients doivent également satisfaire aux relations suivantes (322).

**Remarque identique au cas 3D** : Le fait d'avoir un potentiel quadratique défini positif a plusieurs avantages. Dans le cas de petites déformations, cela garantit l'unicité de la solution. Les simulations obtenues sont conformes à de nombreux matériaux courants. Cependant, ce n'est pas a priori une condition obligatoire.

Les relations (344) concernent 3 déformations et 2 contraintes. Il est donc possible d'exprimer une des déformations par rapport aux deux autres. On a tout d'abord avec les 2 premières relations :

$$\sigma_{11} = \frac{E_1}{(1 - \nu_{12} \nu_{21})} (\varepsilon_{11} + \nu_{21} \varepsilon_{22}) \text{ et } \sigma_{22} = \frac{E_2}{(1 - \nu_{12} \nu_{21})} (\nu_{12} \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22})\quad (346)$$

d'où avec la troisième relation :

$$\varepsilon_{33} = -\frac{1}{1 - \nu_{12} \cdot \nu_{21}} [(\nu_{13} + \nu_{23} \cdot \nu_{12}) \varepsilon_{11} + (\nu_{23} + \nu_{13} \cdot \nu_{21}) \varepsilon_{22}] \quad (347)$$

Ainsi la déformation d'épaisseur est une conséquence de la loi de comportement et de la déformation dans le plan des contraintes planes.

Dans la mise en données pour Herezh, on utilise la symétrie des paramètres matériaux :  $\nu_{12}/E_1 = \nu_{21}/E_2$  d'où  $\nu_{21} = \nu_{12}E_2/E_1$ , ce qui permet une mise en données avec 6 paramètres matériaux.

## 11.2 Transformations finies

Identiques à (10.2).

## 11.3 Cas seulement déviatorique ou sphérique

Le découpage en une partie déviatorique et une partie sphérique peut s'effectuer via les relations classiques en utilisant les coordonnées mixtes ce qui permet d'obtenir directement la trace puis la partie déviatorique.

$$\mathbf{I}_\sigma = trace(\boldsymbol{\sigma}) = \sigma_\alpha^\alpha \quad \text{d'où} \quad \mathbf{S} = \boldsymbol{\sigma} - \frac{\mathbf{I}_\sigma}{3} \mathbf{Id} \quad (348)$$

avec ici en contrainte plane,  $\alpha = 1,2$

## 11.4 Compressibilité et variation de volume

Contrairement au cas isotrope, la compressibilité est dépendante des directions dans lesquelles le volume change.

La compressibilité est utile pour calculer par exemple les pas de temps critique en dynamique explicite.

Dans Herezh++ deux cas sont considérés. Soit la variation de volume constatée est suffisamment grande pour pouvoir calculer la compressibilité via la définition :

$$\frac{\mathbf{I}_\sigma}{3} = -P = K_s \log \left( \frac{vol}{vol_0} \right) = K_s \times \text{variation relative de volume}$$

Sachant que dans cette variation de volume, la variation d'épaisseur est une conséquence de la déformation dans le plan. Au moment du calcul des contraintes, on ne dispose en entrée que de la cinématique plane et de sa variation dans le plan des contraintes planes, c'est-à-dire  $\frac{surf}{surf_0}$  où "surf" est la surface associée au point d'intégration où l'on calcule la contrainte. On se sert alors de (347) pour compléter la variation de volume.

Soit la variation de volume est nulle et dans ce cas on considère arbitrairement les 3 directions d'orthotropie et on considère un essai de traction simple suivant chaque direction, ce qui permet d'obtenir la formule 3D (328).

## 11.5 Opérateur tangent en déformation (transport contravariant)

On considère ici des coefficients matériels fixes où variants peu relativement aux déformations où aux degrés de liberté.

Les relations (344), (345) et (347) donnent les variations du tenseur des contraintes dans le repère transporté.

$$\begin{aligned}
 d\varepsilon^{11} &= \frac{1}{E_1}(d\sigma^{11} - \nu_{12} d\sigma^{22}) \\
 d\varepsilon^{22} &= \frac{1}{E_2}(-\nu_{21} d\sigma^{11} + d\sigma^{22}) \\
 d\varepsilon_{33} &= -\frac{1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} [(\nu_{13} d\varepsilon_{11} + \nu_{23}\nu_{12}) + (\nu_{23} + \nu_{13}\nu_{21}) d\varepsilon_{22}] \quad (349)
 \end{aligned}$$

et

$$d\varepsilon^{12} = \frac{1}{2 \cdot G_{12}} d\sigma^{12} \quad (350)$$

En inversant les relations, on obtient une relation linéaire à coefficients constants :

$$\frac{\partial \sigma^{\alpha\beta}}{\partial \varepsilon^{\gamma\delta}} = H^{\alpha\beta}_{\cdot\cdot\gamma\delta} \quad (351)$$

qui s'exprime dans le repère transporté  $\hat{O}'_\alpha$  et son dual.

**NB :** Les lettres grecques varient uniquement de 1 à 2

Le repère n'étant pas fixe, il nous faut connaître sa variation par rapport aux repères de travail :  $\hat{g}_\alpha$  et  $\hat{g}^\alpha$  pour accéder à l'opérateur tangent dans le repère naturel.

Notons que du fait des types de transport envisagés, les deux premiers vecteurs du repère d'anisotropie, qui définissent en fait le plan d'anisotropie transporté, restent à tous moments dans le plan des contraintes planes. Les variations du plan d'anisotropie ne dépendent que de la déformation dans le plan des conditions de contraintes planes. On obtient donc au final les mêmes relations qu'en 3D (cf. 448), mais avec des indices variant de 1 à 2, c'est-à-dire relatifs à ce qui se passe dans le plan des contraintes planes.

À l'aide de (367) on peut calculer la variation de  $\sigma^{\alpha\beta}$  (composantes dans la base convectée) par rapport aux composantes du tenseur de déformation dans la base  $\hat{g}^\eta$ .

$$\frac{\partial \sigma^{\alpha\beta}}{\partial \varepsilon_{\eta\theta}} = \frac{\partial \sigma^{\alpha\beta}}{\partial \varepsilon^{\gamma\delta}} \frac{\partial \varepsilon^{\gamma\delta}}{\partial \varepsilon_{\eta\theta}} = H^{\alpha\beta}_{\cdot\cdot\gamma\delta} \frac{\partial \varepsilon^{\gamma\delta}}{\partial \varepsilon_{\eta\theta}} \quad (352)$$

et au final de manière similaire au cas 3D on obtient :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \sigma^{\alpha\beta}}{\partial \varepsilon_{\gamma\delta}} &= \frac{\partial \gamma'^{\alpha}_{\cdot\eta}}{\partial \varepsilon_{\gamma\delta}} \sigma^{\eta\theta} \gamma'^{\beta}_{\cdot\theta} + \gamma'^{\alpha}_{\cdot\eta} \frac{\partial \sigma^{\eta\theta}}{\partial \varepsilon_{\gamma\delta}} \gamma'^{\beta}_{\cdot\theta} + \gamma'^{\alpha}_{\cdot\eta} \sigma^{\eta\theta} \frac{\partial \gamma'^{\beta}_{\cdot\theta}}{\partial \varepsilon_{\gamma\delta}} \\
 &= \frac{\partial \beta^{\alpha}_{\cdot\eta}}{\partial \varepsilon_{\gamma\delta}} \sigma^{\eta\theta} \beta^{\beta}_{\cdot\theta} + \beta^{\alpha}_{\cdot\eta} \frac{\partial \sigma^{\eta\theta}}{\partial \varepsilon_{\gamma\delta}} \beta^{\beta}_{\cdot\theta} + \beta^{\alpha}_{\cdot\eta} \sigma^{\eta\theta} \frac{\partial \beta^{\beta}_{\cdot\theta}}{\partial \varepsilon_{\gamma\delta}} \quad (353)
 \end{aligned}$$

que l'on peut calculer à l'aide des relations (391,368 et 403). Les relations (391 et 403) sont ici restreintes au plan d'anisotropie, les indices ne variants que de 1 à 2.

## 11.6 Opérateur tangent en degré de liberté (transport contra-variant)

Comme pour le cas précédent, on considère ici des coefficients matériels fixes où variants peu relativement aux degrés de liberté.

Les relations (344) et (345) donnent les variations du tenseur des contraintes dans le repère transporté (365 et 366)

$$\begin{aligned} d\varepsilon^{11} &= \frac{1}{E_1} (d\sigma^{11} - \nu_{12} d\sigma^{22} - \nu_{13} d\sigma^{33}) \\ d\varepsilon^{22} &= \frac{1}{E_2} (-\nu_{21} d\sigma^{11} + d\sigma^{22} - \nu_{23} d\sigma^{33}) \\ d\varepsilon_{33} &= -\frac{1}{1 - \nu_{12} \cdot \nu_{21}} [(\nu_{13} + \nu_{23} \cdot \nu_{12}) d\varepsilon_{11} + (\nu_{23} + \nu_{13} \cdot \nu_{21}) d\varepsilon_{22}] \end{aligned}$$

et

$$d\varepsilon^{12} = \frac{1}{2 \cdot G_{12}} d\sigma^{12}$$

En inversant les relations, on obtient une relation linéaire à coefficients constants (367) qui s'exprime dans le repère transporté  $\hat{O}'_\alpha$  et son dual.

Ces repères n'étant pas fixe, il nous faut connaître leurs variations .

D'où la variation des composantes contravariantes du tenseur des contraintes dans le repère entraîné :

$$\frac{\partial \sigma^{\alpha\beta}}{\partial ddl} = \frac{\partial \sigma^{\alpha\beta}}{\partial \varepsilon^{\eta\theta}} \frac{\partial \varepsilon^{\eta\theta}}{\partial ddl} = H^{\alpha\beta}_{\cdot\eta\theta} \frac{\partial \varepsilon^{\eta\theta}}{\partial ddl} \quad (354)$$

et par définition nous avons dans le sens inverse, c'est-à-dire du repère d'orthotropie convecté vers la base de travail cf. 417 :

$$\hat{g}_\alpha = \beta'^\gamma_\alpha \hat{O}'_\gamma \quad \text{et} \quad \hat{g}^\alpha = \gamma'^\alpha_{\cdot\gamma} \hat{O}'^\gamma \quad (355)$$

dans cette transformation  $[\beta'_\alpha{}^\gamma]^T$  joue le rôle de  $[\gamma'^\alpha_{\cdot\gamma}]$  :

$$[\gamma'^\alpha_{\cdot\gamma}] = [\beta'_\alpha{}^\gamma]^T \quad (356)$$

Nous avons :

$$\sigma^{\alpha\beta} = \gamma'^\alpha_{\cdot\eta} \sigma^{\eta\gamma} \gamma'^\beta_{\cdot\gamma} \quad (357)$$

d'où :

$$\frac{\partial \sigma^{\alpha\beta}}{\partial ddl} = \frac{\partial \gamma'^\alpha_{\cdot\eta}}{\partial ddl} \sigma^{\eta\theta} \gamma'^\beta_{\cdot\theta} + \gamma'^\alpha_{\cdot\eta} \frac{\partial \sigma^{\eta\theta}}{\partial ddl} \gamma'^\beta_{\cdot\theta} + \gamma'^\alpha_{\cdot\eta} \sigma^{\eta\theta} \frac{\partial \gamma'^\beta_{\cdot\theta}}{\partial ddl} \quad (358)$$

que l'on peut calculer à l'aide des relations (405, 370 et 424). Les relations (405 et 424) sont ici restreintes au plan d'anisotropie, les indices ne variants que de 1 à 2.

## 12 Loi hypoélastique 3D et 2D CP, initialement orthotrope, puis entraînée

### 12.1 Relations générales

Les relations utilisées sont déduites du comportement orthotrope 3D et 2D CP entraînée en suivant une démarche analogue au comportement hypoélastique isotrope (cf. 5). Dans le cas 2D CP, la direction 3 est supposée normale au plan dans lequel les contraintes sont non nulles. Les notations sont identiques au cas 3D et 2D CP (voir 10 et 11 pour plus de précision).

Le comportement est incrémental. On suppose connue l'état de contrainte au temps "t" et on cherche l'état de contrainte au temps "t + Δt".

Dans le repère d'anisotropie  $\vec{O}'_a$  les relations incrémentales s'écrivent en 3D par exemple en 2 fois covariants :

$$\begin{aligned} d\varepsilon_{11} &= \frac{1}{E_1}(d\sigma_{11} - \nu_{12}d\sigma_{22} - \nu_{13}d\sigma_{33}) \\ d\varepsilon_{22} &= \frac{1}{E_2}(-\nu_{21}d\sigma_{11} + d\sigma_{22} - \nu_{23}d\sigma_{33}) \\ d\varepsilon_{33} &= \frac{1}{E_3}(-\nu_{31}d\sigma_{11} - \nu_{32}d\sigma_{22} + d\sigma_{33}) \end{aligned} \quad (359)$$

et

$$d\varepsilon_{ab} = \frac{1}{2 \cdot G_{ab}} d\sigma_{ab} \quad \text{avec } a \neq b \quad (360)$$

En contrainte plane, sachant que la condition de contrainte plane est satisfaite à l'état initiale "t", cela impose que l'incrément de contraintes  $d\sigma_{33} = 0$ . L'axe 3 étant normé et normal aux deux autres vecteurs, la relation est vrai, quelque soit la variance choisie et quelque soit le type de transport qui utilise l'axe 3.

Les relations deviennent :

$$\begin{aligned} d\varepsilon_{11} &= \frac{1}{E_1}(d\sigma_{11} - \nu_{12}d\sigma_{22}) \\ d\varepsilon_{22} &= \frac{1}{E_2}(-\nu_{21}d\sigma_{11} + d\sigma_{22}) \\ d\varepsilon_{33} &= \frac{1}{E_3}(-\nu_{31}d\sigma_{11} - \nu_{32}d\sigma_{22}) = \frac{-\nu_{13}d\sigma_{11}}{E_1} + \frac{-\nu_{23}d\sigma_{22}}{E_2} \end{aligned} \quad (361)$$

et

$$d\varepsilon_{12} = \frac{1}{2 \cdot G_{12}} d\sigma_{12} \quad (362)$$

On suppose que l'incrément d'énergie de déformation est convexe ce qui permet d'utiliser les relations de symétrie (321). Dans le cas où les coefficients de la loi de comportement restent fixes, on retrouvera une énergie globale convexe.

Au final le comportement dépend de 9 paramètres en 3D et 7 paramètres en 2D CP, et d'un repère particulier d'orthotropie. Toujours en suivant une démarche analogue aux cas élastiques, si de plus, on souhaite que le potentiel élastique associé soit quadratique défini positif, les coefficients doivent également satisfaire aux relations suivantes (322).

**Remarque identique au cas 3D :** Le fait d'avoir un potentiel quadratique défini positif a plusieurs avantages. Dans le cas de petites déformations, cela garantit l'unicité de la solution. Les simulations obtenues sont conformes à de nombreux matériaux courants. Cependant, ce n'est pas a priori une condition obligatoire.

Dans le cas 2D CP, il est possible d'exprimer l'incrément de déformation d'épaisseur en fonction des déformations dans le plan :

$$d\varepsilon_{33} = -\frac{1}{1 - \nu_{12} \cdot \nu_{21}} [(\nu_{13} + \nu_{23} \cdot \nu_{12}) d\varepsilon_{11} + (\nu_{23} + \nu_{13} \cdot \nu_{21}) d\varepsilon_{22}] \quad (363)$$

Ainsi l'incrément de déformation d'épaisseur est une conséquence de la loi de comportement et des incréments de déformation dans le plan des contraintes planes.

## 12.2 Transformations finies

Deux transports sont à considérer.

- le transport du repère d'anisotropie. Il s'agit d'un transport de vecteurs. Ceux-ci possèdent une seule variance. Le transport dans notre cas est envisagé sous forme d'un transport particulier qui conserve la norme de certaines directions (celles d'anisotropie) mais pas les angles. On se reportera à (10.2) pour plus de détail.
- le transport des tenseurs. Les tenseurs ont deux variances. Dans notre cas on utilise les transports associés aux dérivées de Lie 2 fois covariantes, 2 fois contravariantes et mixtes sous forme de la dérivée de Jauman. On suit donc la même démarche que celle utilisée pour toutes les lois incrémentales implantées dans Herezh. On se reportera par exemple à (5) pour plus de détail à ce sujet.

la suite est en état de construction !!

## 12.3 Cas seulement déviatorique ou sphérique

Le découpage en une partie déviatorique et une partie sphérique peut s'effectuer via les relations classiques en utilisant les coordonnées mixtes ce qui permet d'obtenir directement la trace puis la partie déviatorique.

$$\mathbf{I}_\sigma = \text{trace}(\boldsymbol{\sigma}) = \sigma_\alpha^\alpha \quad \text{d'où} \quad \mathbf{S} = \boldsymbol{\sigma} - \frac{\mathbf{I}_\sigma}{3} \mathbf{Id} \quad (364)$$

avec ici en contrainte plane,  $\alpha = 1,2$

## 12.4 Compressibilité et variation de volume

Contrairement au cas isotrope, la compressibilité est dépendante des directions dans lesquelles le volume change.



La compressibilité est utile pour calculer par exemple les pas de temps critique en dynamique explicite.

Dans Herezh++ deux cas sont considérés. Soit la variation de volume constatée est suffisamment grande pour pouvoir calculer la compressibilité via la définition :

$$\frac{I_\sigma}{3} = -P = K_s \log \left( \frac{vol}{vol_0} \right) = K_s \times \text{variation relative de volume}$$

Sachant que dans cette variation de volume, la variation d'épaisseur est une conséquence de la déformation dans le plan. Au moment du calcul des contraintes, on ne dispose en entrée que de la cinématique plane et de sa variation dans le plan des contraintes planes, c'est-à-dire  $\frac{surf}{surf_0}$  où "surf" est la surface associée au point d'intégration où l'on calcule la contrainte. On se sert alors de (347) pour compléter la variation de volume.

Soit la variation de volume est nulle et dans ce cas on considère arbitrairement les 3 directions d'orthotropie et on considère un essai de traction simple suivant chaque direction, ce qui permet d'obtenir la formule 3D (328).

## 12.5 Opérateur tangent en déformation (transport contravariant)

On considère ici des coefficients matériels fixes où variants peu relativement aux déformations où aux degrés de liberté.

Les relations (344), (345) et (347) donnent les variations du tenseur des contraintes dans le repère transporté.

$$\begin{aligned} d\varepsilon^{11} &= \frac{1}{E_1} (d\sigma^{11} - \nu_{12} d\sigma^{22}) \\ d\varepsilon^{22} &= \frac{1}{E_2} (-\nu_{21} d\sigma^{11} + d\sigma^{22}) \\ d\varepsilon_{33} &= -\frac{1}{1 - \nu_{12} \cdot \nu_{21}} [(\nu_{13} d\varepsilon_{11} + \nu_{23} \cdot \nu_{12}) + (\nu_{23} + \nu_{13} \cdot \nu_{21}) d\varepsilon_{22}] \end{aligned} \quad (365)$$

et

$$d\varepsilon^{12} = \frac{1}{2 \cdot G_{12}} d\sigma^{12} \quad (366)$$

En inversant les relations, on obtient une relation linéaire à coefficients constants :

$$\frac{\partial \sigma^{\alpha\beta}}{\partial \varepsilon^{\gamma\delta}} = H_{\dots\gamma\delta}^{\alpha\beta} \quad (367)$$

qui s'exprime dans le repère transporté  $\hat{O}'_\alpha$  et son dual.

**NB** : Les lettres grecques varient uniquement de 1 à 2

Le repère n'étant pas fixe, il nous faut connaître sa variation par rapport aux repères de travail :  $\hat{g}_\alpha$  et  $\hat{g}^\alpha$  pour accéder à l'opérateur tangent dans le repère naturel.

Notons que du fait des types de transport envisagés, les deux premiers vecteurs du repère d'anisotropie, qui définissent en fait le plan d'anisotropie transporté, restent à tous moments dans le plan des contraintes planes. Les variations du plan d'anisotropie ne

dépendent que de la déformation dans le plan des conditions de contraintes planes. On obtient donc au final les mêmes relations qu'en 3D (cf. 448), mais avec des indices variant de 1 à 2, c'est-à-dire relatifs à ce qui se passe dans le plan des contraintes planes.

À l'aide de (367) on peut calculer la variation de  $\sigma^{\alpha\beta}$  (composantes dans la base convectée) par rapport aux composantes du tenseur de déformation dans la base  $\hat{g}^\eta$ .

$$\frac{\partial \sigma^{\alpha\beta}}{\partial \varepsilon_{\eta\theta}} = \frac{\partial \sigma^{\alpha\beta}}{\partial \varepsilon^{\gamma\delta}} \frac{\partial \varepsilon^{\gamma\delta}}{\partial \varepsilon_{\eta\theta}} = H^{\alpha\beta}{}_{\cdot\cdot\gamma\delta} \frac{\partial \varepsilon^{\gamma\delta}}{\partial \varepsilon_{\eta\theta}} \quad (368)$$

et au final de manière similaire au cas 3D on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma^{\alpha\beta}}{\partial \varepsilon_{\gamma\delta}} &= \frac{\partial \gamma'^{\alpha}{}_{\cdot\eta}}{\partial \varepsilon_{\gamma\delta}} \sigma^{\eta\theta} \gamma'_{\cdot\theta}{}^{\beta} + \gamma'^{\alpha}{}_{\cdot\eta} \frac{\partial \sigma^{\eta\theta}}{\partial \varepsilon_{\gamma\delta}} \gamma'_{\cdot\theta}{}^{\beta} + \gamma'^{\alpha}{}_{\cdot\eta} \sigma^{\eta\theta} \frac{\partial \gamma'_{\cdot\theta}{}^{\beta}}{\partial \varepsilon_{\gamma\delta}} \\ &= \frac{\partial \beta_{\eta}^{\alpha}}{\partial \varepsilon_{\gamma\delta}} \sigma^{\eta\theta} \beta_{\theta}^{\beta} + \beta_{\eta}^{\alpha} \frac{\partial \sigma^{\eta\theta}}{\partial \varepsilon_{\gamma\delta}} \beta_{\theta}^{\beta} + \beta_{\eta}^{\alpha} \sigma^{\eta\theta} \frac{\partial \beta_{\theta}^{\beta}}{\partial \varepsilon_{\gamma\delta}} \end{aligned} \quad (369)$$

que l'on peut calculer à l'aide des relations (391,368 et 403). Les relations (391 et 403) sont ici restreintes au plan d'anisotropie, les indices ne variants que de 1 à 2.

## 12.6 Opérateur tangent en degré de liberté (transport contra-variant)

Comme pour le cas précédent, on considère ici des coefficients matériels fixes où variants peu relativement aux degrés de liberté.

Les relations (344) et (345) donnent les variations du tenseur des contraintes dans le repère transporté (365 et 366)

$$\begin{aligned} d\varepsilon^{11} &= \frac{1}{E_1} (d\sigma^{11} - \nu_{12} d\sigma^{22} - \nu_{13} d\sigma^{33}) \\ d\varepsilon^{22} &= \frac{1}{E_2} (-\nu_{21} d\sigma^{11} + d\sigma^{22} - \nu_{23} d\sigma^{33}) \\ d\varepsilon_{33} &= -\frac{1}{1 - \nu_{12}\cdot\nu_{21}} [(\nu_{13} + \nu_{23}\cdot\nu_{12}) d\varepsilon_{11} + (\nu_{23} + \nu_{13}\cdot\nu_{21}) d\varepsilon_{22}] \end{aligned}$$

et

$$d\varepsilon^{12} = \frac{1}{2 \cdot G_{12}} d\sigma^{12}$$

En inversant les relations, on obtient une relation linéaire à coefficients constants (367) qui s'exprime dans le repère transporté  $\hat{O}'_\alpha$  et son dual.

Ces repères n'étant pas fixe, il nous faut connaître leurs variations .

D'où la variation des composantes contravariantes du tenseur des contraintes dans le repère entraîné :

$$\frac{\partial \sigma^{\alpha\beta}}{\partial ddl} = \frac{\partial \sigma^{\alpha\beta}}{\partial \varepsilon^{\eta\theta}} \frac{\partial \varepsilon^{\eta\theta}}{\partial ddl} = H^{\alpha\beta}{}_{\cdot\cdot\eta\theta} \frac{\partial \varepsilon^{\eta\theta}}{\partial ddl} \quad (370)$$

et par définition nous avons dans le sens inverse, c'est-à-dire du repère d'orthotropie convecté vers la base de travail cf. 417 :

$$\hat{g}_\alpha = \beta'^{\cdot\gamma}_\alpha \hat{O}'_\gamma \text{ et } \hat{g}^\alpha = \gamma'^{\alpha}_{\cdot\gamma} \hat{O}'^\gamma \quad (371)$$

dans cette transformation  $[\beta'^{\cdot\gamma}_\alpha]^T$  joue le rôle de  $[\gamma'^{\alpha}_{\cdot\gamma}]$  :

$$[\gamma'^{\alpha}_{\cdot\gamma}] = [\beta'^{\cdot\gamma}_\alpha]^T \quad (372)$$

Nous avons :

$$\sigma^{\alpha\beta} = \gamma'^{\alpha}_{\cdot\eta} \sigma^{\eta\gamma} \gamma'^{\beta}_{\cdot\gamma} \quad (373)$$

d'où :

$$\frac{\partial \sigma^{\alpha\beta}}{\partial ddl} = \frac{\partial \gamma'^{\alpha}_{\cdot\eta}}{\partial ddl} \sigma^{\eta\theta} \gamma'^{\beta}_{\cdot\theta} + \gamma'^{\alpha}_{\cdot\eta} \frac{\partial \sigma^{\eta\theta}}{\partial ddl} \gamma'^{\beta}_{\cdot\theta} + \gamma'^{\alpha}_{\cdot\eta} \sigma^{\eta\theta} \frac{\partial \gamma'^{\beta}_{\cdot\theta}}{\partial ddl} \quad (374)$$

que l'on peut calculer à l'aide des relations (405, 370 et 424). Les relations (405 et 424) sont ici restreintes au plan d'anisotropie, les indices ne variants que de 1 à 2.

## 13 Transport d'un repère d'anisotropie

On suppose connu le repère d'anisotropie dans la position initiale. Soit  $\vec{O}_a$  les vecteurs du repère. Compte tenu de l'évolution de la matière, le repère est susceptible d'évoluer naturellement. Par exemple s'il y a des déplacements solides, le repère devrait "suivre" la matière. Si de plus, la matière se déforme, une évolution particulière du repère doit éventuellement être prise en compte.

Dans notre cas, on va considérer deux types de transport :

- transport covariant puis normalisation des vecteurs
- transport contravariants puis normalisation des vecteurs

Le fait d'utiliser un transport matériel covariant ou contravariant permet de prendre automatiquement en compte les mouvements de corps rigides, c'est un transport naturel dans le cas de l'utilisation de coordonnées matériels entraînés.

Le fait de normaliser les vecteurs de la base est plus particulier. Cela suppose que l'on tient compte, pour les vecteurs transportés, des changements d'angles entre eux, mais pas des changements de leur longueur.

L'intérêt de ce choix et de permettre de maintenir un comportement identique dans le sens des axes initialement d'anisotropie :

- qu'il y ait une déformation d'élongation ou pas selon ces axes,
- qu'il y ait un changement d'angle ou pas.

### 13.1 Transport type contravariant

Le repère d'anisotropie initiale doit pouvoir s'exprimer dans le repère naturel :

$$\vec{O}_a = \frac{1}{\|\vec{g}_j\|} A_a^j \vec{g}_j = \alpha_a^j \vec{g}_j \quad (375)$$

Dans le premier type de transport : contravariant, on considère deux étapes. Première étape, les vecteurs  $\vec{O}_a$  sont transportés de manière contravariante c'est-à-dire que leurs coordonnées contravariantes demeurent fixes :

$$\hat{O}_a = \alpha_a^j \hat{g}_j \quad (376)$$

seconde étape : les vecteurs sont normalisés :

$$\hat{O}'_a = \frac{\alpha_a^j \hat{g}_j}{\|\hat{O}_a\|} \quad (377)$$

#### Remarques

- Le calcul de la mise à jour du repère  $\hat{O}'_a$  nécessite la connaissance des coordonnées locales contravariantes  $\alpha_a^j$  du repère initial. Ces coordonnées sont fixes et permettent pour tout nouveau repère naturel  $\hat{g}_j$  de calculer les coordonnées du nouveau repère transporté  $\hat{O}'_a$ .

- Les vecteurs  $\hat{O}'_a$  sont normés, mais ne forment pas une base orthonormée, car étant entraînés par la matière, l'angle formé entre deux vecteurs varie. On a :

$$\hat{O}'_a \cdot \hat{O}'_b = \frac{\alpha_a^j \hat{g}_j \cdot \alpha_b^i \hat{g}_i}{\|\hat{O}'_a\| \|\hat{O}'_b\|} = \frac{\alpha_a^j \alpha_b^i \hat{g}_{ij}}{\|\hat{O}'_a\| \|\hat{O}'_b\|} \quad (378)$$

- Les coordonnées locales du repère  $\hat{O}'_a$  sont tel que :

$$\hat{O}'^i = \hat{O}'_a \cdot \hat{g}^i = \frac{\alpha_a^j \hat{g}_j \cdot \hat{g}^i}{\|\hat{O}'_a\|} = \frac{\alpha_a^i}{\sqrt{\alpha_a^k \alpha_a^l \hat{g}_{kl}}} = \beta_a^i \quad (379)$$

c'est-à-dire :

$$\hat{O}'_a = \hat{O}'^i \hat{g}_i = \beta_a^i \hat{g}_i \quad (380)$$

et pour la base duale dont on verra le calcul par la suite :

$$\hat{O}'^a = \hat{O}'_i \hat{g}^i = \gamma_i^a \hat{g}^i \quad (381)$$

## 13.2 Transport type covariant

La méthodologie est semblable au cas du transport de type contravariant.

Le repère d'anisotropie est exprimé dans le repère dual à l'aide de ses coordonnées covariantes :

$$\vec{O}_a = \frac{1}{\|\vec{g}^j\|} A_{aj} \vec{g}^j = \alpha_{aj} \vec{g}^j \quad (382)$$

On considère également deux étapes. Première étape, les vecteurs  $\vec{O}_a$  sont transportés de manière covariante c'est-à-dire que leurs coordonnées covariantes restent fixes pendant le transport :

$$\hat{O}_a = \alpha_{aj} \hat{g}^j \quad (383)$$

seconde étape : les vecteurs sont normalisés :

$$\hat{O}'_a = \frac{\alpha_{aj} \hat{g}^j}{\|\hat{O}_a\|} \quad (384)$$

### Remarques

- Le calcul de la mise à jour du repère  $\hat{O}'_a$  nécessite la connaissance des coordonnées locales covariantes  $\alpha_{aj}$  du repère initial. Ces coordonnées sont fixes et permettent pour tout nouveau repère naturel  $\hat{g}^j$  de calculer les coordonnées du nouveau repère transporté  $\hat{O}'_a$ .
- comme pour le transport de type contravariant, les vecteurs  $\hat{O}'_a$  ne sont pas orthogonaux entre eux.

— Initialement nous avons la relation :

$$\alpha_{aj} = \alpha_a^i g_{ij} \quad (385)$$

Le transport de type covariant ou contravariant ne conduit pas à des vecteurs identiques. En effet  $\alpha_{aj} \hat{g}^j$  est différent de  $\alpha_a^j \hat{g}_j$  compte tenu de 385 c'est-à-dire :

$$\alpha_{aj} \neq \alpha_a^i \hat{g}_{ij} \quad (386)$$

sauf si la métrique n'a pas évolué.

### 13.3 Formules de changement de base (transport contravariant)

On part des relations :

$$\hat{O}'_a = \hat{O}'^i \hat{g}_i = \beta_a^i \hat{g}_i \text{ et } \hat{O}'^a = \hat{O}'_i \hat{g}^i = \gamma_i^a \hat{g}^i \quad (387)$$

Nous avons également les relations inverses :

$$\hat{g}_j = \beta_j^{b'} \hat{O}'_b \text{ et } \hat{g}^j = \gamma_j^{b'} \hat{O}'^b \quad (388)$$

qui conduisent à :

$$\beta_j^{b'} = \hat{g}_j \cdot \hat{O}'^b = \hat{g}_j \cdot (\gamma_i^a \hat{g}^i) = \gamma_j^a \text{ c'est-à-dire } \beta_j^{b'} = \gamma_j^b \text{ et } [\beta_j^{b'}] = [\gamma_j^b]^T \quad (389)$$

De manière analogue nous avons :

$$\gamma_j^{b'} = \hat{g}^j \cdot \hat{O}'_b = \hat{g}^j \cdot (\beta_a^i \hat{g}_i) = \beta_a^j \text{ c'est-à-dire } \gamma_j^{b'} = \beta_a^j \text{ et } [\gamma_j^{b'}] = [\beta_a^j]^T \quad (390)$$

### 13.4 Variations des déformations d'Almansi dans le repère entraîné par rapport à celles exprimées dans $\hat{g}^j$

Ces variations sont utiles pour le calcul de l'opérateur tangent : contraintes/déformations.

Dans le cas d'une mesure de déformation d'Almansi, nous connaissons la variation des composantes de la métrique par rapport à la déformation (cf. [Rio, 2015] :  $\partial \hat{g}_{mn} / \partial \varepsilon_{kl} = 2 \cdot \delta_m^k \delta_n^l$ .

D'où à partir de l'expression (379) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \beta_a^i}{\partial \varepsilon_{kl}} &= \frac{\partial \beta_a^i}{\partial \hat{g}_{mn}} \frac{\partial \hat{g}_{mn}}{\partial \varepsilon_{kl}} \\ &= \frac{\partial \left( \alpha_a^i (\alpha_a^f \alpha_a^e \hat{g}_{ef})^{-\frac{1}{2}} \right)}{\partial \hat{g}_{mn}} \frac{\partial \hat{g}_{mn}}{\partial \varepsilon_{kl}} \\ &= -\frac{\alpha_a^i}{2} \frac{\alpha_a^m \alpha_a^n}{\left( \alpha_a^e \alpha_a^f \hat{g}_{ef} \right)^{\frac{3}{2}}} 2 \cdot \delta_m^k \delta_n^l \\ &= -\frac{\alpha_a^i \alpha_a^k \alpha_a^l}{\left( \alpha_a^e \alpha_a^f \hat{g}_{ef} \right)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned} \quad (391)$$

expression dans laquelle il n'y a pas de sommation relativement à l'indice "a".

Nous avons également besoin de la variation de l'inverse de la matrice de passage  $\beta_a^i$ .

Par définition :

$$[\beta_j^a]^{-1} [\beta_a^i] = [Id] \quad (392)$$

d'où

$$\frac{\partial[\beta_j^a]^{-1}}{\partial\varepsilon_{kl}} [\beta_a^i] + [\beta_j^a]^{-1} \frac{\partial[\beta_a^i]}{\partial\varepsilon_{kl}} = [0] \quad (393)$$

ou encore

$$\frac{\partial[\beta_j^b]^{-1}}{\partial\varepsilon_{kl}} = -[\beta_j^a]^{-1} \frac{\partial[\beta_a^i]}{\partial\varepsilon_{kl}} [\beta_i^b]^{-1} \quad (394)$$

Pour avoir une expression par composante on note :  $[\beta'_j{}^a] = [\beta_j^a]^{-1}$  et ainsi :

$$\frac{\partial[\beta'_j{}^b]}{\partial\varepsilon_{kl}} = -[\beta'_j{}^a] \frac{\partial[\beta_a^i]}{\partial\varepsilon_{kl}} [\beta'_i{}^b] \quad (395)$$

et par définition nous avons :

$$\hat{g}_j = \beta'_j{}^b \hat{O}'_b = \gamma_{j,b}^b \hat{O}'_b \text{ c'est-à-dire } [\beta'_j{}^b] = [\gamma_{j,b}^b]^T \quad (396)$$

ce qui donne ainsi la variation de  $\gamma$

$$\begin{aligned} \frac{\partial[\gamma_{j,b}^b]^T}{\partial\varepsilon_{kl}} &= \frac{\partial[\beta'_j{}^b]}{\partial\varepsilon_{kl}} \\ &= -[\beta'_j{}^a] \frac{\partial[\beta_a^i]}{\partial\varepsilon_{kl}} [\beta'_i{}^b] \\ &= -[\gamma_{j,a}^a]^T \frac{\partial[\beta_a^i]}{\partial\varepsilon_{kl}} [\gamma_{i,b}^b]^T \end{aligned} \quad (397)$$

et en indices :

$$\frac{\partial\gamma_{j,b}^b}{\partial\varepsilon_{kl}} = -\gamma_{j,a}^a \frac{\partial\beta_a^i}{\partial\varepsilon_{kl}} \gamma_{i,b}^b = \frac{\partial\beta'_j{}^b}{\partial\varepsilon_{kl}} \quad (398)$$

Localement, dans le repère d'anisotropie entraîné, nous utilisons des coordonnées contravariantes.

En appelant  $\varepsilon^{ab}$  les composantes du tenseur de déformation dans le repère,  $\hat{O}'_a$  on a :

$$\varepsilon^{ab} = \gamma_{,n}^a g^{\hat{n}i} \varepsilon_{ij} g^{\hat{j}m} \gamma_{,m}^b = \gamma_{,n}^a \varepsilon^{nm} \gamma_{,m}^b \quad (399)$$

Pour obtenir les variations par rapport aux coordonnées  $\varepsilon_{kl}$  on commence par calculer les variations des coordonnées contravariantes dans le repère de travail.

$$\frac{\partial\varepsilon^{nm}}{\partial\varepsilon_{kl}} = \frac{\partial g^{\hat{n}i}}{\partial\varepsilon_{kl}} \varepsilon_{ij} g^{\hat{j}m} + g^{\hat{n}i} \frac{\partial\varepsilon_{ij}}{\partial\varepsilon_{kl}} g^{\hat{j}m} + g^{\hat{n}i} \varepsilon_{ij} \frac{\partial g^{\hat{j}m}}{\partial\varepsilon_{kl}} \quad (400)$$

Sachant que :

$$\frac{\partial g^{\hat{n}i}}{\partial\varepsilon_{kl}} = -2\hat{g}^{nk} \hat{g}^{il} \text{ et } \frac{\partial g^{\hat{j}m}}{\partial\varepsilon_{kl}} = -2\hat{g}^{jk} \hat{g}^{ml} \quad (401)$$

d'où

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \varepsilon^{nm}}{\partial \varepsilon_{kl}} &= -2 \hat{g}^{nk} \hat{g}^{il} \varepsilon_{ij} g^{\hat{j}m} + g^{\hat{n}i} \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}} g^{\hat{j}m} - 2 g^{\hat{n}i} \varepsilon_{ij} \hat{g}^{jk} \hat{g}^{ml} \\
&= -2 \hat{g}^{nk} \varepsilon^{lm} + g^{\hat{n}k} g^{\hat{l}m} - 2 \varepsilon^{nk} \hat{g}^{ml} \\
&= -2 (\hat{g}^{nk} \varepsilon^{lm} + \varepsilon^{nk} \hat{g}^{ml}) + g^{\hat{n}k} g^{\hat{l}m}
\end{aligned} \tag{402}$$

En tenant compte de cette expression et des formules de changement de base on obtient ainsi la variation des composantes de déformation exprimées dans le repère transporté, par rapport aux composantes de déformation exprimées dans le repère dual  $\hat{g}^j$  :

$$\frac{\partial \varepsilon^{ab}}{\partial \varepsilon_{kl}} = \frac{\partial \gamma_{.n}^a}{\partial \varepsilon_{kl}} \varepsilon^{nm} \gamma_{.m}^b + \gamma_{.n}^a \frac{\partial \varepsilon^{nm}}{\partial \varepsilon_{kl}} \gamma_{.m}^b + \gamma_{.n}^a \varepsilon^{nm} \frac{\partial \gamma_{.m}^b}{\partial \varepsilon_{kl}} \tag{403}$$

### 13.5 Variations par rapport aux degrés de liberté cinématiques

On reprend l'expression 379 :

$$\hat{O}'_a = \beta_a^i \hat{g}_i \tag{404}$$

On notera certaine fois simplement  $\partial$  au lieu de  $\frac{\partial}{\partial ddl}$  par simplifier les notations. La variation de  $\beta_a^i$  peut se calculer via : de l'expression (379) :

$$\begin{aligned}
\partial \beta_a^i &= \frac{\partial \left( \alpha_a^i (\alpha_a^f \alpha_a^e \hat{g}_{ef})^{-\frac{1}{2}} \right)}{\partial ddl} \\
&= -\frac{\alpha_a^i}{2} \frac{\alpha_a^l \alpha_a^m}{(\alpha_a^e \alpha_a^f \hat{g}_{ef})^{\frac{3}{2}}} \partial \hat{g}_{lm}
\end{aligned} \tag{405}$$

expression dans laquelle il n'y a pas de sommation relativement à l'indice "a".

On en déduit la variation du vecteur  $\hat{O}'_a$  :

$$\frac{\partial \hat{O}'_a}{\partial ddl} = \frac{\partial \beta_a^i}{ddl} \hat{g}_i + \beta_a^i \frac{\partial \hat{g}_i}{\partial ddl} \tag{406}$$

Par définition de la base duale :

$$\hat{O}'^a = \gamma_{.i}^a \hat{g}^i \text{ avec } \hat{O}'_a \cdot \hat{O}'^b = \delta_a^b \tag{407}$$

d'où

$$-\frac{\partial \hat{O}'_a}{\partial ddl} \cdot \hat{O}'^b = \hat{O}'_a \cdot \frac{\partial \hat{O}'^b}{\partial ddl} \tag{408}$$

Le terme de droite correspond donc par définition à la coordonnée covariante "a" du vecteur  $\frac{\partial \hat{O}'^b}{\partial ddl}$  d'où le vecteur variation :

$$\frac{\partial \hat{O}'^b}{\partial ddl} = \left( -\frac{\partial \hat{O}'_a}{\partial ddl} \cdot \hat{O}'^b \right) \hat{O}'^a \tag{409}$$



Concernant les variations du tenseur des contraintes dans le repère,  $\hat{g}^j$  nous devons utiliser la variation de l'inverse de la matrice de passage  $\beta_a^i$ .

Par définition :

$$[\beta_a^i]^{-1} [\beta_b^i] = [\delta_a^b] \quad (410)$$

d'où

$$\frac{\partial[\beta_a^i]^{-1}}{\partial ddl} [\beta_b^i] + [\beta_a^i]^{-1} \frac{\partial[\beta_b^i]}{\partial ddl} = [0] \quad (411)$$

ou encore

$$\frac{\partial[\beta_a^i]^{-1}}{\partial ddl} = -[\beta_a^i]^{-1} \frac{\partial[\beta_b^i]}{\partial ddl} [\beta_c^j]^{-1} \quad (412)$$

Pour avoir une expression par composante on pourrait noter :  $[\beta'_i{}^a] = [\beta_a^i]^{-1}$  mais en fait il s'agit tout simplement de la matrice  $[\gamma_i^a]^T$  car par définition on a (cf. 694) :  $[\beta_b^i]^{-1} = [\gamma_b^i]^T$ . Notons également, (cf. remarque 694) que tous les indices sont muets, seules leurs positions a de l'importance.

et ainsi :

$$\frac{\partial[\gamma_i^a]^T}{\partial ddl} = \frac{\partial[\beta'_j{}^b]}{\partial ddl} = -[\beta'_j{}^a] \frac{\partial[\beta_a^i]}{\partial ddl} [\beta'_i{}^b] = -[\gamma_i^a]^T \frac{\partial[\beta_b^j]}{\partial ddl} [\gamma_k^c]^T \quad (413)$$

$$\frac{\partial[\gamma_i^a]}{\partial ddl} = - \left[ [\gamma_i^a]^T \frac{\partial[\beta_b^j]}{\partial ddl} [\gamma_k^c]^T \right]^T = -[\gamma_k^c] \left[ \frac{\partial[\beta_b^j]}{\partial ddl} \right]^T [\gamma_i^a] \quad (414)$$

Une autre méthode pour arriver au même résultat est de noter que compte tenu du fait de la relation définissant les vecteurs  $\hat{O}'_b$  et  $\hat{O}^b$  et en tenant compte de 694 nous avons :

$$\hat{g}_j = \gamma_{.j}^b \hat{O}'_b \text{ et } \hat{g}^i = \beta_a^i \hat{O}'^a \quad (415)$$

ce qui conduit à la relation importante :

$$\hat{g}_j \cdot \hat{g}^i = \delta_j^i = \gamma_{.j}^a \cdot \beta_a^i \quad (416)$$

**Remarque** Si l'on notait  $\hat{g}_j = \beta'_j{}^b \hat{O}'_b$  et  $\hat{g}^j = \gamma'^j{}_b \hat{O}'^b$  il faut remarquer qu'en notation matricielle, compte tenu de 415 :

$$[\gamma'^j{}_b]^T = [\beta'_j{}^b] \text{ et } [\beta_a^j]^T = [\gamma'^j{}_a] \quad (417)$$

qui correspond à la notation indicielle :

$$\gamma'^j{}_b = \beta'_j{}^b \text{ et } \beta_a^j = \gamma'^j{}_a \quad (418)$$

Sachant que par ailleurs on peut écrire :

$$\hat{O}'_b \cdot \hat{O}'^a = \delta_b^a = \beta_b^i \gamma_i^a \quad (419)$$

cela conduit à :

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial \beta_b^i}{\partial d d l} \gamma_i^a + \beta_b^i \frac{\partial \gamma_i^a}{\partial d d l} \\
\text{vrai quel que soient "a" et "b" d'où} \\
0 &= \gamma_j^b \frac{\partial \beta_b^i}{\partial d d l} \gamma_i^a + \gamma_j^b \beta_b^i \frac{\partial \gamma_i^a}{\partial d d l} \\
\text{après sommation sur b et pour } i=j \\
\frac{\partial \gamma_i^a}{\partial d d l} &= -\gamma_j^b \frac{\partial \beta_b^i}{\partial d d l} \gamma_i^a \tag{420}
\end{aligned}$$

ce qui correspond à la formule matricielle 413.

Maintenant on peut calculer la variation des déformations.

$$\begin{aligned}
\epsilon &= \epsilon^{ab} \hat{O}'_a \otimes \hat{O}'_b = \epsilon_{ij} \hat{g}^i \otimes \hat{g}^j \\
&= \epsilon^{ij} \hat{g}_i \otimes \hat{g}_j \tag{421}
\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
\beta_a^i \beta_b^j \epsilon^{ab} &= \epsilon^{ij} \\
\text{ou encore} \\
[\beta_a^i]^T [\epsilon^{ab}] [\beta_b^j] &= [\epsilon^{ij}] \\
\text{et} \\
[\epsilon^{ab}] &= [\beta_a^i]^{-T} [\epsilon^{ij}] [\beta_b^j]^{-1} \tag{422}
\end{aligned}$$

et en tenant compte de 695 :

$$[\epsilon^{ab}] = [\gamma_{.i}^a] [\epsilon^{ij}] [\gamma_{.j}^b]^T \tag{423}$$

et pour les variations :

$$\partial [\epsilon^{ab}] = \partial [\gamma_{.i}^a] [\epsilon^{ij}] [\gamma_{.j}^b]^T + [\gamma_{.i}^a] \partial [\epsilon^{ij}] [\gamma_{.j}^b]^T + [\gamma_{.i}^a] [\epsilon^{ij}] \partial [\gamma_{.j}^b]^T \tag{424}$$

## 14 Anisotropie : opérateur de projection

### 14.1 Introduction

L'idée de l'opération de projection provient initialement des travaux de thèse de Denis Favier ([Favier, 1988b]). L'objectif est de considérer une anisotropie particulière qui s'effectue sur la base d'un comportement de référence isotrope, qui est ensuite "projeté" dans la configuration réelle au travers d'un repère particulier d'anisotropie et d'une fonction particulière.

Ce cadre très général est dans notre cas, spécialisé à un comportement qui s'inspire des critères de plasticité anisotropes, et plus particulièrement celui du critère de Hill

([Lemaitre and Chaboche, 2004]). L'idée de ce critère est de remplacer le critère de Mises  $\mathbf{S} : \mathbf{S} = 1$  par  $\mathbf{S} : \mathbf{H} : \mathbf{S} = 1$  où  $\mathbf{H}$  est un tenseur du 4ième ordre.

Dans le cas de l'analyse de Hill, le critère est construit de manière à ce que l'on ait automatiquement :

$$\text{trace}(\mathbf{H} : \boldsymbol{\sigma}) = 0 \quad (425)$$

Dans notre cas, nous ne souhaitons pas conserver cette limitation pour  $\mathbf{H}$  de manière à généraliser une transformation  $\mathbf{H}.. \boldsymbol{\sigma}$  qui apparaît ainsi comme une transformation linéaire générale dans un espace tensoriel d'ordre 2.

## 14.2 Tenseur des contraintes

Soit une loi de comportement existante isotrope qui permet de calculer un tenseur de contrainte de référence  $\boldsymbol{\sigma}_{(ref)}$ . À partir du tenseur  $\mathbf{H}$ , on en déduit le tenseur final des contraintes :

$$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{D}, \dots) = \mathbf{H}.. \boldsymbol{\sigma}_{(ref)}(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{D}, \dots) \quad (426)$$

Le tenseur  $\mathbf{H}$  est défini dans son repère principal qui est défini à partir du repère d'anisotropie.

Les directions principales du tenseur  $\mathbf{H}$  dans l'espace tensoriel d'ordre 2, sont les tenseurs de base :  $\mathbf{C}(i, j) = \vec{O}'_i \otimes \vec{O}'_j$   $i, j = 1..3$ . de telle sorte que l'on a :

$$\mathbf{H}.. \mathbf{C}(i, j) = \lambda(i, j) \mathbf{C}(i, j) \text{ avec } i, j = 1..3 \quad (427)$$

Ainsi dans cette base principale les composantes de  $\mathbf{H}$  sont telles que :

- elles sont toutes nulles sauf les composantes :  $H_{..ii}^{ii}$   $i=1,2,3$  et  $H_{..ij}^{ij}$   $i \neq j$  et  $i, j=1,2,3$
- pour des raisons de symétrie du tenseur final de contrainte on a :  $H_{..ij}^{ij} = H_{..ji}^{ji} = H_{..ji}^{ij} = H_{..ij}^{ji}$

Les composantes de  $\mathbf{H}$  dépendent donc uniquement de 6 scalaires :

$$\lambda(1, 1), \lambda(2, 2), \lambda(3, 3), \lambda(1, 2), \lambda(1, 3), \lambda(2, 3)$$

Dans le cadre d'une transformation finie, il faut adjoindre à cette équation constitutive une équation d'évolution pour  $\mathbf{H}$ . On considère ici les 2 types de transport décrit en chapitre (13). On s'y reportera pour les détails du transport et les mécanismes de changement de repère et de dérivation.

L'idée est ainsi de considérer un transport matériel  $\mathbf{H}$  qui s'effectue directement à partir du transport de la base  $\vec{O}'_a$  avec les particularités suivantes :

- le transport est matériel via l'utilisation d'une base matérielle naturelle  $\vec{g}_i$  et sa base duale,
- la direction des vecteurs  $\vec{O}'_a$  (ou  $\vec{O}'^a$  suivant le choix retenu) est convectée
- par contre les vecteurs de base d'anisotropie, restent normalisés

Ainsi le tenseur  $\mathbf{H}$  demeure constant dans un repère matériel entraîné dans le cas d'un mouvement solide. Dans le cas d'une déformation finie, il est sensible aux variations d'angles du repère  $\vec{O}'_a$ . Il n'est pas sensible aux variations de longueurs dans les directions entraînées de  $\vec{O}'_a$ .

D'une manière pratique on a le choix le repère dans lequel calculer le tenseur des contraintes. On fait le choix d'utiliser le repère matériel de travail pour éviter le transport

des grandeurs internes définies au point d'intégration et associées à la loi de comportement isotrope. On doit donc calculer le tenseur  $\mathbf{H}$  dans le repère de travail.

$$\begin{aligned}
\mathbf{H} &= \left( \sum_{a=1}^3 H_{..aa} \vec{O}'_a \otimes \vec{O}'_a \otimes \vec{O}'^a \otimes \vec{O}'^a \right) + \left( \sum_{a,b=1;a \neq b}^3 H_{..ab} \vec{O}'_a \otimes \vec{O}'_b \otimes \vec{O}'^a \otimes \vec{O}'^b \right) \\
&= \left( \sum_{a=1}^3 \lambda(a, a) \vec{O}'_a \otimes \vec{O}'_a \otimes \vec{O}'^a \otimes \vec{O}'^a \right) + \left( \sum_{a,b=1;a \neq b}^3 \lambda(a, b) \vec{O}'_a \otimes \vec{O}'_b \otimes \vec{O}'^a \otimes \vec{O}'^b \right) \\
&= \left( \sum_{a=1}^3 \sum_{b=1}^3 \lambda(a, b) \vec{O}'_a \otimes \vec{O}'_b \otimes \vec{O}'^a \otimes \vec{O}'^b \right) \tag{428}
\end{aligned}$$

avec la particularité que  $\lambda(a, b) = \lambda(b, a)$

En tenant compte de (387) :

$$H_{..kl}^{ij} = \left( \sum_{a=1}^3 \sum_{b=1}^3 \lambda(a, b) \beta_a^i \beta_b^j \gamma_k^a \gamma_l^b \right) \tag{429}$$

D'où le tenseur des contraintes :

$$\sigma^{ij} = H_{..kl}^{ij} \sigma_{(ref)}^{kl} = \left( \sum_{a=1}^3 \sum_{b=1}^3 \lambda(a, b) \beta_a^i \beta_b^j \gamma_k^a \gamma_l^b \right) \sigma_{(ref)}^{kl} \tag{430}$$

Il peut-être intéressant d'avoir accès aux contraintes exprimées dans le repère d'anisotropie. Notons cependant que ce repère n'est pas orthogonal ! mais il est normé. Compte tenu de (388) et (389) :

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\sigma} &= \sigma^{ij} \hat{g}_i \otimes \hat{g}_j = \sigma^{ij} \gamma_i^a \gamma_j^b \hat{O}'_a \otimes \hat{O}'_b \\
&= \sigma^{ab} \hat{O}'_a \otimes \hat{O}'_b \tag{431}
\end{aligned}$$

### 14.2.1 Traitement des énergies

Le calcul de l'évolution des énergies et puissances dû à l'opération de projection, est a priori indéterminé. Il nous faut introduire une hypothèse supplémentaire.

Les éléments dont on dispose :

- l'incrément de déformation  $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}$  et la vitesse de déformation  $\mathbf{D}$ ,
- le tenseur de contrainte de référence  $\boldsymbol{\sigma}_{(ref)}$  et les énergies  $e_{(élastique)}$   $e_{(plastique)}$   $e_{(visqueux)}$  et puissances associées  $P_{(élastique)}$   $P_{(plastique)}$   $P_{(visqueux)}$
- le tenseur de contrainte projeté  $\boldsymbol{\sigma}$ .

D'autre part on peut calculer

- la puissance totale de référence  $P_{(totale\ de\ ref)} = \boldsymbol{\sigma}_{(ref)} : \mathbf{D}$  qui doit-être égale à  $P_{(élastique\ de\ ref)} + P_{(plastique\ de\ ref)} + P_{(visqueux\ de\ ref)}$

— la puissance totale finale :  $P_{(totale)} = \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D}$  qui doit-être égale à la répartition de puissance que l'on cherche  $P_{(elastique)} + P_{(plastique)} + P_{(visqueux)}$

La répartition de puissance dépend du type de comportement que l'on cherche à représenter.

Dans notre cas, en l'absence d'information particulière on fait l'hypothèse forte que l'opération de projection ne modifie pas la répartition des puissances du comportement de référence entre elles, mais seulement leur niveau. On se sert alors du rapport global des puissances pour adapter le niveau final des puissances individuelles.

$$\begin{aligned}
 r &= \frac{P_{(totale)}}{P_{(totale \text{ de ref})}} \\
 \Rightarrow &\begin{cases} P_{(elastique)} = r P_{(elastique \text{ de ref})} \\ P_{(plastique)} = r P_{(plastique \text{ de ref})} \\ P_{(visqueux)} = r P_{(visqueux \text{ de ref})} \end{cases} \quad (432)
 \end{aligned}$$

Concernant les énergies, on approche les énergies individuelles finales en linéarisant l'incrément de déformation :

$$\begin{cases} e_{(elastique)}^{t+\Delta t} = e_{(elastique)}^t + P_{(elastique)} \Delta t \\ e_{(plastique)}^{t+\Delta t} = e_{(plastique)}^t + P_{(plastique)} \Delta t \\ e_{(visqueux)}^{t+\Delta t} = e_{(visqueux)}^t + P_{(visqueux)} \Delta t \end{cases} \quad (433)$$

### 14.2.2 Compressibilité et variation de volume

De manière analogue au cas de l'orthotropie entraînée (cf. 10.4) la compressibilité est dépendante des directions dans lesquelles le volume change. On va donc ici suivre une démarche assez semblable au cas de l'orthotropie entraînée.

Rappelons que la compressibilité est utile pour calculer par exemple les pas de temps critique en dynamique.

Dans Herezh++ deux cas sont considérés. Soit la variation de volume constatée est suffisamment grande pour pouvoir calculer la compressibilité via la définition :

$$\frac{\mathbf{I}_{\sigma(ref)}}{3} = -P = K_s \log \left( \frac{vol}{vol_0} \right) = K_s \times \text{variation relative de volume}$$

Soit la variation de volume est nulle et dans ce cas en l'absence d'information supplémentaire on va considérer le cas particulier d'une déformation purement sphérique. Le tenseur de contrainte de référence doit alors être également sphérique :  $\boldsymbol{\sigma}_{(ref)} = -p_{(ref)} \mathbf{Id}$ , de trace  $= -3.p_{(ref)}$

En appelant  $g''_{ab} = \hat{O}'_a \cdot \hat{O}'_b$  les composantes deux fois covariantes du tenseur métrique dans la base d'orthotropie et  $g''^{ab} = \hat{O}'^a \cdot \hat{O}'^b$  celles contravariantes on peut calculer la trace du tenseur de contrainte projeté :

$$\begin{aligned}
 trace(\boldsymbol{\sigma}) &= g''_{ab} \sigma^{ab} = g''_{ab} \left( \lambda(a, b) \vec{O}'_a \otimes \vec{O}'_b \otimes \vec{O}'^a \otimes \vec{O}'^b \right) \cdot \left( \sigma_{(ref)}^{ab} \vec{O}'_a \otimes \vec{O}'_b \right) \\
 &= g''_{ab} \left( \lambda(a, b) \sigma_{(ref)}^{ab} \right) \\
 &= g''_{ab} \left( \lambda(a, b) (-p_{(ref)}) g''^{ab} \right) \quad (434)
 \end{aligned}$$

On suppose que la loi de référence fournit un module de compressibilité :

$$K_{(ref)s} = \frac{(-p_{(ref)})}{\log\left(\frac{vol}{vol_0}\right)} = \frac{\mathbf{I}_{\sigma_{(ref)}}}{3 \log\left(\frac{vol}{vol_0}\right)}$$

Compte tenu de (434) on peut en déduire un module de compressibilité :

$$\begin{aligned} K_s &= \frac{\mathbf{I}_{\sigma}}{3 \log\left(\frac{vol}{vol_0}\right)} \\ &= \frac{1}{3} g''_{ab} (\lambda(a, b) g''^{ab}) \frac{(-p_{(ref)})}{\log\left(\frac{vol}{vol_0}\right)} \\ &= \frac{1}{3} g''_{ab} (\lambda(a, b) g''^{ab}) K_{(ref)s} \end{aligned} \quad (435)$$

### Remarque

1. Le module ainsi déterminé est correct pour une variation de volume pure. Il n'est pas correct pour une direction quelconque. Mais la notion même de variation de volume dépendante de la direction, n'est sans doute pas simple à utiliser.
2. Lorsque la déformation totale est nulle, le repère initial d'orthotropie est supposé orthogonal. Dans ce cas particulier  $g''_{ab} = g''^{ab} = \delta_{ab}$ . On obtient alors :

$$K_s = \frac{(\lambda(1, 1) + \lambda(2, 2) + \lambda(3, 3))}{3} K_{(ref)s} \quad (436)$$

## 14.3 Cisaillement et variation de forme

L'idée est ici de calculer un module qui rend compte globalement de la variation de forme. Pour cela on considère arbitrairement que cette grandeur est représentée par le rapport de l'intensité du déviateur des contraintes sur l'intensité du déviateur des déformations.

$$G_s = 0.5 \frac{\|\mathbf{S} : \mathbf{S}\|}{\|\bar{\boldsymbol{\epsilon}} : \bar{\boldsymbol{\epsilon}}\|} \quad (437)$$

**NB :** Cette grandeur correspond au module de cisaillement d'une loi élastique pour laquelle  $\nu = 0.5$

$G_s$  est utile pour calcul par exemple la vitesse approchée des ondes de cisaillement ce qui permet d'en déduire un pas de temps critique en dynamique explicite.

Dans Herezh++ deux cas sont considérés. Soit la variation de forme constatée, représentée par  $\bar{\boldsymbol{\epsilon}}$  est suffisamment grande pour pouvoir calculer  $G_s$  via sa définition (437).

Soit la variation de forme est nulle et dans ce cas en l'absence d'information supplémentaire on va considérer le cas particulier d'une déformation purement déviatorique en considérant les 3 variations d'angle dans le repère d'anisotropie. Le tenseur de contrainte de référence doit alors être également déviatorique.

Supposons par exemple un cisaillement dans le plan 1-2 d'orthotropie. En l'absence de déformation, le repère initial est considéré orthonormé et les composantes des tenseurs sont du type :

$$[\varepsilon_{ab}] = e \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad [\sigma_{ref}^{ab}] = \tau_{ref} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (438)$$

après projection on obtient :

$$[\sigma^{ab}] = \tau_{ref} \begin{bmatrix} 0 & B12 & 0 \\ B12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (439)$$

d'où un module de cisaillement dans le plan 1-2 :

$$G_s(12) = 0.5 \frac{\sqrt{2} | B12 \tau_{ref} |}{\sqrt{2} | e |} = 0.5 | B12 | G_{s(ref)} \quad (440)$$

On voit que ce résultat dépend du plan considéré ce qui est logique compte tenu de l'anisotropie induite. Pour un état initial de déformation nulle, on fait le choix d'un module moyen :

$$G_s = \frac{1}{2} \frac{| B12 | + | B13 | + | B23 |}{3} G_{s(ref)} \quad (441)$$

## 14.4 Opérateur tangent en déformation (transport contravariant)

On part de l'expression indicielle (430)

$$\sigma^{ij} = \left( \sum_{a=1}^3 \sum_{b=1}^3 \lambda(a,b) \beta_a^i \beta_b^j \gamma_m^a \gamma_n^b \right) \sigma_{(ref)}^{mn}$$

d'où

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma^{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}} &= \sum_{a=1}^3 \sum_{b=1}^3 \lambda(a,b) [ \\ &\quad \left( \frac{\partial \beta_a^i}{\partial \varepsilon_{kl}} \beta_b^j \gamma_m^a \gamma_n^b \right. \\ &\quad + \beta_a^i \frac{\partial \beta_b^j}{\partial \varepsilon_{kl}} \gamma_m^a \gamma_n^b \\ &\quad + \beta_a^i \beta_b^j \frac{\partial \gamma_m^a}{\partial \varepsilon_{kl}} \gamma_n^b \\ &\quad \left. + \beta_a^i \beta_b^j \gamma_m^a \frac{\partial \gamma_n^b}{\partial \varepsilon_{kl}} \right) \sigma_{(ref)}^{mn} \\ &\quad + \left( \beta_a^i \beta_b^j \gamma_m^a \gamma_n^b \right) \frac{\partial \sigma_{(ref)}^{mn}}{\partial \varepsilon_{kl}} ] \end{aligned} \quad (442)$$

L'opérateur tangent de la contrainte de référence est supposé connu. Les variations des coordonnées  $\beta_a^i$  et  $\gamma_m^a$  sont données par les expressions : (391) et (397) .

————— modif —————

Nous avons d'une manière générale, en composantes dans le repère de définition de  $\mathbf{H}$  (i.e. le repère d'orthotropie) :

$$\sigma^{ab} = H_{..cd}^{ab} \sigma_{(ref)}^{cd} \quad (443)$$

En notant que pour le cas particulier de projection envisagé ici, seules les termes  $H_{..ab}^{ab} = H_{..ba}^{ba} = H_{..ab}^{ab} = H_{..ba}^{ba}$  sont non nulles.

On considère que dans le repère d'orthotropie, les coefficients matériels sont fixes où variants peu relativement aux déformations et d'autre part nous supposons connues les variations de  $\sigma_{(ref)}^{ij}$  par rapport à la déformation  $\varepsilon_{kl}$  dans le repère de travail final. Nous avons dans le repère d'orthotropie :

$$\frac{\partial \sigma^{ab}}{\partial \varepsilon_{kl}} = H_{..cd}^{ab} \frac{\partial \sigma_{(ref)}^{cd}}{\partial \varepsilon_{kl}} = T^{abkl} \quad (444)$$

qui s'exprime dans le repère  $\hat{O}'_a \otimes \hat{O}'_b \otimes \hat{g}_i \otimes \hat{g}_j$ .

et de plus :

$$\sigma_{(ref)}^{cd} = \gamma_{.i}^c \sigma_{(ref)}^{ij} \gamma_{.j}^d \Rightarrow \sigma^{ab} = H_{..cd}^{ab} \gamma_{.i}^c \sigma_{(ref)}^{ij} \gamma_{.j}^d \quad (445)$$

Le repère n'étant pas fixe, il nous faut connaître sa variation par rapport aux repères de travail :  $\hat{g}_j$  et  $\hat{g}^j$  pour accéder à l'opérateur tangent dans le repère naturel.

À l'aide de (444) on peut calculer la variation de  $\sigma^{ab}$  (composantes dans la base convectée) par rapport aux composantes du tenseur de déformation dans la base  $\hat{g}^j$ .

$$\frac{\partial \sigma^{ab}}{\partial \varepsilon_{kl}} = \frac{\partial \sigma^{ab}}{\partial \varepsilon^{cd}} \frac{\partial \varepsilon^{cd}}{\partial \varepsilon_{kl}} = T_{..cd}^{ab} \frac{\partial \varepsilon^{cd}}{\partial \varepsilon_{kl}} \quad (446)$$

Par définition nous avons dans le sens inverse, c'est-à-dire du repère d'anisotropie convecté vers la base de travail cf. 13.3 :

$$\hat{g}_j = \beta_{.j}^b \hat{O}'_b \quad \text{et} \quad \hat{g}^j = \gamma_{.b}^j \hat{O}^b$$

dans cette transformation  $[\beta_b^j]^T$  joue le rôle de  $[\gamma_{.b}^j]$  :

$$[\gamma_{.b}^j] = [\beta_b^j]^T \quad \text{ou encore} \quad \gamma_{.b}^j = \beta_b^j$$

Nous avons :

$$\sigma^{ij} = \gamma_{.a}^i \sigma^{ab} \gamma_{.b}^j \quad \text{ou bien} \quad [\sigma^{ij}] = [\gamma_{.a}^i] \sigma^{ab} [\gamma_{.b}^j]^T \quad \text{ou encore} \quad [\sigma^{ij}] = [\beta_a^i]^T \sigma^{ab} [\beta_b^j] \quad (447)$$

d'où :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma^{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}} &= \frac{\partial \gamma_{.a}^i}{\partial \varepsilon_{kl}} \sigma^{ab} \gamma_{.b}^j + \gamma_{.a}^i \frac{\partial \sigma^{ab}}{\partial \varepsilon_{kl}} \gamma_{.b}^j + \gamma_{.a}^i \sigma^{ab} \frac{\partial \gamma_{.b}^j}{\partial \varepsilon_{kl}} \\ &= \frac{\partial \beta_a^i}{\partial \varepsilon_{kl}} \sigma^{ab} \beta_b^j + \beta_a^i \frac{\partial \sigma^{ab}}{\partial \varepsilon_{kl}} \beta_b^j + \beta_a^i \sigma^{ab} \frac{\partial \beta_b^j}{\partial \varepsilon_{kl}} \end{aligned} \quad (448)$$

que l'on peut calculer à l'aide des relations ( 391,444 et 403).



### Remarque

Dans le cas où on voudrait les variations du tenseur des contraintes dans le repère,  $\hat{g}^j$  nous devrions utiliser la variation de l'inverse de la matrice de passage  $\beta_a^i$ .

$$\sigma_{ij} = \beta'^a_i \sigma_{ab} \beta'^b_j = \gamma^a_i \sigma_{ab} \gamma^b_j \quad (449)$$

d'où :

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}} = \frac{\partial \beta'^a_i}{\partial \varepsilon_{kl}} \sigma_{ab} \beta'^b_j + \beta'^a_i \frac{\partial \sigma_{ab}}{\partial \varepsilon_{kl}} \beta'^b_j + \beta'^a_i \sigma_{ab} \frac{\partial \beta'^b_j}{\partial \varepsilon_{kl}} \quad (450)$$

que l'on peut calculer à l'aide des relations (398,444 et 403).

## 14.5 Opérateur tangent en degré de liberté (transport contra-variant)

On part de la relation (444) :

$$\frac{\partial \sigma^{ab}}{\partial \varepsilon^{cd}} = H^{ab}_{..ab} \frac{\partial \sigma^{ab}_{(ref)}}{\partial \varepsilon^{cd}} = T^{ab}_{..cd}$$

qui s'exprime dans le repère transporté  $\hat{O}'_a$  et son dual.

Le repère n'étant pas fixe, il nous faut connaître sa variation par rapport aux repères de travail :  $\hat{g}_j$  et  $\hat{g}^j$  pour accéder à l'opérateur tangent dans le repère naturel.

Comme pour le cas précédent, on considère ici des coefficients matériels fixes où variants peu relativement aux degrés de liberté.

D'où la variation des composantes contravariantes du tenseur des contraintes dans le repère entraîné :

$$\frac{\partial \sigma^{ab}}{\partial ddl} = \frac{\partial \sigma^{ab}}{\partial \varepsilon^{cd}} \frac{\partial \varepsilon^{cg}}{\partial ddl} = T^{ab}_{..cd} \frac{\partial \varepsilon^{cg}}{\partial ddl} \quad (451)$$

et par définition nous avons dans le sens inverse, c'est-à-dire du repère d'anisotropie convecté vers la base de travail cf. 417 :

$$\hat{g}_j = \beta'^b_j \hat{O}'_b \quad \text{et} \quad \hat{g}^j = \gamma'^j_b \hat{O}'^b \quad (452)$$

dans cette transformation  $[\beta_j^b]^T$  joue le rôle de  $[\gamma'^j_b]$  :

$$[\gamma'^j_b] = [\beta_j^b]^T \quad (453)$$

Nous avons :

$$\sigma^{ij} = \gamma'^i_a \sigma^{ab} \gamma'^j_b \quad (454)$$

d'où :

$$\frac{\partial \sigma^{ij}}{\partial ddl} = \frac{\partial \gamma'^i_a}{\partial ddl} \sigma^{ab} \gamma'^j_b + \gamma'^i_a \frac{\partial \sigma^{ab}}{\partial ddl} \gamma'^j_b + \gamma'^i_a \sigma^{ab} \frac{\partial \gamma'^j_b}{\partial ddl} \quad (455)$$

que l'on peut calculer à l'aide des relations (405, 451 et 424).

# 15 Loi Hypo-élastique initialement orthotrope, puis entraînée

## 15.1 Relations générales

La construction de la loi s'appuie sur des concepts déjà introduit :

- hypo-élasticité (cf. 5) qui consiste à calculer la variation de la contrainte à partir de la variation de la déformation. Numériquement cela conduit sur un pas de temps, à calculer une contrainte finale à partir de la contrainte initiale et de son accroissement fonction de  $\Delta\varepsilon$  sur le pas de temps.
- le transport de grandeurs tensorielles (cf. par exemple 6.3) : ici il s'agit du transport du tenseur contrainte calculé à  $t$  et devant être utilisé à  $t + \Delta t$ .
- l'anisotropie induite par un comportement initialement orthotrope dans un repère particulier, qui ensuite est entraîné par la matière (cf. 13)

La construction de la loi suit une méthodologie analogue à celle de la loi de "Hooke initialement orthotrope puis entraînée" cf. 10.

On s'intéresse tout d'abord à l'expression de la loi dans le repère d'anisotropie. Il s'agit ici de calculer l'incrément de contrainte sur un pas de temps  $\Delta t$ .

Supposons connu un repère d'orthotropie orthonormé nommé  $\vec{O}'_a$  par la suite (a= 1..3). Dans ce repère les relations de comportement s'écrivent :

$$\begin{aligned}\dot{\varepsilon}_{11} &= \frac{1}{E_1}(\dot{\sigma}_{11} - \nu_{12}\dot{\sigma}_{22} - \nu_{13}\dot{\sigma}_{33}) \\ \dot{\varepsilon}_{22} &= \frac{1}{E_2}(-\nu_{21}\dot{\sigma}_{11} + \dot{\sigma}_{22} - \nu_{23}\dot{\sigma}_{33}) \\ \dot{\varepsilon}_{33} &= \frac{1}{E_3}(-\nu_{31}\dot{\sigma}_{11} - \nu_{32}\dot{\sigma}_{22} + \dot{\sigma}_{33})\end{aligned}\quad (456)$$

et

$$\dot{\varepsilon}_{ab} = \frac{1}{2 \cdot G_{ab}}\dot{\sigma}_{ab} \quad \text{avec} \quad a \neq b \quad (457)$$

En pratique, ces expressions seront utilisées sous forme incrémentale sur le pas de temps  $\Delta t$  :

$$\begin{aligned}\Delta_t^{t+\Delta t}\varepsilon_{11} &= \frac{1}{E_1}(\Delta_t^{t+\Delta t}\sigma_{11} - \nu_{12}\Delta_t^{t+\Delta t}\sigma_{22} - \nu_{13}\Delta_t^{t+\Delta t}\sigma_{33}) \\ \Delta_t^{t+\Delta t}\varepsilon_{22} &= \frac{1}{E_2}(-\nu_{21}\Delta_t^{t+\Delta t}\sigma_{11} + \Delta_t^{t+\Delta t}\sigma_{22} - \nu_{23}\Delta_t^{t+\Delta t}\sigma_{33}) \\ \Delta_t^{t+\Delta t}\varepsilon_{33} &= \frac{1}{E_3}(-\nu_{31}\Delta_t^{t+\Delta t}\sigma_{11} - \nu_{32}\Delta_t^{t+\Delta t}\sigma_{22} + \Delta_t^{t+\Delta t}\sigma_{33})\end{aligned}\quad (458)$$

et

$$\Delta_t^{t+\Delta t}\varepsilon_{ab} = \frac{1}{2 \cdot G_{ab}}\Delta_t^{t+\Delta t}\sigma_{ab} \quad \text{avec} \quad a \neq b \quad (459)$$

En inversant ses relations on obtient l'accroissement  $\Delta_t^{t+\Delta t}\sigma_{ab}$  des composantes du tenseur des contraintes en fonction de l'accroissement des composantes du tenseur des

déformations. Toutes ces composantes sont exprimées dans le repère d'anisotropie. Par changement de base, les composantes  $\Delta_t^{t+\Delta t} \sigma^{ij}$  de l'accroissement des contraintes sont alors exprimées dans le repère de travail  $\vec{g}_i$  et la contrainte finale s'obtient alors via :

$$\sigma^{ij}(t + \Delta t) = \Delta_t^{t+\Delta t} \sigma^{ij} + \text{transport}_t^{t+\Delta t} \sigma^{ij}(t) \quad (460)$$

Trois types de transport sont pris en compte dans Herezh++ : le transport deux fois covariant qui est cohérent avec la dérivée de Rivlin, le transport deux fois contravariants qui est cohérent avec la dérivée d'Oldroyd et le transport mixte qui est cohérent avec la dérivée de Jauman. On se reportera à 6.3 pour une présentation détaillée.

### Remarques

- Les paramètres sont notés par analogie avec la loi de Hooke anisotrope. Néanmoins il faut noter qu'ils représentent ici un comportement tangent, contrairement au cas de la loi de Hooke où ils représentent un comportement sécant.
- Dans le cas où ces paramètres sont constants on obtient un comportement élastique réversible. Par contre lorsque ces paramètres varient, ce qui est un des intérêts d'une loi hypo-élastique, la réponse obtenue n'est a priori pas réversible. À l'aide de paramètres ainsi variables, il est possible de représenter des comportements très divers, la difficulté étant alors d'identifier correctement l'évolution de ces paramètres matériels.
- La variance des coordonnées n'a pas d'importance ici initialement, car le repère est orthonormé. Par contre, une fois déformée il faut tenir compte de l'évolution du repère.

Toujours par analogie avec la loi de Hooke anisotrope, on suppose que l'accroissement d'énergie de déformation sur un pas de temps, est convexe, ce qui conduit aux relations de symétrie :

$$\frac{-\nu_{12}}{E_1} = \frac{-\nu_{21}}{E_2}, \quad \frac{-\nu_{13}}{E_1} = \frac{-\nu_{31}}{E_3}, \quad \frac{-\nu_{23}}{E_2} = \frac{-\nu_{32}}{E_3} \quad (461)$$

Au final, le comportement dépend donc de 9 paramètres et d'un repère particulier d'orthotropie.

## 15.2 Transformations finies

Au cours de la transformation, on considère une évolution du repère initialement orthotrope.

Deux types de transport sont pris en compte (à ne pas confondre avec le transport des tenseurs). On se reportera à (13) pour la description détaillée.

Les expression 458 et 459 sont alors à utiliser dans le repère transporté  $\hat{\vec{O}}'_a$ .

## 15.3 Cas seulement déviatorique ou sphérique

Cf. 10.3

## 15.4 Compressibilité et variation de volume

On suit la même procédure que dans le cas d'un comportement de Hooke anisotrope entraîné : cf. 10.4.

## 15.5 Opérateur tangent en déformation (transport contravariant)

On part de l'expression 460 :

$$\sigma^{ij}(t + \Delta t) = \Delta_t^{t+\Delta t} \sigma^{ij} + \text{transport}_t^{t+\Delta t} \sigma^{ij}(t)$$

et on cherche à calculer l'opérateur tangent par rapport aux composantes de la déformation :  $\frac{\partial \sigma^{ij}(t+\Delta t)}{\partial \varepsilon^{kl}}$ ,  $\sigma^{ij}(t+\Delta t)$  étant les composantes dans la base naturelle  $\hat{g}_i$  et  $\varepsilon^{kl}$  étant les composantes dans la base duale  $\hat{g}^j$ . Rappelons que dans Herezh++ la base naturelle est associée à un paramétrage matériel : celui des éléments finis de référence et que ces deux bases sont duales l'une de l'autre dans les opérations de produit scalaire. Il s'agit de bases curvilignes, a priori non normées, non orthogonales.

L'opérateur tangent nécessite le calcul de l'opérateur tangent correspondant à la partie transport des composantes  $\sigma^{ij}(t)$  du tenseur des contraintes, calculées à l'incrément précédent. Cette partie est détaillée en 6.3, on s'y reportera pour les détails des calculs.

Il reste donc le calcul de  $\frac{\partial \Delta_t^{t+\Delta t} \sigma^{ij}}{\partial \varepsilon^{kl}}$ . Compte tenu de l'analogie que l'on a adoptée avec l'orthotropie élastique entraînée, on suit une procédure et des hypothèses analogues.

Tout d'abord on considère "sur un pas de temps", des coefficients matériels fixes où variants peu relativement aux déformations où aux degrés de liberté.

Les relations (456) et (457) donnent les variations du tenseur des contraintes dans le repère transporté. Comme il s'agit d'un transport contravariant du repère d'orthotropie, on exprime ces relations en coordonnées contravariantes.

$$\begin{aligned} \Delta_t^{t+\Delta t} \varepsilon^{11} &= \frac{1}{E_1} (\Delta_t^{t+\Delta t} \sigma^{11} - \nu_{12} \Delta_t^{t+\Delta t} \sigma^{22} - \nu_{13} \Delta_t^{t+\Delta t} \sigma^{33}) \\ \Delta_t^{t+\Delta t} \varepsilon^{22} &= \frac{1}{E_2} (-\nu_{21} \Delta_t^{t+\Delta t} \sigma^{11} + \Delta_t^{t+\Delta t} \sigma^{22} - \nu_{23} \Delta_t^{t+\Delta t} \sigma^{33}) \\ \Delta_t^{t+\Delta t} \varepsilon^{33} &= \frac{1}{E_3} (-\nu_{31} \Delta_t^{t+\Delta t} \sigma^{11} - \nu_{32} \Delta_t^{t+\Delta t} \sigma^{22} + \Delta_t^{t+\Delta t} \sigma^{33}) \end{aligned} \quad (462)$$

et

$$\Delta_t^{t+\Delta t} \varepsilon^{ab} = \frac{1}{2 \cdot G_{ab}} \Delta_t^{t+\Delta t} \sigma^{ab} \quad \text{avec} \quad a \neq b \quad (463)$$

En inversant les relations, on obtient une relation linéaire à coefficients supposés constants :

$$\Delta_t^{t+\Delta t} \sigma^{ab} = H_{..cd}^{ab} \Delta_t^{t+\Delta t} \varepsilon^{cd} \quad (464)$$

ou encore :

$$\Delta_t^{t+\Delta t} \sigma^{ab} = H_{..cd}^{ab} \Delta_t^{t+\Delta t} \varepsilon^{cd} \quad (465)$$

qui s'exprime dans le repère transporté  $\hat{O}'_a$  et son dual.

Le repère n'étant pas fixe, il nous faut connaître sa variation par rapport aux repères de travail :  $\hat{g}_j$  et  $\hat{g}^j$  pour accéder à l'opérateur tangent dans le repère naturel. Les relations (391) donnent ces variations.

On peut alors suivre le même raisonnement qu'en (332) en remplaçant la contrainte par son accroissement. Par les formules de changement de base on a :

$$\Delta_t^{t+\Delta t} \sigma^{ij} = \gamma'^i_{.a} \Delta_t^{t+\Delta t} \sigma^{ab} \gamma'^j_{.b} \text{ ou bien } \Delta_t^{t+\Delta t} [\sigma^{ij}] = [\gamma'^i_{.a}] [\Delta_t^{t+\Delta t} \sigma^{ab}] [\gamma'^j_{.b}]^T$$

ou encore

$$\Delta_t^{t+\Delta t} [\sigma^{ij}] = [\beta_a^{.i}]^T [\Delta_t^{t+\Delta t} \sigma^{ab}] [\beta_b^{.j}] \quad (466)$$

d'où de manière analogue à la formule (448) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Delta_t^{t+\Delta t} \sigma^{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}} &= \frac{\partial \gamma'^i_{.a}}{\partial \varepsilon_{kl}} \Delta_t^{t+\Delta t} \sigma^{ab} \gamma'^j_{.b} + \gamma'^i_{.a} \frac{\partial \Delta_t^{t+\Delta t} \sigma^{ab}}{\partial \varepsilon_{kl}} \gamma'^j_{.b} + \gamma'^i_{.a} \Delta_t^{t+\Delta t} \sigma^{ab} \frac{\partial \gamma'^j_{.b}}{\partial \varepsilon_{kl}} \\ &= \frac{\partial \beta_a^{.i}}{\partial \varepsilon_{kl}} \Delta_t^{t+\Delta t} \sigma^{ab} \beta_b^{.j} + \beta_a^{.i} \frac{\partial \Delta_t^{t+\Delta t} \sigma^{ab}}{\partial \varepsilon_{kl}} \beta_b^{.j} + \beta_a^{.i} \Delta_t^{t+\Delta t} \sigma^{ab} \frac{\partial \beta_b^{.j}}{\partial \varepsilon_{kl}} \end{aligned} \quad (467)$$

Dans cette expression, il nous faut déterminer la variation de  $\Delta_t^{t+\Delta t} \sigma^{ab}$  (composantes dans la base convectée) par rapport aux composantes du tenseur de déformation dans la base  $\hat{g}^j$ .

À l'aide de (465) on peut en déduire :

$$\frac{\partial \Delta_t^{t+\Delta t} \sigma^{ab}}{\partial \varepsilon_{kl}} = H^{ab}_{..cd} \frac{\partial \Delta_t^{t+\Delta t} \varepsilon^{cd}}{\partial \varepsilon_{kl}} \quad (468)$$

Reste à déterminer le terme  $\frac{\partial \Delta_t^{t+\Delta t} \varepsilon^{cd}}{\partial \varepsilon_{kl}}$ .

On applique la formule de changement de base (399) pour l'accroissement de déformation :

$$\Delta_t^{t+\Delta t} \varepsilon^{ab} = \gamma_n^a \hat{g}^{ni} \Delta_t^{t+\Delta t} \varepsilon_{ij} \hat{g}^{jm} \gamma_m^b = \gamma_n^a \Delta_t^{t+\Delta t} \varepsilon^{nm} \gamma_m^b \quad (469)$$

d'où en variation

$$\frac{\partial \Delta_t^{t+\Delta t} \varepsilon^{ab}}{\partial \varepsilon_{kl}} = \frac{\partial \gamma_n^a}{\partial \varepsilon_{kl}} \Delta_t^{t+\Delta t} \varepsilon^{nm} \gamma_m^b + \gamma_n^a \frac{\partial \Delta_t^{t+\Delta t} \varepsilon^{nm}}{\partial \varepsilon_{kl}} \gamma_m^b + \gamma_n^a \Delta_t^{t+\Delta t} \varepsilon^{nm} \frac{\partial \gamma_m^b}{\partial \varepsilon_{kl}} \quad (470)$$

Dans cette expression,  $\frac{\partial \gamma_n^a}{\partial \varepsilon_{kl}}$  se calcule avec les relations (391) et (398). Reste le terme  $\frac{\partial \Delta_t^{t+\Delta t} \varepsilon^{nm}}{\partial \varepsilon_{kl}}$ . On a :

$$\frac{\partial \Delta_t^{t+\Delta t} \varepsilon^{nm}}{\partial \varepsilon_{kl}} = \frac{\partial \hat{g}^{ni}}{\partial \varepsilon_{kl}} \Delta_t^{t+\Delta t} \varepsilon_{ij} \hat{g}^{jm} + \hat{g}^{ni} \frac{\partial \Delta_t^{t+\Delta t} \varepsilon_{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}} \hat{g}^{jm} + \hat{g}^{ni} \Delta_t^{t+\Delta t} \varepsilon_{ij} \frac{\partial \hat{g}^{jm}}{\partial \varepsilon_{kl}}$$

Or nous avons la relation :

$$\frac{\partial \Delta_t^{t+\Delta t} \varepsilon_{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}} = \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}} = \delta_i^k \delta_j^l \quad (471)$$

d'où

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Delta_t^{t+\Delta t} \varepsilon^{nm}}{\partial \varepsilon_{kl}} &= \frac{\partial \hat{g}^{ni}}{\partial \varepsilon_{kl}} \Delta_t^{t+\Delta t} \varepsilon_{ij} \hat{g}^{jm} + \hat{g}^{ni} \delta_i^k \delta_j^l \hat{g}^{jm} + \hat{g}^{ni} \Delta_t^{t+\Delta t} \varepsilon_{ij} \frac{\partial \hat{g}^{jm}}{\partial \varepsilon_{kl}} \\ &= \frac{\partial \hat{g}^{ni}}{\partial \varepsilon_{kl}} \Delta_t^{t+\Delta t} \varepsilon_{ij} \hat{g}^{jm} + \hat{g}^{nk} \hat{g}^{lm} + \hat{g}^{ni} \Delta_t^{t+\Delta t} \varepsilon_{ij} \frac{\partial \hat{g}^{jm}}{\partial \varepsilon_{kl}} \end{aligned} \quad (472)$$

et en intégrant explicitement les variations de la métrique on obtient une formule semblable à (402) :

$$\frac{\partial \Delta_t^{t+\Delta t} \varepsilon^{nm}}{\partial \varepsilon_{kl}} = -2 (\hat{g}^{nk} \Delta_t^{t+\Delta t} \varepsilon^{lm} + \Delta_t^{t+\Delta t} \varepsilon^{nk} \hat{g}^{ml}) + \hat{g}^{nk} \hat{g}^{lm} \quad (473)$$

ce qui finalise le calcul de l'opérateur tangent :  $\frac{\partial \sigma^{ij}(t+\Delta t)}{\partial \varepsilon^{kl}}$ ,  $\sigma^{ij}(t + \Delta t)$

## 15.6 Opérateur tangent en degré de liberté (transport contra-variant)

Comme pour le cas précédent, on considère ici sur un pas de temps, des coefficients matériels fixes où variants peu relativement aux degrés de liberté.

On part de l'expression 460 :

$$\sigma^{ij}(t + \Delta t) = \Delta_t^{t+\Delta t} \sigma^{ij} + \text{transport}_t^{t+\Delta t} \sigma^{ij}(t)$$

et on cherche à calculer l'opérateur tangent par rapport aux composantes de la déformation :  $\frac{\partial \sigma^{ij}(t+\Delta t)}{\partial ddl}$ ,  $\sigma^{ij}(t + \Delta t)$  étant les composantes dans la base naturelle  $\hat{g}_i$  et  $\varepsilon^{kl}$  étant les composantes dans la base duale  $\hat{g}^i$ .

L'opérateur tangent nécessite le calcul de l'opérateur tangent correspondant à la partie transport des composantes  $\sigma^{ij}(t)$  du tenseur des contraintes, calculées à l'incrément précédent.

On peut noter :

$$\frac{\partial \text{transport}_t^{t+\Delta t} \sigma^{ij}(t)}{\partial ddl} = \frac{\partial \text{transport}_t^{t+\Delta t} \sigma^{ij}(t)}{\partial \varepsilon_{kl}} \frac{\partial \varepsilon_{kl}}{\partial ddl} \quad (474)$$

avec  $\frac{\partial \text{transport}_t^{t+\Delta t} \sigma^{ij}(t)}{\partial \varepsilon_{kl}}$  détaillée en 6.3 .

Il reste donc le calcul de  $\frac{\partial \Delta_t^{t+\Delta t} \sigma^{ij}}{\partial ddl}$ . Ce terme peut également s'obtenir via un raisonnement analogue au calcul de l'opérateur tangent par rapport aux déformations. On aura au final successivement :

$$\frac{\partial \Delta_t^{t+\Delta t} \sigma^{ij}}{\partial ddl} = \frac{\partial \beta_a^i}{\partial ddl} \Delta_t^{t+\Delta t} \sigma^{ab} \beta_b^j + \beta_a^i \frac{\partial \Delta_t^{t+\Delta t} \sigma^{ab}}{\partial ddl} \beta_b^j + \beta_a^i \Delta_t^{t+\Delta t} \sigma^{ab} \frac{\partial \beta_b^j}{\partial ddl} \quad (475)$$

$$\frac{\partial \Delta_t^{t+\Delta t} \sigma^{ab}}{\partial ddl} = H^{ab}_{..cd} \frac{\partial \Delta_t^{t+\Delta t} \varepsilon^{cd}}{\partial ddl} \quad (476)$$

$$\frac{\Delta_t^{t+\Delta t} \varepsilon^{ab}}{\partial d d l} = \frac{\gamma_{.n}^a}{\partial d d l} \Delta_t^{t+\Delta t} \varepsilon^{nm} \gamma_{.m}^b + \gamma_{.n}^a \frac{\Delta_t^{t+\Delta t} \varepsilon^{nm}}{\partial d d l} \gamma_{.m}^b + \gamma_{.n}^a \Delta_t^{t+\Delta t} \varepsilon^{nm} \frac{\gamma_{.m}^b}{\partial d d l} \quad (477)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Delta_t^{t+\Delta t} \varepsilon^{nm}}{\partial d d l} &= \frac{\partial \hat{g}^{ni}}{\partial d d l} \Delta_t^{t+\Delta t} \varepsilon_{ij} \hat{g}^{jm} + \hat{g}^{ni} \frac{\partial \Delta_t^{t+\Delta t} \varepsilon_{ij}}{\partial d d l} \hat{g}^{jm} + \hat{g}^{ni} \Delta_t^{t+\Delta t} \varepsilon_{ij} \frac{\partial \hat{g}^{jm}}{\partial d d l} \\ &= \frac{\partial \hat{g}^{ni}}{\partial d d l} \Delta_t^{t+\Delta t} \varepsilon_{ij} \hat{g}^{jm} + \hat{g}^{ni} \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial d d l} \hat{g}^{jm} + \hat{g}^{ni} \Delta_t^{t+\Delta t} \varepsilon_{ij} \frac{\partial \hat{g}^{jm}}{\partial d d l} \end{aligned} \quad (478)$$

Les termes :  $\frac{\partial \beta_a^i}{\partial d d l}$  et  $\frac{\gamma_{.n}^a}{\partial d d l}$  sont accessibles avec les relations (405) et (420)

Les termes :  $\frac{\partial \varepsilon_{kl}}{\partial d d l}$  et  $\frac{\partial \hat{g}^{ni}}{\partial d d l}$  sont accessibles par la cinématique.

## 15.7 Energies

Une loi de type hypo-élastique anisotrope telle que définie dans Herezh++ peut dans certain cas représenter un comportement élastique voir hyper-élastique. Mais dans un cas général où les coefficients matériaux évoluent, la loi peut représenter un comportement quelconque. Aussi, on ne peut pas, sauf cas particulier, établir une distinction entre les différents types d'énergies (ou puissances) associées à la loi (élastique, plastique, visqueux). Compte tenu de cette indétermination et de l'origine de loi, on considère dans Herezh++, arbitrairement l'énergie comme élastique.

Cinquième partie

# Contraintes planes



## 16 Prise en compte de la variation de dimension transversale pour poutre, plaques et coques

### 16.1 Prise en compte de la variation d'épaisseur pour plaques et coques

Dans le cas d'étirement important de la surface médiane pour des éléments membranes plaques et coques, il est nécessaire de prendre en compte la variation d'épaisseur résultante. Nous allons tout d'abord étudier plusieurs possibilités théoriquement disponibles pour déterminer cette variation, puis la méthode implantée dans herezh++ est présentée.

On considère que l'on dispose du coefficient de compressibilité sécant " $K_s$ " ou tangent " $K_t$ " correspondant au module de compressibilité classique, d'où les relations possibles suivantes :

$$\frac{\mathbf{I}_\sigma}{3} = -P = K_s \frac{(vol - vol_0)}{vol} = K_s \times \text{variation relative de volume} \quad (479)$$

$$\frac{\dot{\mathbf{I}}_\sigma}{3} = -\dot{P} = K_t \frac{\dot{vol}}{vol} = K_t \times \text{taux de variation relative de volume} \quad (480)$$

Supposons que l'on cherche à utiliser la première relation et que l'on dispose du champ de contrainte obtenu à l'aide d'un comportement de contraintes planes. Nous avons :  $vol = h \cdot S$  avec  $h$  l'épaisseur et  $S$  la surface. Ces grandeurs sont disponibles par exemple à chaque point d'intégration. On peut donc également écrire :

$$\frac{(vol - vol_0)}{vol} = \frac{(h \sqrt{g} - h_0 \sqrt{g_0})}{h \sqrt{g}} \quad (481)$$

en remarquant que pour les plaques et coques  $\sqrt{g}$  correspond au jacobien de surface, c'est-à-dire la surface élémentaire sur laquelle on effectue le calcul. d'où :

$$h = \frac{(h_0 \sqrt{g_0})}{\sqrt{g}} \left( \frac{3 K_s}{(3 K_s - \mathbf{I}_\sigma)} \right) = \frac{(h_0 \sqrt{g_0})}{\sqrt{g}} \left( \frac{K_s}{(K_s + P)} \right) \quad (482)$$

Cette formule permet également d'obtenir la sensibilité de l'épaisseur aux degrés de liberté (ddl) en supposant que le coefficient de compressibilité sécant soit constant.

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial ddl} &= -(h_0 \sqrt{g_0} 3 K_s) \left( \frac{1}{|g| (3 K_s - \mathbf{I}_\sigma)} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial ddl} + \frac{-1}{\sqrt{g} (3 K_s - \mathbf{I}_\sigma)^2} \frac{\partial \mathbf{I}_\sigma}{\partial ddl} \right) \\ &= -(h_0 \sqrt{g_0} K_s) \left( \frac{1}{|g| (K_s + P)} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial ddl} + \frac{1}{\sqrt{g} (K_s + P)^2} \frac{\partial P}{\partial ddl} \right) \end{aligned} \quad (483)$$

Dans le cas de beaucoup de matériaux métalliques, l'utilisation du module sécant que l'on peut considéré constant semble être une bonne approximation du comportement réel. Par contre pour des matériaux très compressibles (comparativement au cisaillement) cette hypothèse peut se révéler grossière.

Dans le cas d'une compressibilité non constante, il est préférable d'utiliser le module tangent, correspondant au module de compressibilité classique. En utilisant la seconde expression (480), on obtiendra une somme de type logarithmique, d'où au final :

$$\frac{\mathbf{I}_\sigma}{3} = -P = \int_0^t \frac{d\mathbf{I}_\sigma}{3} = \int_0^t K_t(t') \frac{dvol}{vol} \quad (484)$$

Dans le cas d'un module tangent constant, on aura :

$$\frac{\mathbf{I}_\sigma}{3} = -P = K_t \log(vol) \quad (485)$$

En considérant une discrétisation du temps en incrément discret  $\Delta t$  il est possible d'adopter une formule de récurrence permettant de calculer l'épaisseur finale en fonction de l'épaisseur en début d'incrément. En utilisant par exemple une forme d'Euler implicite :  $-\dot{P}(t + \Delta t) \approx -\frac{P(t+\Delta t)-P(t)}{\Delta t}$  et  $\dot{vol}(t + \Delta t) \approx \frac{vol(t+\Delta t)-vol(t)}{\Delta t}$ , cela conduit à :

$$\begin{aligned} -P(t + \Delta t) + P(t) &= K_t \frac{(vol(t + \Delta t) - vol(t))}{vol(t + \Delta t)} = K_t \left( 1. - \frac{h(t) S(t)}{h(t + \Delta t) S(t + \Delta t)} \right) \\ &= K_t \left( 1. - \frac{h(t) \sqrt{g(t)}}{h(t + \Delta t) \sqrt{g(t + \Delta t)}} \right) \end{aligned} \quad (486)$$

ou encore :

$$h(t + \Delta t) = \frac{(h(t) \sqrt{g(t)})}{\sqrt{g(t + \Delta t)}} \left( \frac{K_t}{(K_t + (P(t + \Delta t) - P(t)))} \right) \quad (487)$$

Cette dernière formule est tout à fait analogue à la formule (482) en remplaçant le temps "0" par le temps "t" et en utilisant le module tangent, qui peut-être vu comme un module sécant local. Le calcul de variation conduit donc à une formule identique à (483)

$$\begin{aligned} \frac{\partial h(t + \Delta t)}{\partial ddl} &= -(h(t) \sqrt{g(t)} K_t) \left( \frac{1}{|g(t + \Delta t)| (K_t + P(t + \Delta t))} \frac{\partial \sqrt{g(t + \Delta t)}}{\partial ddl} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\sqrt{g(t + \Delta t)} (K_t + P(t + \Delta t))^2} \frac{\partial P(t + \Delta t)}{\partial ddl} \right) \end{aligned} \quad (488)$$

La formule (487) a nécessité la discrétisation du taux de pression et du taux de variation de volume, elle est donc approchée, en particulier le résultat final dépend de la taille des pas de temps. Par contre elle permet d'être utilisable quelque soit l'ampleur de la variation de volume et en particulier si le module de compressibilité évolue au cours du chargement. De plus, en pratique les pas de temps utilisés sont en pratique faible ce qui atténue l'importance de la discrétisation en temps. Pour ces raisons, ce sont les expressions (487) et (488) qui sont utilisées dans Herezh++ pour tous les éléments membranes et coques.

Limitations numériques :

Au cours du calcul numérique, il est important de pouvoir limiter si possible les incohérences. Dans le cas du calcul de l'épaisseur, on doit obtenir une nouvelle épaisseur "positive". Cela conduit à une condition sur l'incrément de pression.

On doit avoir :

$$\frac{h(t) \sqrt{g}(t)}{h(t + \Delta t) \sqrt{g}(t + \Delta t)} > 0 \text{ d'où } 1. - \frac{-P(t + \Delta t) + P(t)}{K_t} > 0 \quad (489)$$

ou encore

$$-P(t + \Delta t) + P(t) < K_t \rightarrow \mathbf{I}_\sigma(t + \Delta t) - \mathbf{I}_\sigma(t) < 3 K_t \quad (490)$$

Habituellement, pour les matériaux solides, cette condition est largement satisfaite compte tenu du fait que le module  $K_t$  est d'un ordre de grandeur bien plus grand que celui de  $\mathbf{I}_\sigma$ .

## 16.2 Prise en compte de la variation de section pour des poutres

Dans le cas d'étirement important de la ligne médiane pour des éléments 1D (type biellette par exemple), il est nécessaire de prendre en compte la variation de section résultante. Le calcul suit une démarche très similaire au cas de la variation d'épaisseur du paragraphe précédent que l'on suppose lu. Les choix étant les mêmes pour l'implantation, on se contente de présenter les résultats.

On considère que l'on dispose du coefficient de compressibilité tangent " $K_t$ " correspondant au module de compressibilité classique, d'où la relation.

$$\frac{\dot{\mathbf{I}}_\sigma}{3} = -\dot{P} = K_t \frac{\dot{vol}}{vol} = K_t \times \text{taux de variation relative de volume} \quad (491)$$

Nous avons :  $vol = L \cdot S$  avec "L" est la longueur de la ligne moyenne et S la surface. Ces grandeurs sont disponibles par exemple à chaque point d'intégration. Dans le cas des éléments 1D,  $\sqrt{g}$  correspond au jacobien de surface, c'est-à-dire la longueur élémentaire sur laquelle on effectue le calcul.

Comme dans le cas de l'épaisseur, on utilise une méthode de mise à jour incrémental de la section. D'où en utilisant par exemple une forme d'Euler implicite :  $-\dot{P}(t + \Delta t) \approx -\frac{P(t+\Delta t)-P(t)}{\Delta t}$  et  $\dot{vol}(t + \Delta t) \approx \frac{vol(t+\Delta t)-vol(t)}{\Delta t}$ , cela conduit à :

$$\begin{aligned} -P(t + \Delta t) + P(t) &= K_t \frac{(vol(t + \Delta t) - vol(t))}{vol(t + \Delta t)} = K_t \left( 1. - \frac{L(t) S(t)}{L(t + \Delta t) S(t + \Delta t)} \right) \\ &= K_t \left( 1. - \frac{S(t) \sqrt{g}(t)}{S(t + \Delta t) \sqrt{g}(t + \Delta t)} \right) \end{aligned} \quad (492)$$

ou encore :

$$\begin{aligned} S(t + \Delta t) &= \frac{(S(t) \sqrt{g}(t))}{\sqrt{g}(t + \Delta t)} \left( \frac{K_t}{(K_t + (P(t + \Delta t) - P(t)))} \right) \\ &= \frac{(S(t) \sqrt{g}(t))}{\sqrt{g}(t + \Delta t)} \left( \frac{3.K_t}{(3.K_t - \mathbf{I}_\sigma(t + \Delta t) + \mathbf{I}_\sigma(t))} \right) \end{aligned} \quad (493)$$

Cette formule permet également d'obtenir la sensibilité de la section aux degrés de liberté (ddl) en supposant que le coefficient de compressibilité soit constant.

$$\begin{aligned}\frac{\partial S}{\partial ddl} &= -(S_t \sqrt{g_t} 3 K_t) \left( \frac{1}{|g| (3 K_t - \mathbf{I}_\sigma)} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial ddl} + \frac{1}{\sqrt{g} (3 K_s - \mathbf{I}_\sigma)^2} \frac{\partial \mathbf{I}_\sigma}{\partial ddl} \right) \\ &= -(S_t \sqrt{g_t} K_s) \left( \frac{1}{|g| (K_t + P)} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial ddl} + \frac{1}{\sqrt{g} (K_t + P)^2} \frac{\partial P}{\partial ddl} \right)\end{aligned}\quad (494)$$

avec pour simplifier la notation :  $S = S(t + \Delta t)$  et  $\sqrt{g} = \sqrt{g(t + \Delta t)}$

La formule (493) a nécessité la discrétisation du taux de pression et du taux de variation de volume, elle est donc approchée, en particulier le résultat final dépend de la taille des pas de temps. Par contre elle permet d'être utilisable quelque soit l'ampleur de la variation de volume et en particulier si le module de compressibilité évolue au cours du chargement. De plus, en pratique les pas de temps utilisés sont en pratique faible ce qui atténue l'importance de la discrétisation en temps.

### 16.3 Comparaison 3D contraintes planes

La figure (6) présente la comparaison entre 3D et contraintes planes pour une loi de Hooke. Il s'agit d'un essai de traction simple d'une barre soit modélisée avec un seul élément hexaédrique, soit un élément 1D avec des conditions de contraintes planes qui pilotent sa variation de section, avec des conditions de blocages isostatiques. Dans la plage d'étude, jusqu'à 10% environ ce qui constitue une plage a priori déjà très importante pour la loi de Hooke, on observe que dans le cas où la mesure de déformation utilisée est la mesure logarithmique, les réponses 1D et 3D sont identiques. Par contre avec la mesure d'Almansi on observe une légère différence  $\approx 0.5\%$  due au fait que la trace du tenseur de déformation s'éloigne de la valeur de  $\log(V)$  à mesure que l'intensité de la déformation augmente.

### 16.4 Calcul du module de compressibilité

L'accès à ce module est nécessaire pour la mise à jour des épaisseurs en contraintes planes, des sections pour d'éléments 1D, et également pour le calcul des pas de temps critiques dans le cas où celui-ci est déterminé à l'aide de la vitesse des ondes volumiques.

#### 16.4.1 Cas des lois hyper-élastiques Favier et Orges

On part des deux relations suivantes

$$\frac{\mathbf{I}_\sigma}{3} = -P = K_s \log\left(\frac{\sqrt{g}}{\sqrt{g_0}}\right)\quad (495)$$

$$\frac{\dot{\mathbf{I}}_\sigma}{3} = -\dot{P} = K_t \frac{\dot{\sqrt{g}} \sqrt{g_0}}{\sqrt{g}}\quad (496)$$

En fait on peut se poser la question du choix de la mesure de la déformation volumique. Une mesure du type  $\frac{(vol-vol_0)}{vol}$  ou  $\frac{(vol-vol_0)}{vol_0}$ , est intéressante car simple, mais pose le pb

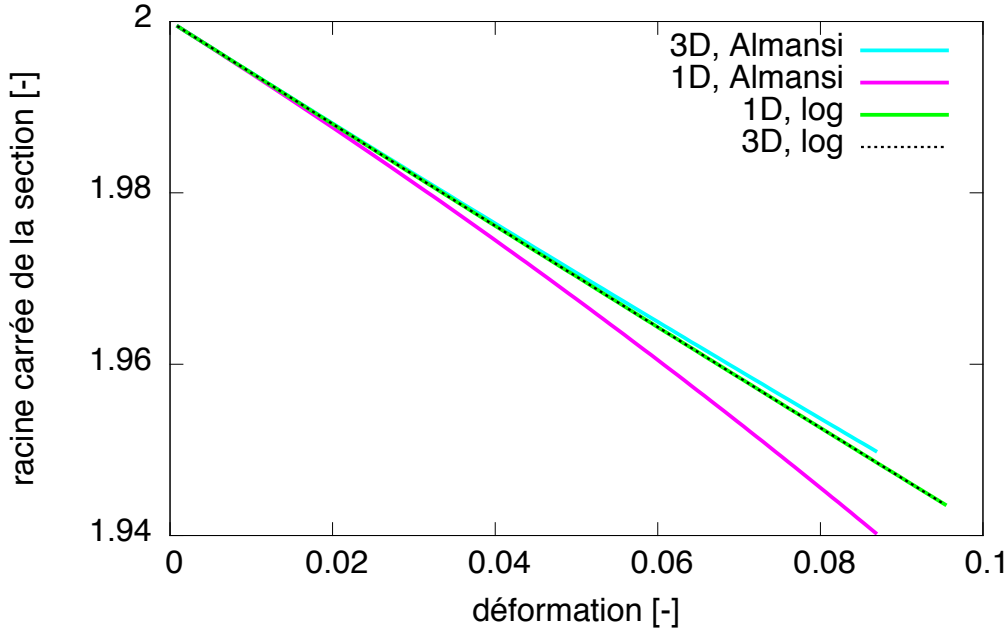


FIGURE 6 – Comparaison pour un essai de traction simple, sur la variation de la dimension transversale, entre 1D avec contraintes planes, et 3D

des grandes déformations pour lesquels on a une variation qui est très différente entre extension et compression. L'usage de la mesure log, conduit à balayer des valeurs de  $-\infty$  à  $+\infty$  ce qui donne une "certaine" symétrie à la mesure d'où une certaine commodité.

En appelant  $V = vol/vol_0 = \sqrt{g}/\sqrt{g_0}$ , le module de compressibilité correspond à :

$$K_s = \frac{V \frac{\partial w}{\partial V} + w}{\ln(V)} \quad (497)$$

Le problème est qu'à l'origine,  $\ln(V)$  est nulle. Il faut donc éventuellement, recourir à une autre formule spécifique à l'origine s'il y a division par  $\ln(V)$ .

Un premier cas de potentiel est donné par la formule suivante :

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \frac{K_{rev}}{6} \ln^2(V) \\ \frac{\partial \omega_1}{\partial V} &= \frac{K_{rev}}{3} \frac{\ln V}{V} \\ \frac{\partial^2 \omega_1}{\partial V^2} &= \frac{K_{rev}}{3} \frac{(1 - \ln V)}{V^2} \end{aligned} \quad (498)$$

ce qui conduit à la relation :

$$\begin{aligned} -p &= V \frac{\partial w}{\partial V} + w = \frac{K_{rev}}{3} \ln(V) \left( \frac{\ln(V)}{2} + 1 \right) \\ &\approx K_{rev} e = \frac{K_{rev}}{3} \mathbf{I}_\epsilon \end{aligned} \quad (499)$$

D'une manière plus précise, le module de compressibilité sera dans ce cas :

$$K_s = \frac{K_{rev}}{3} \left( \frac{\ln(V)}{2} + 1 \right) \quad (500)$$

On voit qu'ici il n'y a pas de problème à l'origine !

Dans le cas où le module dépend de la température et d'une fonction quelconque, multiplicatrice de V, on a les nouvelles formules :

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \frac{K_{rev}}{6} \ln^2(V) \times f(T) \times g(V) \\ \frac{\partial \omega_1}{\partial V} &= \frac{K_{rev}}{3} \frac{\ln V}{V} \times f(T) \times g(V) + \frac{K_{rev}}{6} \ln^2(V) \times f(T) \times \frac{\partial g(V)}{\partial V} \end{aligned} \quad (501)$$

d'où le calcul de la pression :

$$\begin{aligned} -p &= V \frac{\partial w}{\partial V} + w \\ &= \frac{K_{rev}}{3} \ln V \times f(T) \times g(V) + \frac{K_{rev}}{6} \ln^2(V) \times f(T) \times \frac{\partial g(V)}{\partial V} \\ &\quad + \frac{K_{rev}}{6} \ln^2(V) \times f(T) \times g(V) \end{aligned} \quad (502)$$

En divisant par  $\ln V$  on obtient le module sécant :

$$\begin{aligned} K_s &= \frac{K_{rev}}{3} \times f(T) \times g(V) + \frac{K_{rev}}{6} \ln(V) \times f(T) \times \frac{\partial g(V)}{\partial V} \\ &\quad + \frac{K_{rev}}{6} \ln(V) \times f(T) \times g(V) \end{aligned} \quad (503)$$

#### 16.4.2 Cas de la loi isoélastique ISO\_ELAS\_ESPO1D

Dans cette loi, la contrainte est calculée selon :  $\sigma = E(\varepsilon)\varepsilon = f(|\varepsilon|)E\varepsilon$  avec "f" une fonction quelconque. Les modules de compressibilité et de cisaillement sont déterminés à l'aide de formules analogues au cas de l'élasticité linéaire de Hooke :

$$K = \frac{f(|\varepsilon|)E\varepsilon}{3(1-2\nu)} \quad \text{et} \quad G = \frac{f(|\varepsilon|)E\varepsilon}{2(1+\nu)} \quad (504)$$

#### 16.4.3 Cas de la loi isoélastique ISO\_ELAS\_SE1D

Dans cette loi, la contrainte est calculée selon :  $\sigma = f(\varepsilon)$  avec "f" une fonction quelconque. Les modules de compressibilité et de cisaillement sont déterminés à l'aide de formules analogues au cas de l'élasticité linéaire de Hooke :

$$K = \frac{E\varepsilon}{3(1-2\nu)} \quad \text{et} \quad G = \frac{E\varepsilon}{2(1+\nu)} \quad (505)$$

avec un calcul de E qui dépend de cas particulier.

Lorsque  $|\varepsilon| > e$ , "e" étant un nombre petit (1.E-10), on adopte :

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon} \quad (506)$$

Sinon lorsque  $|\varepsilon| < e$  on utilise une petite déformation par défaut :

$$E = \frac{f(e \times \text{signe}(\varepsilon))}{e \times \text{signe}(\varepsilon)} \quad (507)$$

## 17 Lois de contraintes planes

Ce type de loi est particulièrement adapté aux membranes, plaques et coques. On considère que la direction normale à la surface est 3. Ainsi la condition s'énonce sous la forme d'une contrainte mathématique :  $\sigma^{33} = 0$ . On considère également que la direction 3 est normée, la variance selon la direction 3 est donc sans importance d'où la condition finale :

$$\sigma^{33} = \sigma_{33} = \sigma_3^3 = \sigma_{\cdot 3}^3 = 0 \quad (508)$$

La membrane ( plaque ou coque) est décrite via une interpolation dans le plan de la membrane. Les déformations naturellement disponibles via la cinématique, sont donc les déformations dans ce plan que l'on notera  $\varepsilon_{\alpha\beta}$  avec  $\alpha, \beta = 1, 2$ . L'épaisseur constitue une inconnue supplémentaire du problème. Cette épaisseur est reliée avec la déformation  $\varepsilon_{33}$  de telle manière à satisfaire la relation 508 via par exemple  $\sigma^{33}(\varepsilon_{33}) = 0$ .

### 17.1 Méthode par perturbation (explicite)

L'idée de cette première méthode considérée est relativement triviale. Par exemple pour un pas de temps "t" à "(t + Δt)" la méthode est la suivante :

1. Calcul de la contrainte à  $t + \Delta t$  à l'aide de la loi de comportement :  $\sigma^{\alpha\beta} = f(\varepsilon_{\gamma\eta}(t + \Delta t), \varepsilon_{33}(t))$
2. Comme on doit avoir  $\sigma_3^3 = 0$ , calcul de la trace prise en compte pour le calcul d'équilibre à savoir :  $\sigma_\alpha^\alpha$ ,
3. Calcul de la variation de volume via la compressibilité en utilisant la relation 485, d'où la variation d'épaisseur qui est sensée correspondre à la condition de contrainte plane.
4. Mise à jour de l'épaisseur  $h(t + \Delta t)$  et de la déformation d'épaisseur :  $\varepsilon_{33}(t + \Delta t)$
5. Calcul de l'équilibre en utilisant les  $\sigma^{\alpha\beta}(t + \Delta t)$  précédemment calculées et la nouvelle épaisseur  $h(t + \Delta t)$ .

### 17.2 Méthode de Newton (implicite)

L'idée est ici d'intégrer de manière implicite l'équation non linéaire correspondant à la condition de contrainte plane. L'algorithme est alors itératif, mais dans la pratique la convergence observée est très rapide : 1 à 2 itérations en moyenne.

L'équation  $\sigma^{33}(\varepsilon_{33}) = 0$  est résolue par une méthode de Newton.

1. Initialisation du processus avec les déformations dans le plan  $\varepsilon_{\gamma\eta}(t + \Delta t)$  qui sont constantes pendant les itérations et  $\varepsilon_{33}^{(1)}(t + \Delta t) = \varepsilon_{33}(t)$ ,  $n=1$
2. faire tant que  $\|\sigma^{33}(t + \Delta t)\| >$  une précision donnée
  - (a) Calcul de  $\sigma^{ij(n)}$  et de  $\frac{\partial \sigma^{ij(n)}}{\partial \varepsilon_{kl}}$
  - (b) Calcul de  $\delta \varepsilon_{33} = - \left[ \frac{\partial \sigma^{33(n)}}{\partial \varepsilon_{33}} \right]^{-1} \sigma^{33(n)}$
  - (c)  $\varepsilon_{33(n+1)} = \delta \varepsilon_{33} + \varepsilon_{33(n)}$  et  $n=n+1$
  - (d) Mise à jour de l'épaisseur.

À la fin du processus, après convergence, on dispose :

  - d'un champ de contraintes 3D qui satisfait la condition de contrainte plane
  - de la déformation d'épaisseur et de l'épaisseur correspondante.
3. On calcule le nouvel opérateur tangent par rapport aux déformations planes puis par rapport aux ddl, qui intègre la condition de contrainte plane (voir le paragraphe suivant).

### 17.3 Opérateur tangent final

Une fois la condition de contrainte plane (2D CP) satisfaite on peut donc écrire :

$$\frac{\partial \sigma^{33}}{\partial \varepsilon_{kl}}(2D CP) = \frac{\partial \sigma^{33}}{\partial \varepsilon_{kl}}(3D) + \frac{\partial \sigma^{33}}{\partial \varepsilon_{33}}(3D) \frac{\partial \varepsilon_{33}}{\partial \varepsilon_{kl}} \quad (509)$$

Avec (3D) qui est associé au comportement 3D.

Comme la contrainte  $\sigma^{33}$  doit toujours être nulle :

$$0 = \frac{\partial \sigma^{33}}{\partial \varepsilon_{\gamma\eta}}(3D) + \frac{\partial \sigma^{33}}{\partial \varepsilon_{33}}(3D) \frac{\partial \varepsilon_{33}}{\partial \varepsilon_{\gamma\eta}} \text{ d'où } \frac{\partial \varepsilon_{33}}{\partial \varepsilon_{\gamma\eta}} = - \left[ \frac{\partial \sigma^{33}}{\partial \varepsilon_{33}}(3D) \right]^{-1} \frac{\partial \sigma^{33}}{\partial \varepsilon_{\gamma\eta}}(3D) \quad (510)$$

L'opérateur tangent final par rapport aux déformations planes peut alors être calculé.

$$\frac{\partial \sigma^{\alpha\beta}}{\partial \varepsilon_{\gamma\eta}}(2D CP) = \frac{\partial \sigma^{\alpha\beta}}{\partial \varepsilon_{\gamma\eta}}(3D) + \frac{\partial \sigma^{\alpha\beta}}{\partial \varepsilon_{33}}(3D) \frac{\partial \varepsilon_{33}}{\partial \varepsilon_{\gamma\eta}} \quad (511)$$

On en déduit également l'opérateur par rapport aux ddl.

$$\frac{\partial \sigma^{\alpha\beta}}{\partial ddl}(2D CP) = \frac{\partial \sigma^{\alpha\beta}}{\partial \varepsilon_{\gamma\eta}}(2D CP) \frac{\partial \varepsilon_{\gamma\eta}}{\partial ddl} \quad (512)$$

## 18 Lois de contraintes doublement planes

### 18.1 Cas où le repère de travail est celui de la condition

Le repère de travail étant  $\vec{g}_i$  pour  $i=1$  à 3, il s'agit ici de conditions suivant l'axe 2 et 3 c'est-à-dire :  $\sigma^{22} = 0$  et  $\sigma^{33} = 0$ .



Ce type de loi est particulièrement adapté aux barres et poutres. On considère que les directions normales à la ligne de référence sont 2 et 3 c'est-à-dire qu'en particulier :  $\vec{g}_1 \cdot \vec{g}_2 = \vec{g}_1 \cdot \vec{g}_3 = 0$ .

Ainsi la condition s'énonce sous la forme d'une contrainte mathématique :  $\sigma^{22} = 0$  et  $\sigma^{33} = 0$ .

On considère également que les directions 2 et 3 sont normées, la variance selon les directions 2 et 3 sont donc sans importance d'où la condition finale :

$$\sigma^{22} = \sigma_{22} = \sigma_2^2 = \sigma_{.2}^2 = 0 \quad \text{et} \quad \sigma^{33} = \sigma_{33} = \sigma_3^3 = \sigma_{.3}^3 = 0 \quad (513)$$

La barre ou poutre est décrite via une interpolation suivant la ligne de référence. Les déformations naturellement disponibles via la cinématique, sont donc la déformation le long de cette ligne que l'on notera  $\varepsilon_{11}$ . La largeur et l'épaisseur (directions 2 et 3) constituent deux inconnues supplémentaires du problème. Ces grandeurs sont reliées avec les déformations  $\varepsilon_{22}$  et  $\varepsilon_{33}$  de telle manière à satisfaire la relation 513 via par exemple  $\sigma^{22} = 0$  et  $\sigma^{33} = 0$ .

Globalement, la technique de résolution suit la même méthodologie que pour les contraintes planes. En particulier on retrouve les mêmes algorithmes avec une implémentation très similaire.

## 18.2 Cas où le repère de travail est différent de celui de la condition

Le repère de travail étant  $\hat{g}_i$  pour  $i=1$  à 3 dans la configuration finale, on considère une condition de contrainte doublement plane dans une direction particulière  $\vec{V}_1$ . De plus on considère connue un repère orthonormé  $\{ M, \vec{V}_j \}$   $j = 1$  à 3, qui contient en particulier la direction  $\vec{V}_1$ . Le repère étant orthonormée on a :  $\vec{V}_j = \vec{V}^j$  et on note les composantes dans le repère de travail :

$$\vec{V}^j = V^j_{.i} \hat{g}^i = V^{ji} \hat{g}_i = \vec{V}_j = V_{ji} \hat{g}^i = V_j^{.i} \hat{g}_i \quad (514)$$

**Remarque** Bien noter que seul le second indice indique dans quel base locale les vecteurs  $\vec{V}$  sont exprimés, par contre le premier indice peut-être en haut ou en bas sans que cela ne change le résultat.

La base  $\vec{V}_j$  est donc une base propre pour le tenseur des contraintes.

On notera également les relations inverses :

$$\begin{aligned} \hat{g}^i &= \gamma^i_{.e} \vec{V}^e \quad \text{et} \quad \hat{g}_i = \beta_i^{.e} \vec{V}_e \\ \gamma^i_{.e} &= \hat{g}^i \cdot \vec{V}_e \quad \text{et} \quad \beta_i^{.e} = \hat{g}_i \cdot \vec{V}^e \end{aligned} \quad (515)$$

D'où :

$$\hat{g}^i = \gamma^i_{.e} \vec{V}^e = \gamma^i_{.e} V^e_{.k} \hat{g}^k = \delta^i_{.k} \hat{g}^k \quad (516)$$

ou encore :

$$\gamma^i_{.e} = \hat{g}^i \cdot \vec{V}^e = \hat{g}^i \cdot \hat{g}_k V_e^{.k} = V_e^{.i} \text{ c'est à dire } [\gamma^i_{.e}] = [V_e^{.i}]^T \quad (517)$$

$$[\gamma^i \cdot e] [V^e \cdot k] = [\delta^i \cdot k] \implies [V^e \cdot k] = [\gamma^i \cdot e]^{-1} \quad (518)$$

On a également :

$$\vec{V}^j \cdot \vec{V}_i = \delta^j \cdot i = V^j \cdot l \hat{g}^l \cdot V_i \cdot k \hat{g}_k = V^j \cdot l V_i \cdot k \delta^l \cdot k = V^j \cdot l V_i \cdot l \quad (519)$$

c'est-à-dire

$$[\delta^j \cdot i] = [V^j \cdot l] [V_i \cdot l] \implies [V_i \cdot l]^T = [V^j \cdot l]^{-1} = [\gamma^i \cdot e] \quad (520)$$

Sachant que l'on a aussi :  $[\gamma^i \cdot e] = [\beta_i \cdot e]^{-1T}$  on en déduit que  $[V^j \cdot l] = [\beta_i \cdot e]^T$

Une autre relation qui nous sera également utile :

$$\vec{V}_j = V_{ji} \hat{g}^i = V_{ji} \gamma^i \cdot e \vec{V}^e \text{ d'où } \vec{V}_j \cdot \vec{V}^e = \delta_j^e = V_{ji} \gamma^i \cdot e \quad (521)$$

ou encore :

$$[V_{ji}]^{-1} = [\gamma^i \cdot e] \text{ et } [V_{ji}] = [V^j \cdot i] \quad (522)$$

Le fait d'avoir une condition de traction simple suivant la direction  $\vec{V}_1$  peut s'écrire sous la forme de :

$$(\boldsymbol{\sigma} \cdot \vec{V}_2) = \vec{0} \text{ et } (\boldsymbol{\sigma} \cdot \vec{V}_3) = \vec{0} \quad (523)$$

En appelant  $\sigma'^{ij}$  les coordonnées du tenseur dans la base orthonormée,  $\vec{V}_j$  la condition de traction simple revient aux conditions scalaires :

$$\sigma'^{21} = \sigma'^{22} = \sigma'^{23} = 0 \text{ et } \sigma'^{31} = \sigma'^{32} = \sigma'^{33} = 0 \quad (524)$$

Compte tenu de la double condition identique,  $\sigma'^{32} = \sigma'^{23} = 0$  cela donne en réalité 5 conditions indépendantes.

Dans la base naturelle, ces équations scalaires peuvent s'écrire :

$$\sigma^{ij} V_{2j} = 0 \text{ et } \sigma^{ij} V_{3j} = 0 \quad i = 1..3 \quad (525)$$

D'autre part on considère que le tenseur des déformations associées comporte une seule grandeur connue : la déformation dans la direction  $\vec{V}^1$  qu'on appellera  $\epsilon'_{11}$ , le reste des composantes constitue les inconnues de la condition de traction simple.

On a donc comme déformation :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\epsilon} &= \epsilon'_{11} \vec{V}^1 \otimes \vec{V}^1 + \epsilon'_{ij} \vec{V}^i \otimes \vec{V}^j \quad (i, j) \neq (1, 1) \\ &= \epsilon'_{11} V^1 \cdot k V^1 \cdot l \hat{g}^k \otimes \hat{g}^l + \epsilon'_{ij} V^i \cdot k V^j \cdot l \hat{g}^k \otimes \hat{g}^l \quad (i, j) \neq (1, 1) \end{aligned} \quad (526)$$

Ou encore :

$$\epsilon_{kl} = \epsilon'_{11} V^1 \cdot k V^1 \cdot l + \epsilon'_{ij} V^i \cdot k V^j \cdot l \quad (i, j) \neq (1, 1) \quad (527)$$

Il en est de même pour l'incrément et la vitesse de déformation. Par exemple pour la vitesse on considère que seule la vitesse dans la direction  $\vec{V}^1$  que l'on appellera  $D'_{11}$  est connue et on a :

$$\begin{aligned}
\mathbf{D} &= D'_{11} \vec{V}^1 \otimes \vec{V}^1 + D'_{ij} \vec{V}^i \otimes \vec{V}^j \quad (i, j) \neq (1, 1) \\
&= D'_{11} V^1_{.k} V^1_{.l} \hat{g}^k \otimes \hat{g}^l + D'_{ij} V^i_{.k} V^j_{.l} \hat{g}^k \otimes \hat{g}^l \quad (i, j) \neq (1, 1)
\end{aligned} \tag{528}$$

Pour l'incrément de déformation :

$$\begin{aligned}
\Delta_t^{t+\Delta t} \boldsymbol{\epsilon} &= \Delta_t^{t+\Delta t} \epsilon'_{11} \vec{V}^1 \otimes \vec{V}^1 + \Delta_t^{t+\Delta t} \epsilon'_{ij} \vec{V}^i \otimes \vec{V}^j \quad (i, j) \neq (1, 1) \\
&= \Delta_t^{t+\Delta t} \epsilon'_{11} V^1_{.k} V^1_{.l} \hat{g}^k \otimes \hat{g}^l + \Delta_t^{t+\Delta t} \epsilon'_{ij} V^i_{.k} V^j_{.l} \hat{g}^k \otimes \hat{g}^l \quad (i, j) \neq (1, 1)
\end{aligned} \tag{529}$$

L'état de contrainte finale dépend de l'ensemble de ces grandeurs : déformation, incrément de déformation, vitesse de déformation ce qui conduit théoriquement à 15 inconnues scalaires. On va chercher à diminuer ce nombre d'inconnues.

Tout d'abord on cherche à utiliser la relation classique dans la base matérielle de travail  $\hat{g}^i$  sur un incrément de temps  $\Delta t$  :

$$D_{ij} \approx \frac{\Delta_t^{t+\Delta t} \epsilon_{ij}}{\Delta t} \tag{530}$$

Lorsque  $\Delta t$  tend vers 0, le fait d'utiliser une mesure de déformation d'Almansi conduit effectivement à la bonne valeur de la vitesse de déformation, on peut donc raisonnablement retenir cette approximation lorsque le pas de temps est petit. Cependant cette relation n'est correcte que si les bases naturelles et duales sont associées aux composantes du tenseur métrique, utilisées pour calculer les composantes du tenseur d'Almansi. Il s'agit donc ici d'un tenseur métrique associé à une base matérielle.

En effet rappelons quelques relations utiles. Soit  $\theta^i$  le paramétrage matériel associé à la base naturelle  $\vec{g}_i$ , on a :

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} (\hat{g}_{ij} - g_{ij}) \quad \text{et} \quad \hat{g}_{ij} = \hat{g}_i \cdot \hat{g}_j \quad \text{avec} \quad \hat{g}_i = \frac{\partial \hat{M}}{\partial \theta^i} \tag{531}$$

d'où

$$\begin{aligned}
\dot{\epsilon}_{ij} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 \hat{M}}{\partial \theta^i \partial t} \cdot \hat{g}_j + \hat{g}_i \cdot \frac{\partial^2 \hat{M}}{\partial \theta^j \partial t} \right) \\
&= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \vec{V}}{\partial \theta^i} \cdot \hat{g}_j + \hat{g}_i \cdot \frac{\partial \vec{V}}{\partial \theta^j} \right) \\
&\quad \text{c'est-à-dire} \\
\dot{\epsilon}_{ij} &= \frac{1}{2} (V_{i|j} + V_{j|i}) = D_{ij}
\end{aligned} \tag{532}$$

La dérivée temporelle classique des composantes covariantes de la déformation d'Almansi est naturellement égale aux composantes covariantes de la vitesse de déformation. Ceci justifie l'approximation de la relation (530) pour un incrément de temps supposé petit.

**Remarque :** cette approximation n'est pas valable pour la mesure de déformation logarithmique!

De manière cohérente on écrit également dans la base matérielle de travail  $\hat{g}^i$  :

$$\epsilon_{ij}(t + \Delta t) = \epsilon_{ij}(t) + \Delta_t^{t+\Delta t} \epsilon_{ij} \quad (533)$$

Cela revient à faire un transport deux fois covariants de  $t$  à  $t + \Delta t$  pour les composantes de déformation en cohérence avec d'une part la déformation d'Almansi et d'autre part la vitesse de déformation exprimée dans la base matérielle de travail  $\hat{g}^i$ .

Au final il reste théoriquement 5 inconnues scalaires potentielles  $\epsilon'_{ij}$  ( $i, j$ )  $\neq$  (1, 1) exprimées dans la base  $\vec{V}^i \otimes \vec{V}^j$ .

En résumé la condition de contraintes planes double (ou traction simple) dans la direction particulière  $\vec{V}^1$  revient à 5 équations scalaires dépendantes de 5 inconnues scalaires.

$$\sigma^{ij}(\epsilon'_{kl}) V_{2j} = 0 \quad i = 1..3 \text{ et } \sigma^{ij}(\epsilon'_{kl}) V_{3j} = 0 \quad i = 1 \text{ et } 3, \quad (k, l) \neq (1, 1) \quad (534)$$

### 18.2.1 Cas particulier où $\vec{V}_3$ est normal aux vecteurs $\vec{g}_\alpha$

Dans la pratique, un cas particulier à considérer, est celui où une direction connue, appelée  $\vec{V}_3$ , reste normale aux vecteurs  $\vec{g}_\alpha$  en toute circonstance.

On en déduit :

$$\epsilon'_{23} = \epsilon'_{13} = \Delta_t^{t+\Delta t} \epsilon'_{23} = \Delta_t^{t+\Delta t} \epsilon'_{13} = 0 \quad (535)$$

Le nombre d'inconnues se réduit à 3 dans ce cas. Au niveau des équations scalaires de la loi de comportement, les conditions associées  $\sigma'^{23} = 0$  et  $\sigma'^{13} = 0$  ne sont pas prises en compte ce qui conduit à partir de (524) au système réduit final suivant :

$$\sigma'^{21}(\epsilon'_{ij}) = \sigma'^{22}(\epsilon'_{ij}) = 0 \quad \text{et} \quad \sigma'^{33}(\epsilon'_{ij}) = 0 \quad (536)$$

qui dépendent de 3 inconnues :  $\epsilon'_{ij}$  avec (ij) = (22), (33), (12)

## 18.3 Méthode par perturbation (explicite, le repère de travail est celui de la condition)

Comme pour la méthode de contrainte plane, l'idée de cette première méthode considérée est relativement triviale. Par exemple pour un pas de temps "t" à "(t + Δt)" la méthode est la suivante :

1. Calcul de la contrainte à  $t + \Delta t$  à l'aide de la loi de comportement :  $\sigma^{11} = f(\epsilon_{11}(t + \Delta t), \epsilon_{22}(t), \epsilon_{33}(t))$
2. Comme on doit avoir  $\sigma_2^2 = 0$  et  $\sigma_3^3 = 0$ , calcul de la trace prise en compte pour le calcul d'équilibre à savoir :  $\sigma_1^1$ ,
3. Calcul de la variation de volume via la compressibilité en utilisant la relation 485, d'où la variation d'épaisseur et de largeur qui sont censée correspondre aux conditions  $\sigma_2^2 = 0$  et  $\sigma_3^3 = 0$ . Pour un matériau isotrope, les deux variations relatives de dimensions sont supposées égales.

4. Mise à jour de l'épaisseur  $h(t + \Delta t)$ , de la déformation d'épaisseur :  $\varepsilon_{33}(t + \Delta t)$ , de la largeur  $b(t + \Delta t)$ , de la déformation de largeur :  $\varepsilon_{22}(t + \Delta t)$ . Pour un matériau isotrope, les deux déformations sont supposées égales.
5. Calcul de l'équilibre en utilisant  $\sigma^{11}(t + \Delta t)$  précédemment calculées et des nouvelles épaisseur  $h(t + \Delta t)$  et largeur  $b(t + \Delta t)$ .

## 18.4 Méthode par perturbation (explicite, le repère de travail est différent de celui de la condition)

On reprend la méthodologie utilisée dans le cas où le repère de travail est celui de la condition :

1. Calcul des composantes de la déformation à  $t + \Delta t$  qui va être utilisée pour l'application de la loi de comportement dans le repère de travail. Pour cela on considère la déformation à  $(t + \Delta t)$  dans la direction  $\vec{V}_1$ , qui est celle que l'on peut déduire directement de la cinématique.

$$\epsilon'_{11}(t + \Delta t) = \epsilon_{kl}(t + \Delta t) \gamma^k_{.1} \gamma^l_{.1} \quad (537)$$

Les autres déformations ne sont pas connues à  $(t + \Delta t)$ , on retient pour le calcul des contraintes, les déformations à  $t$   $\epsilon'_{rt}(t)$  avec  $(r,t) \neq (1,1)$ . On en déduit un jeu de composantes initiales  $\epsilon''_{kl}$  pour la déformation dans le repère de travail :

$$\begin{aligned} \epsilon''_{kl} &= \epsilon'_{11}(t + \Delta t) V^1_{.k} V^1_{.l} + \epsilon'_{rt}(t) V^r_{.k} V^t_{.l} \\ &\text{avec } (r,t) \neq (1,1) \\ &= \epsilon_{kl}(t + \Delta t) \gamma^k_{.1} \gamma^l_{.1} V^1_{.k} V^1_{.l} + \epsilon'_{rt}(t) V^r_{.k} V^t_{.l} \end{aligned} \quad (538)$$

2. Calcul de la contrainte à  $t + \Delta t$  à l'aide de la loi de comportement. Pour cela on utilise les déformations  $\epsilon''_{kl}$

$$\sigma^{ij}(t + \Delta t) \approx \sigma^{ij}(\epsilon''_{kl}) \quad (539)$$

3. En fait seule la contrainte  $\sigma^{11}(t + \Delta t)$  devrait-être non nulle. Les autres correspondent aux composantes des efforts de cohésion dans les directions  $\vec{V}_l$   $l=2,3$  (cf. 525), qui doivent être nulles dans un état de contrainte doublement plane. De plus la base  $\vec{V}_l$   $l=1,2,3$  étant considérée orthonormée, la valeur scalaire de  $\sigma^{11}(t + \Delta t)$  correspond donc à la trace du tenseur des contraintes lorsque l'on ne tient pas compte des efforts de cohésion latéraux qui devraient-être nuls.

$$trace(\boldsymbol{\sigma}(t + \Delta t)) = I_{\boldsymbol{\sigma}} = \sigma^{11}(t + \Delta t) \approx \sigma^{ij}(\epsilon''_{kl}) \beta_i^{.1} \beta_j^{.1} \quad (540)$$

Dans le cas d'un calcul incrémental, il est sans doute plus judicieux de retenir également la forme incrémentale de l'équation :

$$\begin{aligned} \Delta trace(\boldsymbol{\sigma}) &= \Delta I_{\boldsymbol{\sigma}} \\ &= I_{\boldsymbol{\sigma}}(t + \Delta t) - I_{\boldsymbol{\sigma}}(t) \\ &= \sigma^{11}(t + \Delta t) - trace(\boldsymbol{\sigma}(t)) \\ &\approx \sigma^{ij}(\epsilon''_{kl}) \beta_i^{.1} \beta_j^{.1} - trace(\boldsymbol{\sigma}(t)) \end{aligned} \quad (541)$$

4. La relation incrémentale (492) est utilisée pour obtenir la variation de volume via la compressibilité puis la variation de section via (493). On fait alors l'hypothèse qu'entre  $t$  et  $t + \Delta t$  les déformations d'épaisseur (c'est-à-dire dans la direction  $\vec{V}_3$ ) et de largeur (c'est-à-dire dans la direction  $\vec{V}_2$ ) sont identiques. En retenant une déformation de type logarithmique on aurait ainsi :  $\ln(\hat{h}/h) = \ln(\hat{l}/l)$  ou encore  $\hat{h}/h = \hat{l}/l$  et  $\hat{S}/S \approx (\hat{h}/h)^2$

On en déduit l'évolution incrémentale de l'épaisseur en utilisant la formule (493) :

$$\hat{h} = h(t + \Delta t) \approx h(t) \sqrt{\frac{(\sqrt{g(t)})}{\sqrt{g(t + \Delta t)}} \left( \frac{3.K_t}{(3.K_t - \mathbf{I}_\sigma(t + \Delta t) + \mathbf{I}_\sigma(t))} \right)} \quad (542)$$

5. Au final, en sortie de la loi de comportement, on ne retient pour la valeur du tenseur des contraintes, que la composante non nulle  $\sigma'^{11}$  d'où dans le repère de travail :

$$\sigma^{ij} = \sigma'^{11} V_1 \cdot i V_1 \cdot j \quad (543)$$

ceci avec une largeur et épaisseur mise à jour :  $\hat{l} = l(t + \Delta t) = l \frac{h(t + \Delta t)}{h(t)}$

## 18.5 Méthode de Newton (le repère de travail est celui de la condition)

L'idée est ici d'intégrer de manière implicite l'équation non linéaire correspondant à la condition de contrainte doublement plane. L'algorithme est alors itératif, mais dans la pratique la convergence observée est très rapide : 1 à 2 itérations en moyenne.

L'équation  $\langle \sigma^{22}, \sigma^{33} \rangle (\varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}) = \langle 0, 0 \rangle$  est résolue par une méthode de Newton.

1. Initialisation du processus avec la déformation suivant la ligne médiane  $\varepsilon_{11}(t + \Delta t)$  qui est constante pendant les itérations et  $\langle \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33} \rangle^{(1)}(t + \Delta t) = \langle \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33} \rangle(t)$ ,  $n=1$
2. faire tant que  $\| \langle \sigma^{22}, \sigma^{33} \rangle(t + \Delta t) \| >$  une précision donnée
  - (a) Calcul de  $\sigma^{ij(n)}$  et de  $\frac{\partial \sigma^{ij(n)}}{\partial \varepsilon_{kl}}$  via la loi de comportement , pour  $i,j,k,l = 1,2,3$
  - (b) Calcul de  $(\delta \varepsilon_{ef}) = - \left[ \frac{\partial \sigma^{gh(n)}}{\partial \varepsilon_{ef}} \right]^{-1} (\sigma^{gh})(n)$  pour  $e,f,g,h = 2$  et  $3$
  - (c)  $\varepsilon_{ef}(n + 1) = \delta \varepsilon_{ef} + \varepsilon_{ef}(n)$  et  $n=n+1$ , pour  $e,f = 2$  et  $3$ ,
  - (d) Mise à jour de l'épaisseur et de la largeur.

À la fin du processus, après convergence, on dispose :

- d'un champ de contraintes 3D qui satisfait la condition de double contrainte plane
  - de la déformation d'épaisseur et de l'épaisseur correspondante, ainsi que la déformation de largeur et de la largeur correspondante.
3. On calcule le nouvel opérateur tangent par rapport à la déformation dans la direction médiane puis par rapport aux ddl, qui intègre les conditions de contraintes doublement plane (voir le paragraphe 18.7).

## 18.6 Méthode de Newton (repère de travail différent de celui de la condition)

Comme dans le cas précédent "en repère de condition", on cherche à intégrer de manière implicite les équations non linéaires correspondantes aux conditions de contraintes doublement planes c'est-à-dire (534).

Il s'agit d'un système de 5 équations scalaires et la méthode de Newton s'appuie sur l'utilisation d'un opérateur tangent du comportement non linéaire (a priori) de ses équations. Les 5 inconnues scalaires sont  $\epsilon'_{kl}$  avec  $k,l = 1,3$  et  $(k,l) \neq (1,1)$

L'élément principal de la méthode est donc de calculer cet opérateur tangent qui de manière générique peut s'écrire sous la forme de :

$$\frac{\partial (\sigma^{ij}(\epsilon'_{kl}) V_{mj})}{\partial \epsilon'_{rs}} \quad \text{avec } i=1,2,3; m=2,3; (k,l) \text{ et } (r,s) \neq (1,1) \quad (544)$$

La loi repose sur l'utilisation d'une loi interne 3D dont on connaît l'opérateur tangent général  $\frac{\partial \sigma^{ij}}{\partial \epsilon_{op}}$  avec  $o,p = 1..3$

Compte tenu de la relation (526) on peut alors écrire :

$$\begin{aligned} \epsilon_{kl} &= \epsilon'_{11} V^1_{.k} V^1_{.l} + \epsilon'_{tq} V^t_{.k} V^q_{.l} \quad (t,q) \neq (1,1) \\ &\text{et} \\ \frac{\partial (\sigma^{ij}(\epsilon'_{kl}) V_{mj})}{\partial \epsilon'_{rs}} &= V_{mj} \frac{\partial \sigma^{ij}(\epsilon_{kl})}{\partial \epsilon_{op}} \frac{\partial \epsilon_{op}}{\partial \epsilon'_{rs}} = V_{mj} \frac{\partial \sigma^{ij}(\epsilon_{kl})}{\partial \epsilon_{op}} V^r_{.o} V^s_{.p} \end{aligned} \quad (545)$$

À partir de ces grandeurs, on peut établir les étapes de la résolution de Newton.

1. Initialisation du processus avec la déformation suivant la ligne médiane  $\epsilon'_{11}(t + \Delta t)$  qui est constante pendant les itérations et on doit également définir les valeurs initiales des 5 composantes de déformations inconnues :

$$\epsilon'^{(1)}_{kl}(t + \Delta t) = \epsilon'_{kl}(t) \quad (k,l) \neq (1,1), n=1$$

2. faire tant que  $\|(\sigma^{ij}(\epsilon'_{kl}) V_{mj})(t + \Delta t)\| >$  une précision donnée avec  $i=1,2,3; m=2,3$ ; sachant que deux cas sont identiques :  $(i,m)=(2,3)$  et  $(i,m)=(3,2)$   
Calculer :

- (a) la déformation :

$$\epsilon_{kl}^{(n)} = \epsilon_{kl}^{(n)}(t + \Delta t) = \epsilon'_{11} V^1_{.k} V^1_{.l} + \epsilon'^{(n)}_{tq}(t + \Delta t) V^t_{.k} V^q_{.l} \quad (t,q) \neq (1,1)$$

- (b) l'incrément de déformation :  $\Delta_t^{t+\Delta t} \epsilon_{kl}^{(n)} = \epsilon_{kl}^{(n)} - \epsilon_{kl}(t)$

- (c) la vitesse de déformation :  $D_{kl}^{(n)} = \frac{\Delta_t^{t+\Delta t} \epsilon_{kl}^{(n)}}{\Delta t}$

- (d) via la loi 3D :

$$(\sigma^{ij(n)}) = \sigma^{ij(n)}(\epsilon_{kl}^{(n)}, \Delta_t^{t+\Delta t} \epsilon_{kl}^{(n)}, D_{kl}^{(n)}) \text{ et } \left[ \frac{\partial \sigma^{ij}}{\partial \epsilon_{op}} \right]^{(n)} = \left[ \frac{\partial \sigma^{ij}}{\partial \epsilon_{op}} \left( \epsilon_{kl}^{(n)}, \Delta_t^{t+\Delta t} \epsilon_{kl}^{(n)}, D_{kl}^{(n)} \right) \right]$$

avec  $i,j,o,p = 1..3$

- (e) le vecteur résidu et l'opérateur tangent :

$$(R^i_m) = (\sigma^{ij(n)} V_{mj}) \text{ et } \left[ \frac{\partial R^i_m}{\partial \epsilon'_{rs}} \right] = \left[ V_{mj} \frac{\partial \sigma^{ij(n)}}{\partial \epsilon_{op}} V^r_{.o} V^s_{.p} \right]$$

avec  $(r,s) \neq (1,1)$

- (f)  $(\delta \epsilon'_{rs}) = - \left[ \frac{\partial R^i_m}{\partial \epsilon'_{rs}} \right]^{-1} (R^i_m)$  avec  $(r,s) \neq (1,1)$
- (g)  $\epsilon'^{(n+1)}_{rs} = \delta \epsilon'_{rs} + \epsilon'^{(n)}_{rs}$  et  $n=n+1$ , pour  $r,s = 1,2$  et  $3$  et  $(r,s) \neq (1,1)$
- (h) mise à jour de l'épaisseur et de la largeur à l'aide de la déformation dans la direction de l'épaisseur et de la largeur.

À la fin du processus, après convergence, on dispose :

- des contraintes 3D qui satisfont la condition de double contrainte plane
- des déformations (appelées déformations mécaniques) qui ont permis de calculer ces contraintes,
- de la déformation d'épaisseur et de l'épaisseur correspondante, ainsi que la déformation de largeur et de la largeur correspondante.

3. On calcule le nouvel opérateur tangent par rapport à la déformation dans la direction médiane puis par rapport aux ddl, qui intègre les conditions de contraintes doublement plane (voir le paragraphe 18.8).

### 18.6.1 Cas particulier où $\vec{V}_3$ est normal aux vecteurs $\vec{g}_\alpha$

Il s'agit d'un cas particulier du cas précédent pour lequel il reste 3 inconnues scalaires :  $\epsilon'_{gh}$  avec  $(g,h) = (2,2); (3,3);$  et  $(1,2)$  et les 3 équations associées que l'on cherche à résoudre sont :  $\sigma'^{kl} = 0$  avec  $(k,l) = (2,2); (3,3);$  et  $(1,2)$  c'est-à-dire :

$$\begin{aligned}
\vec{V}_2 \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \vec{V}_2 &= V_{2i} \sigma^{ij} V_{2j} = (\vec{V}_2 \otimes \vec{V}_2) : \boldsymbol{\sigma} = (\vec{V}_2 \otimes \vec{V}_2) \cdot \boldsymbol{\sigma} = 0 \\
\vec{V}_3 \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \vec{V}_3 &= V_{3i} \sigma^{ij} V_{3j} = (\vec{V}_3 \otimes \vec{V}_3) : \boldsymbol{\sigma} = (\vec{V}_3 \otimes \vec{V}_3) \cdot \boldsymbol{\sigma} = 0 \\
\vec{V}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \vec{V}_2 &= V_{1i} \sigma^{ij} V_{2j} = (\vec{V}_1 \otimes \vec{V}_2) : \boldsymbol{\sigma} = (\vec{V}_2 \otimes \vec{V}_1) \cdot \boldsymbol{\sigma} = 0
\end{aligned}
\tag{546}$$

En reprenant le cadre général, on en déduit l'opérateur tangent :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial (V_{mi} \sigma^{ij} V_{nj})}{\partial \epsilon'_{gh}} &= V_{mi} \left( \frac{\partial \sigma^{ij}}{\partial \epsilon'_{gh}} (3D) \right) V_{nj} \\
&= \left( V_{mi} \frac{\partial \sigma^{ij}}{\partial \epsilon_{op}} \frac{\partial \epsilon_{op}}{\partial \epsilon'_{gh}} (3D) V_{nj} \right) \\
&= V_{mi} V_{nj} \frac{\partial \sigma^{ij}}{\partial \epsilon_{op}} V^g_{.o} V^h_{.p}
\end{aligned}
\tag{547}$$

pour  $(m,n)$  et  $(g,h) = (2,2); (3,3);$  et  $(1,2)$

Cela revient à ne pas considérer les cisaillements  $\sigma'^{31}$  et  $\sigma'^{32} = \sigma'^{23}$  qui, compte tenu du tenseur de déformation et d'incrément de déformation, doivent toujours être nulles.

Les étapes de la méthode de Newton sont identiques au cas précédent, en tenant compte de ce nombre réduit d'équations et d'opérateurs tangents.



## 18.7 Opérateur tangent final pour un repère de travail identique à celui de la condition

Une fois la condition de contrainte doublement plane (1D CP) satisfaite on peut donc écrire :

$$\frac{\partial \sigma^{ef}}{\partial \varepsilon_{kl}}(1D CP) = \frac{\partial \sigma^{ef}}{\partial \varepsilon_{kl}}(3D) + \frac{\partial \sigma^{ef}}{\partial \varepsilon_{gh}}(3D) \frac{\partial \varepsilon_{gh}}{\partial \varepsilon_{kl}} \quad (548)$$

Avec (3D) qui est associé au comportement 3D, et e,f = 2 et 3.

Comme les contraintes  $\sigma^{ef}$  doivent toujours être nulles :

$$0 = \frac{\partial \sigma^{ef}}{\partial \varepsilon_{11}}(3D) + \frac{\partial \sigma^{ef}}{\partial \varepsilon_{gh}}(3D) \frac{\partial \varepsilon_{gh}}{\partial \varepsilon_{11}} \text{ d'où } \frac{\partial \varepsilon_{gh}}{\partial \varepsilon_{11}} = - \left[ \frac{\partial \sigma^{ef}}{\partial \varepsilon_{gh}}(3D) \right]^{-1} \frac{\partial \sigma^{ef}}{\partial \varepsilon_{11}}(3D) \quad (549)$$

L'opérateur tangent final par rapport à la déformation suivant la direction médiane peut alors être calculé.

$$\frac{\partial \sigma^{11}}{\partial \varepsilon_{11}}(1D CP) = \frac{\partial \sigma^{11}}{\partial \varepsilon_{11}}(3D) + \frac{\partial \sigma^{11}}{\partial \varepsilon_{gh}}(3D) \frac{\partial \varepsilon_{gh}}{\partial \varepsilon_{11}} \quad (550)$$

On en déduit également l'opérateur par rapport aux ddl.

$$\frac{\partial \sigma^{11}}{\partial ddl}(1D CP) = \frac{\partial \sigma^{11}}{\partial \varepsilon_{11}}(1D CP) \frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial ddl} \quad (551)$$

## 18.8 Opérateur tangent final pour un repère de travail différent de celui de la condition

Les conditions de contrainte doublement plane (1D CP) correspondent à :  $\sigma^{ij} V_{mj} = 0$   $i=1..3$  et  $m = 2$  et  $3$ , c'est-à-dire la nullité des efforts de cohésion dans les directions  $\vec{V}_m$ ,  $m=2$  et  $3$ .

Relativement à la cinématique, la contrainte ne dépend en fait que de  $\epsilon'_{11}$ . Les autres déformations  $\epsilon'_{ij}$  sont issues du comportement local qui dépend uniquement de  $\epsilon'_{11}$  via la loi de comportement et les conditions (1D CP). On cherche donc la sensibilité des déformations  $\epsilon'_{kl}$ ,  $(k,l) \neq (1,1)$ , par rapport à  $\epsilon'_{11}$ .

On peut écrire dans le repère de travail :

$$\sigma^{ij}(\epsilon'_{11}) V_{mj} = 0 \quad i=1..3 \text{ et } m = 2 \text{ et } 3 \neq (1,1) \quad (552)$$

Cette relation devant être toujours vérifiée, ces variations sont nulles :

$$\frac{\partial \sigma^{ij}(\epsilon'_{11}) V_{mj}}{\partial \epsilon'_{11}} = 0 \quad i=1..3 \text{ et } m = 2 \text{ et } 3 \neq (1,1) \quad (553)$$

C'est-à-dire :

$$0 = V_{mj} \frac{\partial \sigma^{ij}(\epsilon'_{11})}{\partial \epsilon'_{11}}(1D CP) = V_{mj} \left( \frac{\partial \sigma^{ij}}{\partial \epsilon'_{11}}(3D) + \frac{\partial \sigma^{ij}}{\partial \epsilon'_{gh}}(3D) \frac{\partial \epsilon'_{gh}}{\partial \epsilon'_{11}} \right) \quad (554)$$

Avec (3D) qui est associé au comportement 3D, et  $(g,h) \neq (1,1)$ .

D'où :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \epsilon'_{gh}}{\partial \epsilon'_{11}} &= - \left[ V_{mj} \frac{\partial \sigma^{ij}}{\partial \epsilon'_{gh}}(3D) \right]^{-1} \left( V_{mk} \frac{\partial \sigma^{ik}}{\partial \epsilon'_{11}}(3D) \right) \\
&= - \left[ V_{mj} \frac{\partial \sigma^{ij}}{\partial \epsilon_{op}}(3D) \frac{\partial \epsilon_{op}}{\partial \epsilon'_{gh}} \right]^{-1} \left( V_{mk} \frac{\partial \sigma^{ik}}{\partial \epsilon_{o'p'}}(3D) \frac{\partial \epsilon_{o'p'}}{\partial \epsilon'_{11}} \right) \\
&= - \left[ V_{mj} \frac{\partial \sigma^{ij}}{\partial \epsilon_{op}}(3D) \quad V^g_{.o} \quad V^h_{.p} \right]^{-1} \left( V_{mk} \frac{\partial \sigma^{ik}}{\partial \epsilon_{o'p'}}(3D) \quad V^1_{.o'} \quad V^1_{.p'} \right) \quad (555)
\end{aligned}$$

Ici on ne fait pas de somme sur m, la relation doit-être vérifiée pour m= 2 et 3.

La seule grandeur non nulle étant  $\sigma'^{11} = V_{1i} \sigma^{ij} V_{1j}$  qui dépend uniquement de la déformation cinématique  $\epsilon'_{11}$ , on en déduit que les seules composantes non nulles de l'opérateur tangent relativement aux déformations cinématiques, sont  $\frac{\partial(V_{1i} \sigma^{ij} V_{1j})}{\partial \epsilon'_{11}}$  d'où :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(V_{1i} \sigma^{ij} V_{1j})}{\partial \epsilon'_{11}}(1D \ CP) &= \frac{\partial \sigma'^{11}}{\partial \epsilon'_{11}}(1D \ CP) \\
&= \frac{\partial(V_{1i} \sigma^{ij} V_{1j})}{\partial \epsilon'_{11}}(3D) + \frac{\partial(V_{1i} \sigma^{ij} V_{1j})}{\partial \epsilon'_{gh}}(3D) \frac{\partial \epsilon'_{gh}}{\partial \epsilon'_{11}} \\
&= \frac{\partial(V_{1i} \sigma^{ij} V_{1j})}{\partial \epsilon_{op}}(3D) \frac{\partial \epsilon_{op}}{\partial \epsilon'_{11}} + \frac{\partial(V_{1i} \sigma^{ij} V_{1j})}{\partial \epsilon_{op}}(3D) \frac{\partial \epsilon_{op}}{\partial \epsilon'_{gh}} \frac{\partial \epsilon'_{gh}}{\partial \epsilon'_{11}} \\
&= V_{1i} V_{1j} \frac{\partial(\sigma^{ij})}{\partial \epsilon_{op}}(3D) \quad V^1_{.o} \quad V^1_{.p} \\
&\quad + V_{1i} V_{1j} \frac{\partial(\sigma^{ij})}{\partial \epsilon_{op}}(3D) \quad V^g_{.o} \quad V^h_{.p} \quad \frac{\partial \epsilon'_{gh}}{\partial \epsilon'_{11}} \quad (556)
\end{aligned}$$

où  $\frac{\partial \epsilon'_{gh}}{\partial \epsilon'_{11}}$  est calculée avec (555)

Lorsque l'on considère une variation des contraintes dans le repère de travail, on a :

$$\begin{aligned}
\Delta \sigma^{ij} &= \Delta \sigma'^{11} V_1^{.i} V_1^{.j} \\
&\approx V_1^{.i} V_1^{.j} \frac{\partial \sigma'^{11}}{\partial \epsilon'_{11}}(1D \ CP) \Delta \epsilon'_{11} \\
&\approx V_1^{.i} V_1^{.j} \frac{\partial \sigma'^{11}}{\partial \epsilon'_{11}}(1D \ CP) \gamma^k_{.1} \gamma^l_{.1} \Delta \epsilon_{kl} \quad (557)
\end{aligned}$$

Remarque : dans tous ces développements on ne prend pas en compte la variation des vecteurs  $\vec{V}^e$  par rapport aux ddl ou encore aux déformations, les composantes  $V_e^{.i}$  et  $\gamma^i_{.e}$  sont donc constantes par rapport aux déformations.

L'opérateur tangent peut donc s'écrire à partir de (557) :

$$\frac{\partial \sigma^{ij}}{\partial \epsilon_{kl}} \approx V_1^{.i} V_1^{.j} \frac{\partial \sigma'^{11}}{\partial \epsilon'_{11}}(1D \ CP) \gamma^k_{.1} \gamma^l_{.1} \quad (558)$$

dans laquelle  $\frac{\partial \sigma'^{11}}{\partial \epsilon'_{11}}(1D \ CP)$  est calculée à l'aide de (556)

En résumé, l'opérateur tangent peut se calculer à partir des expressions (555, 556,558).

### 18.8.1 Cas particulier où $\vec{V}_3$ est normal aux vecteurs $\vec{g}_\alpha$

Dans ce cas on retient les 3 inconnues  $\epsilon'_{gh}$  avec  $(g,h) = (2,2); (3,3);$  et  $(1,2)$  et les 3 équations associées sont :  $\sigma'^{kl} = 0$  avec  $(k,l) = (2,2); (3,3);$  et  $(1,2)$  c'est-à-dire :

$$\begin{aligned}\vec{V}_2 \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \vec{V}_2 &= V_{2i} \sigma'^{ij} V_{2j} = (\vec{V}_2 \otimes \vec{V}_2) : \boldsymbol{\sigma} = 0 \\ \vec{V}_3 \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \vec{V}_3 &= V_{3i} \sigma'^{ij} V_{3j} = (\vec{V}_3 \otimes \vec{V}_3) : \boldsymbol{\sigma} = 0 \\ \vec{V}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \vec{V}_2 &= V_{1i} \sigma'^{ij} V_{2j} = (\vec{V}_1 \otimes \vec{V}_2) : \boldsymbol{\sigma} = 0\end{aligned}\tag{559}$$

En reprenant le cadre général, ces relations devant toujours être vérifiées, on en déduit :

$$\begin{aligned}\frac{\partial (V_{mi} \sigma'^{ij} V_{nj})}{\partial \epsilon'_{11}} &= 0 \\ &= V_{mi} \left( \frac{\partial \sigma'^{ij}}{\partial \epsilon'_{11}}(3D) + \frac{\partial \sigma'^{ij}}{\partial \epsilon'_{gh}}(3D) \frac{\partial \epsilon'_{gh}}{\partial \epsilon'_{11}} \right) V_{nj} \\ &= \left( V_{mi} \frac{\partial \sigma'^{ij}}{\partial \epsilon'_{11}}(3D) V_{nj} \right) + \left[ V_{mk} \frac{\partial \sigma'^{kl}}{\partial \epsilon'_{gh}}(3D) V_{nl} \right] \left( \frac{\partial \epsilon'_{gh}}{\partial \epsilon'_{11}} \right)\end{aligned}\tag{560}$$

pour  $(m,n)$  et  $(g,h) = (2,2); (3,3);$  et  $(1,2)$  ou encore :

$$\begin{aligned}\left( \frac{\partial \epsilon'_{gh}}{\partial \epsilon'_{11}} \right) &= - \left[ V_{mi} \frac{\partial \sigma'^{ij}}{\partial \epsilon'_{gh}}(3D) V_{nj} \right]^{-1} \left( V_{mk} \frac{\partial \sigma'^{kl}}{\partial \epsilon'_{11}}(3D) V_{nl} \right) \\ &= - \left[ V_{mi} \frac{\partial \sigma'^{ij}}{\partial \epsilon_{op}}(3D) V_{nj}^g V_{nj}^h \right]^{-1} \left( V_{mk} \frac{\partial \sigma'^{kl}}{\partial \epsilon_{o'p'}}(3D) V_{nl}^1 V_{nl}^1 \right)\end{aligned}\tag{561}$$

**Remarques** Il ne s'agit que des coordonnées covariantes des vecteurs  $\vec{V}$  car seule le second indice indique la variance.

Ensuite avec  $\sigma'^{11} = (\vec{V}_1 \otimes \vec{V}_1) : \boldsymbol{\sigma} = V_{1i} \sigma'^{ij} V_{1j}$  on a :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma'^{11}}{\partial \epsilon'_{11}}(1D CP) &= \frac{\partial (V_{1i} \sigma'^{ij} V_{1j})}{\partial \epsilon'_{11}}(1D CP) \\ &= V_{1i} \left( \frac{\partial \sigma'^{ij}}{\partial \epsilon'_{11}}(3D) + \frac{\partial \sigma'^{ij}}{\partial \epsilon'_{gh}}(3D) \frac{\partial \epsilon'_{gh}}{\partial \epsilon'_{11}} \right) V_{1j} \\ &= \left( V_{1i} \frac{\partial \sigma'^{ij}}{\partial \epsilon'_{11}}(3D) V_{1j} \right) + \left[ V_{1k} \frac{\partial \sigma'^{kl}}{\partial \epsilon'_{gh}}(3D) V_{1l} \right] \left( \frac{\partial \epsilon'_{gh}}{\partial \epsilon'_{11}} \right)\end{aligned}\tag{562}$$

Sixième partie  
Umat

## 19 Définition d'une loi interface de type Umat

## 20 Objectifs

L'objectif de l'interface est double :

1. permettre à l'utilisateur de définir une loi externe à Herezh++, codée dans le langage qui lui convient
2. permettre à Herezh++ de servir de loi externe, soit pour un autre processus Herezh fonctionnant en parallèle, soit pour un autre programme externe : dans notre cas, le fonctionnement a été testé avec le logiciel Abaqus. L'objectif est de permettre au programme externe d'accéder à toutes les lois d'Herezh, sans avoir à modifier l'interfaçage.

La communication entre Herezh et Herezh ou un autre programme externe s'effectue via 2 pipes nommés. L'écriture est sans attente par contre la lecture s'effectue avec attente, c'est-à-dire que tant que la lecture n'est pas complète, le programme ne poursuit pas son exécution. Ainsi, ce type de communication, outre le fait qu'il est très rapide car s'effectuant uniquement en mémoire centrale, permet de synchroniser les deux processus.

On se référera à [Rio et al., 2008] et à [RIO, 2017] pour plus d'information sur le fonctionnement d'ensemble en particulier au niveau informatique.

Cependant on notera les éléments suivants :

- à chaque échange d'information via un pipe nommé, le programme émetteur sérialise toutes les informations sous d'un unique tableau de caractères, puis le programme récepteur, dé-sérialise les informations avant de les utiliser. La structuration des données de chaque coté du pipe peuvent ainsi être totalement différentes : par exemple de simples scalaires ou tableaux de scalaires d'un coté, et des grandeurs typées sous forme d'objets de l'autre coté du pipe,
- les données de chaque processus sont ainsi parfaitement encapsulées,
- les variables internes manipulées par Herezh qui mémorisent l'histoire du matériau, reste stockées dans Herezh, ce qui en permet une gestion souple et dynamique (ex : allocation dynamique),
- les variables de passages sont strictement uniquement celle d'une Umat classique préconisée par le logiciel Abaqus.

On s'intéresse maintenant aux aspects mécaniques théoriques liés au fonctionnement de la loi Umat.

## 21 Prise en compte de la loi de comportement exprimée dans un repère orthonormé

Au sein du programme Herezh++, les lois de comportement sont formulées en coordonnées matérielles entraînées. Elle utilisent les bases naturelles et duales associées à ce paramétrage matérielle, pour l'expression des composantes des diverses grandeurs : contraintes, déformations, vitesse de déformation...

Les informations provenant de l'Umat, que l'on nommera "conteneur Umat", sont supposées être exprimées dans le repère corotationnel associé à la déformation. Ce repère  $\{M, \vec{T}_a\}$  représente une approximation du repère en rotation logarithmique. Il est ortho-normé et différent du repère absolue  $\vec{I}_a$  de travail. On a ainsi :  $\vec{T}_a = \vec{T}^a$ , la variance n'a pas d'importance.

Le conteneur Umat fourni :

— les coordonnées des tenseurs :  $\boldsymbol{\sigma}(t) = \sigma^{ij}(t) \vec{T}_i \otimes \vec{T}_j$ ,  $\boldsymbol{\epsilon}(t + \Delta t) = \epsilon_{ij}(t + \Delta t) \vec{T}^i \otimes \vec{T}^j$   
 et  $\Delta\boldsymbol{\epsilon}(t + \Delta t) = \Delta\epsilon_{ij}(t + \Delta t) \vec{T}^i \otimes \vec{T}^j$

Septième partie  
**Lois critère**

## 22 Prise en compte de critère sur une loi de comportement

### 22.1 Introduction contexte, objectif et choix pour l'implantation de critère

On entend par critère, un comportement nouveau par rapport à la loi dite initiale, qui est susceptible d'apparaître et qui dans ce cas apporte une modification importante de comportement. En ce sens, par exemple l'apparition de la plasticité entrerait dans cette définition. En fait on s'intéresse à une classe plus restreinte de critère, et de manière plus précise les critères envisagés concernent :

- l'apparition de ruptures locales ou plus finement d'endommagements,
- l'apparition de flambages locaux voir micro flambages, tels que l'apparition de plis dans une membrane en compression, ceci dans le cas ou on veut prendre en compte les conséquences de ce flambage local au niveau d'une loi qui est censée représenter le comportement homogénéisé d'un tissu avec plis.

Ensuite en fonction de l'intérêt des méthodes proposées, elles pourront être étendues à d'autres phénomènes.

Une idée générale est de définir des critères qui puissent s'appliquer le plus généralement possible, a priori indépendamment du type de loi initialement utilisé. L'indépendance a évidemment des limites et on peut penser que dans la pratique, certains paramètres du critère puissent par exemple avoir des valeurs qui dépendent de la loi initiale envisagée. Cependant d'un point de vue informatique, l'implémentation des critères est envisagée de manière à pouvoir s'appliquer sur des classes quelconques de loi de comportement. Ainsi dans les développements qui suivent, la loi n'est pas précisée et on cherche à limiter les restrictions qui pourraient lui être imposées pour l'utilisation d'un critère donné.

### 22.2 Critère permettant de prendre en compte l'apparition de plis sur une membrane

La membrane ne doit pas pouvoir supporter des efforts de compression  $\Rightarrow$  plis. Comment en tenir compte ?

1. Nécessité d'utiliser un critère d'apparition et classification des situations :  $\Rightarrow$  de nombreux travaux montrent qu'il est nécessaire de retenir un critère mixte contrainte/déformation :
  - $\sigma_{I \min} > 0$  : membrane en tension dans toutes les directions de son plan médian
  - $\varepsilon_{I \max} < 0$  : membrane relâchée dans toutes les directions de son plan médian
  - sinon plis dans la direction de  $\sigma_{I \min}$
2. si plis :  $\Rightarrow$  modification de la raideur apparente du matériau et des contraintes et déformations résultantes. En particulier les déformations dans la direction des plis ne sont plus reliées avec la loi de comportement  $\searrow$  de la stabilité de la structure
3. si relâchement complet  $\searrow$  diminution encore plus grande de la stabilité.

**Remarque** Les répercussions de l'apparition de plis sont particulièrement importantes dans le cas de structures faiblement tendus.



La figure 22.2 présente l'algorithme de traitement du critère de prise en compte de l'apparition éventuelle de plis. On observe que le critère s'applique à une loi 2D contrainte plane qui doit s'appuyer sur un comportement 3D quelconque. L'application du critère entraîne une des 3 possibilités proposées :

- soit il n'y a pas de plis, l'application du critère n'entraîne aucune conséquence sur les contraintes et sur l'opérateur tangent,
- soit il y a un tel niveau de plis que l'état résultant de la membrane est totalement relâché, dans ce cas les contraintes et l'opérateur tangent résultant sont annulés,
- soit il y a des plis dans une direction, mais il reste une direction tendue d'où une raideur et des contraintes résultantes dans cette direction. Un nouvel état d'équilibre de type contrainte plane double, est calculé dans cette direction d'où, par rapport aux résultats initiaux avant l'application du critère, de nouvelles valeurs pour les contraintes et l'opérateur tangent.

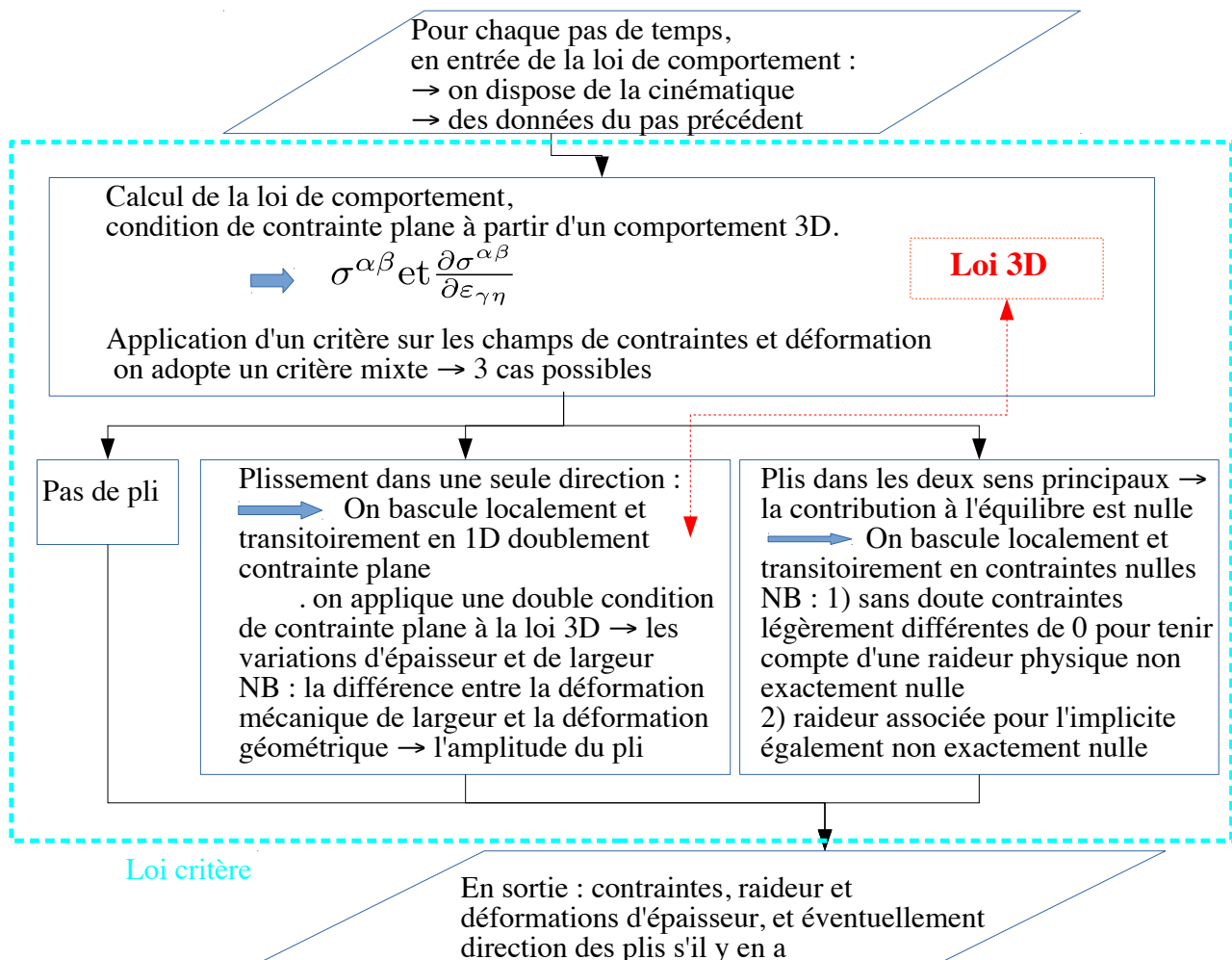


FIGURE 7 – Algorithme de traitement pour la prise en compte de plis dans le comportement mécanique macro d'une membrane

Exemple de mise en données plis\_elastique LOI\_CRITERE

```

# ..... loi de comportement avec critere .....
TYPE_DE_CRITERE_ PLISSEMENT_MEMBRANE
LOI_CONTRAINTES_PLANES # loi de contrainte plane
NEWTON_LOCAL avec_parametres_de_reglage_
nb_iteration_maxi_ 20
nb_dichotomie_maxi_ 20
tolerance_residu_ 1.e-3
fin_parametres_reglage_Algo_Newton_

```

ISOELAS

2000 0.3

fin\_loi\_contrainte\_plane # — fin de la loi de contrainte plane

fin\_loi\_interne # — fin des lois internes

fin\_loi\_critere # — fin de LOI\_CRITERE

## 22.3 Particularités liés aux lois incrémentales

Dans le cas d'une loi élastique ou hyperélastique, seules les situations initiales et finales sont à prendre en compte, l'histoire du comportement n'est pas à considérer. Ceci simplifie la résolution.

Dans le cas où la loi 3D interne au critère, comporte une partie incrémentale, il est nécessaire de considérer l'histoire du chargement et d'étudier la signification des grandeurs incrémentales nécessaires à la loi, en particulier l'incrément de déformation.

Lorsqu'il apparaît un pli, la loi de contrainte plane évolue vers une loi de contraintes doublement planes.

Le processus de résolution va nous conduire à adopter un nouveau tenseur de déformation (appelé déformation mécanique) qui se trouve déconnecter des bases  $\vec{g}_i$  et  $\hat{g}^i$  qui restent associées au paramétrage  $\theta^i$  de la cinématique. En conséquence les relations (531) ne sont plus respectés. Cela implique que (532) n'est également pas valide et qu'il n'est plus possible a priori d'adopter l'approximation (530).

On évoque maintenant une solution envisagée.

### 22.3.1 Reconstruction d'un repère matériel ad hoc

Pour palier à l'incohérence de la mesure de déformation et le repère associé, une solution pourrait-être de chercher à associer à la déformation mécanique, un nouveau paramétrage  $\theta'^i$  avec les repères  $\{M, \vec{g}'_i\}$  et  $\{\hat{M}, \hat{g}'_i\}$  tel que l'on satisfasse les relations (531) pour la déformation mécanique. En fait, la connaissance de ce nouveau paramétrage n'est pas nécessaire pour les calculs, par contre ce qui importe c'est la connaissance des repères matériels associés aux incréments de déformation mécanique.

Pour ce faire, le choix du repère  $\{\hat{M}, \hat{g}'_i = \vec{V}_i\}$  = paraît judicieux, reste à trouver le repère matériel associé  $\{M, \vec{g}'_i\}$ .

Or la seule connaissance d'un tenseur de déformation n'est pas suffisante pour déterminer le repère matériel initial, car il manque les informations de rotation, qui sont indépendantes

du tenseur de contraintes. Pour lever cette indétermination, on fait le choix pratique suivant :

1. on retient le repère matériel  $\{\hat{M}, \vec{V}_a\}$  qui est celui de la condition CP2, c'est le repère final donc à  $t + \Delta t$ ,
2. on suppose que la direction du vecteur  $\vec{V}_3$  est toujours connu, et reste normale aux deux autres vecteurs à tout moment,
3. la base  $\{\vec{V}_a\}$  est construite de manière à être toujours directe, on suppose que la bases à t est également directe.

**Remarque :** Ici la condition CP2 s'applique comme un prolongement de la condition CP, pour laquelle on connaît la direction particulière  $\vec{V}_3$ .

La première condition détermine le repère d'arrivé, qui est donc orthonormée et l'on a  $\vec{V}_a = \vec{V}^a$ .

La seconde condition impose que :

$$\epsilon'_{23} = \epsilon'_{13} = \Delta_t^{t+\Delta t} \epsilon'_{23} = \Delta_t^{t+\Delta t} \epsilon'_{13} = 0 \quad (563)$$

Cette condition permet de positionner et de calculer le repère à t en fonction de la connaissance des composantes de la variation de la déformation mécanique, restantes à savoir  $\Delta_t^{t+\Delta t} \epsilon'_{22}$ ,  $\Delta_t^{t+\Delta t} \epsilon'_{12}$  et  $\Delta_t^{t+\Delta t} \epsilon'_{33}$ .

Par définition :  $\Delta_t^{t+\Delta t} \epsilon'_{33} = 0.5(\vec{V}_3 \cdot \vec{V}_3 - \vec{g}'(t)_3 \cdot \vec{g}'(t)_3) = 0.5(1 - \|\vec{g}'(t)_3\|^2)$   
d'où l'intensité du vecteur  $\vec{g}'(t)_3$  :

$$\|\vec{g}'(t)_3\| = \sqrt{1 - 2 \cdot \Delta_t^{t+\Delta t} \epsilon'_{33}} \quad (564)$$

La direction du vecteur étant supposée toujours connue, le vecteur  $\vec{g}'(t)_3$  est ainsi complètement déterminé.

De manière équivalente, l'intensité du vecteur  $\vec{g}'(t)_2$  s'obtient par :

$$\|\vec{g}'(t)_2\| = \sqrt{1 - 2 \cdot \Delta_t^{t+\Delta t} \epsilon'_{22}} \quad (565)$$

Compte tenu de (563) le vecteur  $\vec{g}'(t)_2$  doit se situer dans le plan normal à  $\vec{g}'(t)_3$ . La projection du vecteur  $\vec{g}'(t)_2$  sur  $\vec{g}'(t)_1$  se détermine à l'aide de  $\Delta_t^{t+\Delta t} \epsilon'_{12}$

$$\begin{aligned} \Delta_t^{t+\Delta t} \epsilon'_{12} &= 0.5(\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 - \vec{g}'(t)_1 \cdot \vec{g}'(t)_2) = -0.5 \vec{g}'(t)_1 \cdot \vec{g}'(t)_2 \\ &\text{d'où} \\ \vec{g}'(t)_1 \cdot \vec{g}'(t)_2 &= -2 \cdot \Delta_t^{t+\Delta t} \epsilon'_{12} \\ &\text{ou encore avec } \alpha \text{ le cosinus de l'angle entre } \vec{g}'(t)_2 \text{ et } \vec{g}'(t)_1 \\ \cos(\alpha) &= \frac{-2 \cdot \Delta_t^{t+\Delta t} \epsilon'_{12}}{\|\vec{g}'(t)_2\| \|\vec{g}'(t)_1\|} \end{aligned} \quad (566)$$

Si de plus (cf. les hypothèses émises précédemment) on suppose que la base  $\vec{g}'(t)_i$  est directe, les relations (565) et (566) détermine complètement le vecteur  $\vec{g}'(t)_2$ .

On voit donc qu'il est possible de déterminer un repère matériel associé aux déformations dites mécaniques.

### 22.3.2 Prise en compte de plusieurs repère matériels ad hoc

Supposons deux incréments à suivre avec plis. A priori, les deux directions de plis ne sont pas forcément identiques. Cela signifie que les déformations mécaniques transversales  $\epsilon'_{22}$  et  $\epsilon'_{21}$  ramenées dans le repère de travail deviennent un mixte de déformations cinématiques et de résultats du comportement. À la suite de plusieurs incréments, on obtient a priori une déformation à  $t$  qui peut notablement être différente de la déformation cinématique. L'interrogation est alors de savoir qu'elle type d'incrément de déformation, il faut fournir à la loi de comportement. Dans notre cas, a priori pour des raisons de simplification, on propose de retenir comme incrément, l'incrément cinématique uniquement, pour la partie non mécanique, la partie mécanique restant un résultat du calcul de la loi.

Une autre solution serait de considérer la différence entre la déformation finale et la déformation mécanique enregistrée. Les difficultés engendrées seraient d'avoir à gérer l'évolution des repères matériels associés et au final la cohérence de la déformation mécanique résultante vis-à-vis de la déformation cinématique.

## 22.4 Évolution du comportement avec ou sans plis

L'application du critère plis permet de statuer sur l'état de la membrane. Dans le cas ou l'on enchaîne plusieurs incréments de calcul il faut considérer différentes combinaisons suivant le type de l'état de la membrane qui précède le nouvel incrément. Il faut donc considérer 9 combinaisons. L'objet de ce paragraphe est de préciser la méthodologie retenue pour chaque combinaison, en particulier dans le cas de l'utilisation d'une loi incrémentale.

### 22.4.1 Suite de 2 incréments sans plis

C'est le cas triviale où le critère plis n'a été utilisé que pour constater l'état tendu dans toutes les directions. L'état de contrainte est de type CP pour les 2 incréments.

Par rapport à un calcul classique en contrainte plane, on sauvegarde l'ensemble des déformations 3D, utilisées pour la loi de comportement 3D, sous l'appellation de "déformations mécaniques"  $\epsilon_{ij,mec}(t + \Delta t)$ .

### 22.4.2 Incréments sans plis suivi d'un pli dans une direction

On utilise la forme particulière des contraintes doublement planes, pour laquelle la direction des plis est différente de celle du repère de travail (cf. 18.2, 18.4, 18.6, 18.8).

On applique l'algorithme vu précédemment (cf. 22.2).

En fin de calcul avec prise en compte des plis, on obtient des déformations associées aux conditions CP2. On note  $\vec{V}_a$ ,  $a=1..3$  la base de CP2 telles que  $\vec{V}_1$  est la direction en traction (direction du pli),  $\vec{V}_3$  est la direction de l'épaisseur de la membrane et  $\vec{V}_2$  est la direction normale au pli (appelée largeur en CP2). La déformation selon la direction  $\vec{V}_1$  est une donnée d'entrée de la loi de comportement, est dépend de la cinématique des points matériels. Les déformations selon les direction  $\vec{V}_l$   $l=2,3$ , sont a priori différentes de celles issues de la cinématique. Ce sont des déformations que l'on appellera "mécaniques" car issue du comportement mécanique local au travers de la loi de comportement.

Par rapport à un calcul classique en contrainte doublement plane, on sauvegarde l'ensemble des déformations mécaniques  $\epsilon_{ij,mec}(t + \Delta t)$  associées aux conditions CP2 dans les directions  $\vec{V}_a$ ,  $a=1..3$ . Rappelons que ce sont les déformations qui ont été utilisées avec la loi 3D associée aux condition CP2.

### 22.4.3 Incréments sans plis suivi de plis dans deux directions

La membrane est alors totalement détendue. Un calcul précis nécessiterait de calculer le niveau de déformation correspondant à un tenseur de contrainte nul. Pour simplifier le calcul, on adopte (dans une première étape qui devra être validée) les simplifications suivantes :

1. Le tenseur des contraintes issues de la loi de comportement est mis à 0 de manière arbitraire (donc il ne contribue pas à l'équilibre global)
2. l'opérateur tangent  $\frac{\partial \sigma^{ij}}{\partial \epsilon_{kl}}$  est également mis à 0 de manière arbitraire (donc il ne contribue pas à la raideur globale)
3. on suppose que l'incrément  $\Delta t$  est faible, la membrane à  $t$  est donc supposée proche de l'état relâché, aussi les contraintes à  $t$  sont supposées faibles. On retient alors arbitrairement comme déformation mécanique à  $(t + \Delta t)$  celles de l'état à  $t$ , transportée de manière cohérente avec la dérivée de Jauman et manière à limiter les variations de volume éventuelles.

$$\epsilon_{ij,mec}(t + \Delta t) = \frac{1}{2} \left( {}^{t+\Delta t}{}_{..t} \epsilon_{ij,mec}(t) + {}_{..t}{}^{t+\Delta t} \epsilon_{mec}^{ij}(t) \right) \quad (567)$$

### 22.4.4 Incrément avec un pli suivi d'un calcul sans plis

Les déformations finales à  $(t + \Delta t)$  dans le plan de la membrane sont celles issues de la cinématique.

L'incrément de déformation, entre  $t$  et  $(t + \Delta t)$  est obtenu par la différence entre les déformations  $(t+\Delta t)$  et les déformations mécaniques à  $t$ , transportée de manière cohérente avec la dérivée de Jauman à  $(t + \Delta t)$ .

$$\Delta_t^{t+\Delta t} \epsilon_{kl} = \epsilon_{kl}(t + \Delta t) - \frac{1}{2} \left( {}^{t+\Delta t}{}_{..t} \epsilon_{kl,mec}(t) + {}_{..t}{}^{t+\Delta t} \epsilon_{mec}^{kl}(t) \right) \quad (568)$$

La vitesse de déformation est calculée à l'aide de la formule 530.

On dispose ainsi de la déformation, de l'incrément de déformation et de la vitesse de déformation, ce qui permet un calcul général d'une loi incrémentale.

### 22.4.5 Incrément avec un pli suivi d'un calcul avec un pli

Seule la déformation  $\epsilon'_{11}$  suivant la direction du pli  $\vec{V}_1$  est issue de la cinématique. Les autres  $\epsilon'_{rt,meca}$  sont déduites de la loi de comportement, elles sont d'ailleurs des inconnues du calcul de la lois de comportement.

On a donc :

$$\begin{aligned}\epsilon_{kl,meca}(t + \Delta t) &= \epsilon'_{11}(t + \Delta t) V_{.k}^1 V_{.l}^1 + \epsilon'_{rt,meca} V_{.k}^r V_{.l}^t \\ &\text{avec } (r,t) \neq (1,1) \\ &= \epsilon_{kl,cine}(t + \Delta t) \gamma_{.1}^k \gamma_{.1}^l V_{.k}^1 V_{.l}^1 + \epsilon'_{rt,meca} V_{.k}^r V_{.l}^t\end{aligned}\quad (569)$$

L'incrément de déformation, entre  $t$  et  $(t + \Delta t)$  est obtenu par la différence entre les déformations mécanique à  $(t + \Delta t)$  et les déformations mécaniques à  $t$ , transportée de manière cohérente avec la dérivée de Jauman à  $(t + \Delta t)$ .

$$\Delta_t^{t+\Delta t} \epsilon_{kl} = \epsilon_{kl,meca}(t + \Delta t) - \frac{1}{2} \left( \overset{t+\Delta t}{..t} \epsilon_{kl,mec}(t) + \overset{..t+\Delta t}{t} \epsilon_{kl,mec}^{\overset{kl}{}}(t) \right) \quad (570)$$

La vitesse de déformation est calculée à l'aide de la formule 530.

On dispose ainsi de la déformation, de l'incrément de déformation et de la vitesse de déformation, ce qui permet un calcul général d'une loi incrémentale.

#### 22.4.6 Incrément avec un pli suivi d'un calcul avec deux plis

L'analyse est identique au cas (22.4.3).

On applique la même méthodologie.

#### 22.4.7 Incrément avec deux plis suivi d'un calcul sans plis

L'analyse est identique au cas (22.4.4).

On applique la même méthodologie.

#### 22.4.8 Incrément avec deux plis suivi d'un calcul avec un pli

L'analyse est identique au cas (22.4.5).

On applique la même méthodologie.

#### 22.4.9 Incrément avec deux plis suivi d'un calcul avec deux plis

L'analyse est identique au cas (22.4.3).

On applique la même méthodologie.

### 22.5 Remarques sur la variation des épaisseurs

Soit une bande de matière modélisée par une membrane de forme rectangulaire ABCD :  $L_0 \times l_0$  (AB et DC alignés avec les  $x$ , BC et DA alignés avec les  $y$ ) d'épaisseur  $h_0$ . Supposons que l'on exerce une sollicitation en traction par exemple en bloquant AB selon  $y$  et en déplaçant DC selon  $y$  d'une valeur uniforme  $\Delta L$  : i.e. une sollicitation de traction simple uniforme.

On obtiendra un état de traction unidirectionnelle selon  $y$  avec  $\sigma^{yy} \neq 0$  et les autres contraintes nulles. Comme la plus petite valeur propre dans le plan  $\sigma_{II}$  est nulle, des plis peuvent éventuellement apparaître suivant  $x$ . Si aucune condition n'est imposée dans

la direction  $x$ , l'équilibre mécanique de la membrane plissée est identique à celui de la structure non plissée.

La loi plis a pour objectif de s'appliquer au matériau plissé vu comme une structure plane non plissée. Du coup :

- si la structure physique reste plane, la nouvelle épaisseur et la nouvelle largeur de la membrane seront celles qui correspondent aux dimensions initiales modifiées par les déformations nécessaires pour obtenir les contraintes transversales nulles, ce qui est le cas classique.
- si la structure ondule, la largeur en l'absence de condition particulière selon  $x$ , peut-être quelconque. Se pose alors le problème du calcul de l'épaisseur de la membrane, vue uniquement sous sa forme projetée, que l'on doit prendre en compte pour calculer la section transversale à l'effort, c'est-à-dire la section  $xz$ . Cette section est nécessaire pour calculer l'effort totale de traction :  $F_y = \sigma^{yy} \times largeur \times épaisseur$ . Cet effort est nécessaire pour calculer l'équilibre de la structure !

Dans ce contexte, deux types d'épaisseurs sont à considérer :

1. l'épaisseur physique  $h$  de la membrane qui ondule. Cette épaisseur dans le cas des comportements classiques, va diminuer avec la sollicitation de traction. L'épaisseur finale dépend de l'épaisseur initiale  $h_0$  modifiée par la déformation d'épaisseur nécessaire pour obtenir  $\sigma^{zz}(\varepsilon_{33}) = 0$ .
2. l'épaisseur homogénéisée  $h_{hom}$  qui, associée à la largeur géométrique de la bande ondulée  $l_{geom}$  doit conduire à la force correcte de traction.

Dans le cas d'une mesure de déformation logarithmique, en supposant que l'on dispose du coefficient de compressibilité, on a :

$$\frac{trace(\boldsymbol{\sigma})}{3} = K \times \ln\left(\frac{v}{v_0}\right) = K \left( \ln\left(\frac{L}{L_0}\right) + \ln\left(\frac{l}{l_0}\right) + \ln\left(\frac{h}{h_0}\right) \right) \quad (571)$$

La longueur de la bande  $L$  est identique pour les cas plissé ou non. Par contre la section transversale à considérer est pour le cas non plissé :  $h \times l$  alors que pour le cas plissé c'est :  $h_{hom} \times l_{geom}$ . Pour avoir un volume (ou une section transversale) identique on doit considérer :

$$h_{hom} = \frac{h \times l}{l_{geom}} \quad (572)$$

Dans le cas d'un calcul éléments finis, la surface géométrique est discrétisée par des éléments membranes et on dispose donc des déformations géométriques selon les axes 1 et 2 : i.e.  $\frac{L}{L_0}$  et  $\frac{l_{geom}}{l_{geom,0}}$ . On peut donc ré-écrire la formule 571 selon :

$$\frac{trace(\boldsymbol{\sigma})}{3} = K \left( \ln\left(\frac{L \times l_{geom}}{L_0 \times l_{geom,0}}\right) + \ln\left(\frac{h_{hom}}{h_{hom,0}}\right) \right) \quad (573)$$

d'où :

$$h_{hom} = h_{hom,0} \times \exp\left(\frac{trace(\boldsymbol{\sigma})}{3K} - \ln\left(\frac{L \times l_{geom}}{L_0 \times l_{geom,0}}\right)\right) \quad (574)$$

La conséquence de cette formule est que suivant la valeur du plissement (arbitraire) cela conduit à une largeur  $l_{geom}$  arbitraire et donc une épaisseur homogénéisée arbitraire. En

particulier si  $\Delta l_{geom} = l_{geom} - l_{geom,0}$  est bien plus petit que  $\Delta l = l - l_0$ , ce qui est normale dans le cas d'apparition de plis, on obtient une épaisseur homogénéisée qui augmente !

Dans le cas d'Herezh++, la grandeur  $L \times l_{geom}$  correspond à  $\sqrt{g(t + \Delta t)}$  et de même  $L_0 \times l_{geom,0} = \sqrt{g(t)}$ .

Dans le cas d'une version incrémentale, en utilisant le module de compressibilité tangent "K<sub>t</sub>", on retrouve une formule analogue à (487) (on se reportera à son calcul pour plus d'information) :

$$h_{hom}(t + \Delta t) = \frac{(h_{hom}(t) \sqrt{g(t)})}{\sqrt{g(t + \Delta t)}} \left( \frac{K_t}{(K_t + (P(t + \Delta t) - P(t)))} \right) \quad (575)$$

et pour le calcul de variation en utilisant une formule identique à (488)

$$\begin{aligned} \frac{\partial h_{hom}(t + \Delta t)}{\partial ddl} = & -(h_{hom}(t) \sqrt{g(t)} K_t) \left( \frac{1}{|g(t + \Delta t)| (K_t + P(t + \Delta t))} \frac{\partial \sqrt{g(t + \Delta t)}}{\partial ddl} \right. \\ & \left. - \frac{1}{\sqrt{g(t + \Delta t)} (K_t + P(t + \Delta t))^2} \frac{\partial P(t + \Delta t)}{\partial ddl} \right) \end{aligned} \quad (576)$$

De manière pratique, lors de l'exploitation des résultats sous Herezh++ on fera attention à ne pas confondre :

- l'épaisseur homogénéisée disponible au niveau de l'élément sous forme d'une épaisseur moyenne
- et l'épaisseur locale du matériau, disponible au point d'intégration, au travers de la loi de comportement.



Huitième partie  
**Thermique**

## 23 Résolution d'un problème classique de thermique

### 23.1 Équation locale d'équilibre

On se place dans le cadre classique d'une thermique isotrope avec un comportement statique et transitoire.

Dans le cas où la pression est approximativement constante, l'enthalpie peut s'exprimer sous la relation :

$$H(t, M) = \int_0^T C_p(\tau) d\tau \quad (577)$$

$C_p(T)$  est la chaleur massique à pression constante. L'équation bilan devient :

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} + \rho C_p \vec{V} \cdot \vec{grad}(T) - \text{div}(\lambda \vec{grad}(T)) = \rho C_p \frac{dT}{dt} - \text{div}(\lambda \vec{grad}(T)) = \dot{Q}_T \quad (578)$$

"T" : température (°K) ,  $\lambda$  conductivité thermique ( $\text{W.m}^{-1}\text{K}^{-1}$ ),  $\dot{Q}_T$  représente de terme d'apport volumique de chaleur, le terme source classique.

On se place dans le cas d'un volume de matière que l'on suit, le terme de transport disparaît et on obtient l'équation classique.

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} - \text{div}(\lambda \vec{grad}(T)) = \dot{Q}_T \quad (579)$$

que l'on détaille en :

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} - \lambda \Delta(T) - \vec{grad}(\lambda) \cdot \vec{grad}(T) = \dot{Q}_T \quad (580)$$

Cette équation est utile par exemple lorsque la conductivité dépend de la position géométrique. Si de plus la conductivité est constante, le terme  $\vec{grad}(\lambda)$  disparaît.

Lorsque  $\lambda$  dépend de la température :  $\vec{grad}(\lambda) = \frac{\partial \lambda}{\partial T} \vec{grad}(T)$  d'où :

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} - \lambda \Delta(T) - \frac{\partial \lambda}{\partial T} \vec{grad}(T) \cdot \vec{grad}(T) = \dot{Q}_T \quad (581)$$

Dans le cas d'un matériau anisotrope, le scalaire  $\lambda$  devient un tenseur d'ordre 2, symétrique  $\boldsymbol{\lambda}$ .

### 23.2 Formulation variationnelle

La formulation faible s'écrit dans le cas d'un matériau anisotrope et d'un volume matière  $D$  :

$$\int_D \rho C_p \dot{T} \overset{*}{T} dv + \int_D \vec{grad}(T) \cdot \boldsymbol{\lambda} \cdot \vec{grad}(\overset{*}{T}) dv = \int_D \dot{Q}_T \overset{*}{T} dv + \int_{\partial D} \Phi \overset{*}{T} ds \quad (582)$$

qui doit-être vérifiée quelque soit les fonctions tests  $\overset{*}{T}$  et où  $\Phi$  est le flux imposé sur les frontières  $\partial D$  de diverses manières.

On retient une interpolation nodale similaire au cas de la mécanique, pour la température :

$$T = T^r \varphi_r(\theta^i) \text{ et } \overset{*}{T} = \overset{*}{T}^s \varphi_s(\theta^i) \quad (583)$$

Neuvième partie  
**Contact**

## 24 Prise en compte des conditions limites de contact

### 24.1 Réponse à la question : le point est-il intérieur à l'élément ?

Soit un point  $M$  et un élément fini  $E$ , une question qui est souvent posée au cours de la résolution de la conditions de contact est : le point est-il intérieur à l'élément ?

L'option retenue est dans une première étape de privilégier la précision par rapport à la vitesse du calcul.

Le test est effectué dans l'élément de référence. Pour ce faire on détermine les coordonnées du point par rapport au repérage curviligne de l'élément de référence, à l'aide d'une méthode itérative de type Newton. Ensuite le test est effectué aisément sur les coordonnées locales (curvilignes). Par exemple pour un hexaèdre le test se résume à :  $|\theta^i| < 1$ .

Soit  $M_{ref}$  le point origine de l'élément de référence. Ce dernier a des coordonnées curvilignes nulles  $\theta^i = 0$ . L'objectif est donc de trouver les coordonnées curvilignes  $\theta^i$  correspondants à  $M_{ref} \vec{M}$ . Pour cela on utilise la boucle suivante :

- Initialisation :  $\theta^i = 0$
- boucle tant que  $||\Delta\theta^i|| > \varepsilon$  faire
  - calcul de la base locale  $\vec{g}_i$  au point  $A(\theta^i)$
  - calcul de  $\Delta\theta^i = A\vec{M}.\vec{g}_i$ ,
  - $\theta^i_+ = \Delta\theta^i$

Le point A ainsi déterminé représente au final la projection de M dans le repérage de référence. Dans le cas d'éléments volumiques, à convergence A et M sont confondus, par contre dans le cas d'un élément surfacique en 3D,  $A\vec{M}$  représente le vecteur normal à la surface passant par M. Il est alors possible de vérifier la condition d'appartenance à la coque (ou plaque) :  $||A\vec{M}|| < h/2$  avec h l'épaisseur de la coque au point A, dont la position est supposée être au niveau de la surface médiane.

**Remarque :** Un point M très éloigné de l'élément, peut conduire à un repère local inexploitable, par exemple dans le cas d'éléments quadratiques. On se limite donc, aux repères locaux calculés strictement dans l'élément.

### 24.2 Création des éléments de frontière

Tout d'abord une explication sur la terminologie, on appelle frontières de l'élément les frontières naturelles c'est-à-dire :

- pour les éléments 1D : les noeuds aux extrémités en monde 1D, sinon également l'élément en monde 2D et 3D,
- pour les éléments 2D : les arrêtes de l'élément en monde 2D, sinon également la surface de l'élément en monde 2D et 3D,
- pour les éléments 3D : les surfaces externes de l'élément.

En 3D, les arrêtes des éléments surfaciques représentent à l'aide de la donnée d'épaisseur, la surface latérale de l'élément. Les arrêtes des éléments linéiques représentent à l'aide des données de la section générique, la surface latérale de l'élément, et de même pour les points extrêmes.

## 24.3 Eléments de Contact

Une remarque générale : il serait théoriquement possible de traiter le contact en examinant à chaque instant si les noeuds projectile sont interne aux éléments cibles. Cette procédure est très lourde, et on la réserve aux phases d'initialisation. Une fois déterminé un contact c'est-à-dire un couple noeud - face (ou ligne) d'élément, il est plus avantageux a priori de suivre le noeud en contact tout au long de son déplacement en gardant, d'un pas de temps à l'autre, le souvenir de la face (ou ligne) avec lequel il est en contact. On définit donc des éléments de contact constitué d'un noeud et d'une face (ou une ligne).

## 24.4 Pénalisation

L'idée de la pénalisation est d'introduire des efforts de réaction proportionnelle à la pénétration. L'effort s'exerce d'une part sur le noeud qui pénètre, et d'autre part sur la face (ou la ligne) de la frontière qui est impactée. Se pose alors de problème de la répartition de l'effort sur la cible.

Le problème n'a pas qu'une seule solution. Une première idée serait de répartir l'effort sur les différents noeuds en fonction de la distance du noeud au point impacté. La distance euclidienne utilisant des carrés et des racines carrées, peut se révéler relativement coûteuse au final sur un grand nombre de point impacté, en particulier si l'on veut déterminer un opérateur tangent par rapport aux degrés de liberté du système. En conséquence, la solution retenue est d'utiliser une expression moins précise, mais plus simple et rapide :

$$\vec{F}^r = \frac{\sum_a |X^{ar}| \vec{F}^a}{\sum_s \sum_b |X^{bs}|} \quad (584)$$

### 24.4.1 Adaptation du facteur de pénalité en fonction de la raideur des matériaux

Le coefficient de pénalisation doit être adapté à la raideur des matériaux en contact. Un facteur trop faible induit une pénétration importante non réaliste. Un facteur trop élevé va avoir tendance à "écraser" les autres constituants de l'équilibre. Nous allons examiner différentes propositions.

La solution retenue par le logiciel LS-DYNA est d'utiliser un facteur de pénalisation fonction du module de compressibilité du matériau d'une part, et de dimensions géométriques d'autre part. Pour les éléments volumiques, la formule suivante est proposée :

$$\alpha_{se} = \frac{f K_e A_{se}^2}{V_e} \quad (585)$$

où  $\alpha_e$  est le facteur de pénalité relatif à la surface "s" de l'élément "e", "f" est un facteur d'ajustement fixé par défaut à 0.1,  $K_e$  est le module de compressibilité de l'élément "e",  $A_{se}$  est la surface de face en contact,  $V_e$  est le volume de l'élément.

Dans le cas de l'impact sur un élément coque ou plaque de surface  $A_e$ , dont le module de compressibilité volumique vaut  $K_e$  on a :

$$\beta = \frac{K_e A_e}{\max(\text{distance entre les noeuds})}$$

### 24.4.2 Adaptation du facteur de pénalité à une zone d'accostage

L'idée est de prendre en compte une zone dite d'accostage, qui permet d'avoir une régularisation de l'apparition de l'effort de contact. Soit l'évolution suivante :

$$\begin{aligned} \beta &= 0 \text{ pour } g > e \\ \beta &= 1 \text{ pour } g < -e \\ \beta &= \frac{1}{4} \frac{(g - e)^2}{e^2} \text{ pour } |g| \leq e \end{aligned} \quad (586)$$

avec "e" la valeur de la zone d'accostage, et g la valeur de la pénétration.

$$g = M_{t+\Delta t} \vec{P} \cdot \vec{N} \quad (587)$$

$M_{t+\Delta t}$  : position actuelle du noeud esclave,  $P$  le point de contact : égal à l'intersection de la droite  $M_t M_{t+\Delta t}$  lors de la pénétration, et ensuite valant la projection de  $M_{t+\Delta t}$  sur la surface maître,  $\vec{N}$  la normale à la surface maître au point P.

$\beta$  est alors un facteur multiplicatif, utilisé pour calculer le facteur final de pénalisation. Il est possible de tenir compte de la variation de  $\beta$  par rapport aux degrés de liberté de l'élément de contact, via sa dépendance à g. Par exemple pour l'évolution proposée en (586) on a :

$$\begin{aligned} \frac{d\beta}{dg} &= 0 \text{ pour } |g| > e \\ \frac{d\beta}{dg} &= \frac{1}{2} \frac{(g - e)}{e^2} \text{ pour } |g| \leq e \end{aligned} \quad (588)$$

## 24.5 Frottement

Le frottement intervient lors du contact entre deux matériaux. Les paramètres matériaux dépendent en général du couple de matériaux en présence. Dans le cas d'Herezh++, le contact est simulé au travers d'"éléments de contact" qui sont constitué d'un noeud, appelé "noeud projectile" et d'une surface "cible". On parle également de "noeud esclave" et surface maître. La surface est toujours constituée par une frontière d'un élément fini. La loi de frottement est donc associée à "cet" élément fini.

Les éléments de contact se créent et disparaissent au gré de l'apparition ou non de contact.

Parmi les différentes lois de frottement disponibles, la loi dite de Coulomb est la plus classique. C'est la première loi de frottement implanté. L'objectif d'une loi de frottement est de déterminer les efforts de frottement en fonction du déplacement ou de la vitesse.

### 24.5.1 Loi de Coulomb

La loi de Coulomb est une loi phénoménologique qui est largement employée. On distingue la loi classique et la loi régularisée.

Dans le cas classique, deux types de régime peuvent survenir : soit les points en contact ne glissent pas l'un par rapport à l'autre, c'est le contact collant (stick contact), soit

il y a glissement (sliding). Le comportement est régi par “le coefficient de frottement” qui détermine le cône de frottement. La force de contact est telle qu’elle doit toujours demeurer à l’intérieur du cône : strictement dans le cas du contact collant, sur le cône dans le cas du glissement. Dans ce dernier cas on a la relation :

$$\vec{F}_T = -\mu \|\vec{F}_N\| \cdot \frac{\vec{V}_{(rt)}}{\|\vec{V}_{(rt)}\|} \quad (589)$$

$\vec{F}_T$  est la force tangentielle,  $\mu$  est le coefficient de frottement qui dépend du couple de matériau en contact,  $\vec{F}_N$  est la force normale, et  $\vec{V}_{(rt)}$  est la vitesse relative tangentielle du point en contact.

Le coefficient de frottement peut également dépendre de la vitesse : en général au démarrage le coefficient est plus important que lorsque le frottement est en régime établi. Une modélisation de cette dépendance peut s’exprimer sous la forme suivante :

$$\mu(v) = \mu_S + (\mu_S - \mu_C) \cdot e^{-c \cdot v} \quad (590)$$

où  $\mu_S$  est le frottement statique,  $\mu_C$  est le frottement cinématique,  $v = \|\vec{V}_{(rt)}\|$  est l’intensité de la vitesse relative,  $\mu(v)$  est le coefficient variable.

La loi de Coulomb classique introduit une indétermination lorsque l’on se trouve dans le cône de frottement. Ceci peut-être résolu par différentes méthodes générales (cf. théorie du contact), mais il est également possible d’utiliser une loi de contact dite “régularisée” qui permet d’éviter cette indétermination. Dans le cas d’un frottement régularisé, la relation  $\vec{F}_T = f(\vec{V}_{rt})$  est toujours vérifiée (il n’y a pas deux régimes). Cependant la forme de la fonction “f” tend à reproduire le fonctionnement initial de la loi classique de Coulomb. Normalement, dû au fait qu’il n’y ait plus d’indétermination, le calcul global est plus robuste.

Dans le cas d’un calcul régularisé, on adopte le comportement suivant :

$$\vec{F}_T = -\mu \cdot \varphi(v) \|\vec{F}_N\| \cdot \frac{\vec{V}_{(rt)}}{\|\vec{V}_{(rt)}\|} \quad (591)$$

où la fonction  $\varphi(v)$  peut prendre plusieurs formes. Les formes implantées sont extraites de l’ouvrage de Peter Wriggers (Computational Contact Mechanics, Wiley, ISBN 0-471-49680-4).

$$\varphi_1(v) = \frac{v}{\sqrt{(v^2 + \varepsilon^2)}} \quad (592)$$

$$\varphi_1(v) = \tanh\left(\frac{v}{\varepsilon}\right) \quad (593)$$

$$\varphi_1(v) = \begin{cases} -1 & \text{if } v < -\varepsilon \\ \frac{v}{2\varepsilon} & \text{if } -\varepsilon \leq v \leq \varepsilon \\ 1 & \text{if } v > \varepsilon \end{cases} \quad (594)$$

La première fonction est qualifiée par l’auteur de “square root regularization”, la seconde de “hyperbolic tangent regularization” la dernière de “piecewise polynomial regularization”.  $\varepsilon$  est un paramètre de réglage qui permet de contrôler le passage à la saturation

de la loi. Lorsque  $\varepsilon$  tend vers 0, le comportement tend vers celui du modèle original de Coulomb.

Dans de nombreux cas il est nécessaire de disposer du comportement tangent par rapport aux degrés de liberté, par exemple pour le calcul de la matrice de raideur tangente en implicite. Ici cela revient à déterminer le comportement tangent par rapport aux composantes du vecteur vitesse, ce dernier étant lui-même relié aux ddls de positions par les relations cinématiques.

Dans le cas de la loi originale de Coulomb en contact collant, le noeud est entièrement lié à la surface cible par une relation cinématique de position, on peut dire que le comportement tangent ne dépend pas de la loi de comportement.

Dans le régime glissant, on utilise la relation (589) en notant que :

$$\frac{\partial \vec{V}_{(rt)}}{\partial V_{(rt)}^a} = \vec{I}_a \quad \text{et} \quad \frac{\partial v}{\partial V_{(rt)}^a} = \frac{V_{(rt)}^a}{v} \quad (595)$$

on obtient :

$$\frac{\partial \vec{F}_T}{\partial V_{(rt)}^a} = - \left( \mu \frac{\partial}{\partial V_{(rt)}^a} \left( \frac{\vec{V}_{(rt)}}{v} \right) + \frac{\vec{V}_{(rt)}}{v} \frac{\partial \mu}{\partial V_{(rt)}^a} \right) \|\vec{F}_N\| \quad (596)$$

Lorsque le coefficient de frottement est invariant le second terme de l'expression de droite est nul, sinon nous avons :

$$\frac{\partial \mu}{\partial V_{(rt)}^a} = \left( \frac{-c(\mu_S - \mu_C).e^{-c.v}}{v} \right) V_{(rt)}^a \quad (597)$$

Dans le cas d'une loi régularisée, il faut prendre en compte la variation de la fonction de régularisation  $\varphi(v)$ . En fonction de (594) nous avons :

$$\frac{\partial \varphi_1(v)}{\partial V_{(rt)}^a} = \frac{1}{\sqrt{(v^2 + \varepsilon^2)}} \left( 1 - \frac{v^2}{(v^2 + \varepsilon^2)} \right) \quad (598)$$

$$\frac{\partial \varphi_1(v)}{\partial V_{(rt)}^a} = 1 - \tanh^2 \left( \frac{v}{\varepsilon} \right) \quad (599)$$

$$\frac{\partial \varphi_1(v)}{\partial V_{(rt)}^a} = \begin{cases} 0 & \text{if } v < -\varepsilon \\ \frac{1}{2\varepsilon} & \text{if } -\varepsilon \leq v \leq \varepsilon \\ 0 & \text{if } v > \varepsilon \end{cases} \quad (600)$$

La variation finale de (591) est alors :

$$\frac{\partial \vec{F}_T}{\partial V_{(rt)}^a} = - \left( \mu \varphi(v) \frac{\partial}{\partial V_{(rt)}^a} \left( \frac{\vec{V}_{(rt)}}{v} \right) + \frac{\vec{V}_{(rt)}}{v} \varphi(v) \frac{\partial \mu}{\partial V_{(rt)}^a} + \frac{\mu \vec{V}_{(rt)}}{v} \frac{\partial \varphi(v)}{\partial V_{(rt)}^a} \right) \|\vec{F}_N\| \quad (601)$$

## 24.6 Détails d'implantation en pénalisation

Concernant la situation de contact, deux cas sont considérés :



1. au début de l'incrément, le noeud  $M_t$  n'est pas en contact, et à la fin  $M_{t+\Delta t}$  il est en contact. À partir du mouvement du noeud et/ou du mouvement de la facette, une trajectoire est définie et l'intersection de la trajectoire passant par le point à  $t$  avec la facette définit le point de contact  $\hat{P}$ . On mémorise la position locale du point de contact  $\theta_{(p)}^i$
2. au début de l'incrément et à la fin de l'incrément, le noeud reste en contact. La trajectoire considérée pour le calcul de l'impact est alors la normale à la facette. Le point de contact  $\hat{P}$  correspond donc à la projection de  $M_{t+\Delta t}$  sur la facette. On dispose également de la position du point initial de contact, transportée à l'instant  $t + \Delta t$  via le déplacement de la facette. On nommera  $P_0$  ce point particulier.

On a :

$$O\vec{P}_0 = O\vec{M}_{t+\Delta t}^r \phi_r(\theta_{(p)}^i) \quad (602)$$

avec  $O\vec{M}^r$  les noeuds de la facette.

Avec cette notation  $P_0\hat{P}$  représente le déplacement total du point d'impact sur la facette, ou le glissement total sur la facette.

Dixième partie  
Sfe

## 25 Eléments SFE

### 25.1 Introduction

Les éléments SFE (Semi Finite Element) sont des éléments coques qui ont la particularité de ne pas utiliser de degré de liberté de rotation, mais uniquement les degrés de liberté classiques de translation. La cinématique locale s'appuie sur les hypothèses de Kirchhoff en transformations finies.

$$O\vec{M} = O\vec{P}(\theta^1, \theta^2) + z.\vec{N}(\theta^1, \theta^2) \quad (603)$$

Où  $M$  est un point courant dans l'épaisseur de la coque,  $P$  est le point correspondant de la surface médiane de référence,  $\theta^\alpha$  représentent les 2 coordonnées permettant de décrire la surface médiane,  $z$  est la coordonnée d'épaisseur qui est supposée évoluer entre  $-h/2$  et  $h/2$  avec  $h$  l'épaisseur de la coque, et  $\vec{N}$  est le vecteur normal à la surface.

A partir de cette cinématique on obtient le tenseur métrique sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} g_{\alpha\beta} &= a_{\alpha\beta} - 2z.b_{\alpha\beta} + z^2 b_{\alpha\gamma}b_{\beta}^\gamma \\ g_{\alpha 3} &= 0 \\ g_{33} &= 1 \end{aligned} \quad (604)$$

Où  $g_{\alpha\beta}$  représentent les composantes ( $\alpha, \beta, \gamma = 1, 2$ ) de la métrique au point  $M$  qui varient,  $a_{\alpha\beta}$  représentent les composantes de la métrique de la surface médiane au point  $P$ ,  $b_{\alpha\beta}$  les composantes du tenseur de courbure dans le repère naturel. On remarque que la métrique comporte un terme linéaire en  $z$  et un terme quadratique. Pour une faible courbure et une faible épaisseur, le terme quadratique peut-être négligé. Dans le cas des éléments SFE, sauf mention particulière, la métrique complète est prise en compte.

A l'aide de cette métrique on obtient naturellement un tenseur vitesse de déformation quadratique en  $z$ . Pour la déformation, par exemple dans le cas d'une mesure de déformation d'Almansi on obtient les composantes :

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = 0.5(g_{\alpha\beta}(t) - g_{\alpha\beta}(0)) \quad (605)$$

qui comportent donc implicitement des termes linéaires et quadratiques en  $z$ .

Le calcul du tenseur courbure est un élément clé des éléments SFE. Un premier modèle a été présenté par G. Rio [], puis amélioré par G.Rio et B. Thati [], et également par la suite par H. Laurent []. Actuellement, S. Couedo [] a effectué une partie de ses travaux de thèse sur la recherche d'une mesure de courbure optimum en fonction de la position des noeuds.

Ce qui différencie les différentes implantations est le calcul du tenseur de courbure. Nous allons donc détailler différents calculs possibles et les conséquences sur les résultats.

### 25.2 Estimation d'une courbure à partir de la variation de la normale de part et d'autre des arrêtes

L'idée est d'utiliser la position des éléments mitoyens à l'élément central, pour reconstruire la courbure.

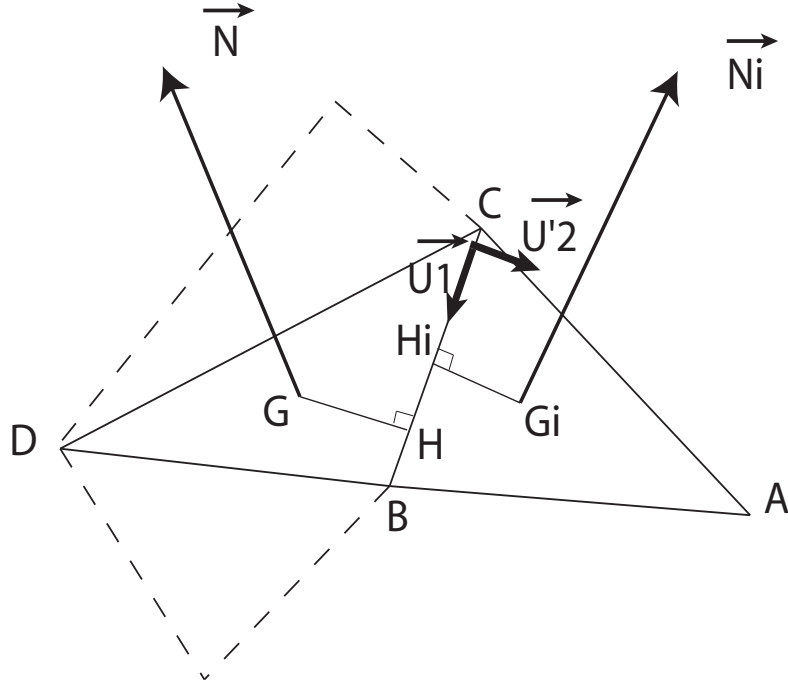


FIGURE 8 – Positions des points

Considérons un triangle DCB entouré de 3 triangles extérieurs (fig.8), et soit CAB l'un d'entre eux.

A partir des coordonnées des noeuds sommet on construit les normales et

$$\vec{N} = \frac{D\vec{B} \times D\vec{C}}{\|D\vec{B} \times D\vec{C}\|} = \frac{\vec{a}_1 \times \vec{a}_2}{\|\vec{a}_1 \times \vec{a}_2\|} \quad (606)$$

$$\vec{N}_i = \frac{C\vec{B} \times C\vec{A}}{\|C\vec{B} \times C\vec{A}\|} \quad (607)$$

**Remarque**  $\vec{a}_1$  n'est pas forcément égal à  $D\vec{B}$ , idem entre  $\vec{a}_2$  et  $D\vec{C}$

Nous avons également successivement :

—  $O\vec{G} = (O\vec{B} + O\vec{C} + O\vec{D})/3$  et  $O\vec{G}_i = (O\vec{A} + O\vec{C} + O\vec{B})/3$ .

—  $\vec{U}_1 = C\vec{B}/\|C\vec{B}\|$

—  $\vec{U}_2 = \vec{N} \times \vec{U}_1$ , la direction normale à  $\vec{U}_1$  dans le plan de la facette centrale.

Ceci nous permet de calculer les distances de  $H_i$  à  $G_i$  d'une part et de  $H$  à  $G$  d'autre part.

$$\begin{aligned} H_i\vec{G}_i &= C\vec{G}_i - (C\vec{G}_i \cdot \vec{U}_1) \cdot \vec{U}_1 \\ h_i G_i &= \|H_i\vec{G}_i\| \\ gH_1 &= \sqrt{C\vec{G} \cdot C\vec{G} - (C\vec{G} \cdot \vec{U}_1)^2} \end{aligned} \quad (608)$$

On peut alors calculer la variation de la normale dans la direction  $\vec{U}'_2$  d'où une approximation de la courbure dans la même direction :

$$\vec{N}_{,U'_2} \approx \frac{\vec{N}_i - \vec{N}}{(gH_1 + h_iG_i)} \rightarrow b_{U'_2U'_2} \approx -\vec{N}_{,U'_2} \cdot \vec{U}'_2 \quad (609)$$

Cette opération peut-être répétée suivant les 3 normales  $\vec{U}'_2$  des 3 cotés du triangle central. Supposons que le tenseur de courbure est constant sur la facette centrale, nous avons :

$$\mathbf{b} = b_{\alpha\beta} \vec{a}^\alpha \otimes \vec{a}^\beta \quad (610)$$

d'où :

$$b_{U'_2U'_2} = b_{\alpha\beta} (\vec{a}^\alpha \cdot \vec{U}'_2) (\vec{a}^\beta \cdot \vec{U}'_2) \quad (611)$$

Appelons  $\bar{b}_i = b_{U'_2U'_2}$  la courbure calculée pour le triangle extérieur "i", i=1...3, et notons  $[A^{ij}]$  la matrice 3x3 telle que :

$$A^{i1} = (\vec{a}^1 \cdot \vec{U}'_2) (\vec{a}^1 \cdot \vec{U}'_2) \quad A^{i2} = 2(\vec{a}^1 \cdot \vec{U}'_2) (\vec{a}^2 \cdot \vec{U}'_2) \quad A^{i3} = (\vec{a}^2 \cdot \vec{U}'_2) (\vec{a}^2 \cdot \vec{U}'_2) \quad (612)$$

Notons également les composantes du tenseur de courbure sous forme d'un vecteur :

$$b_1 = b_{11} \quad , \quad b_2 = b_{12} \quad , \quad b_3 = b_{22} \quad (613)$$

D'où la relation matricielle finale :

$$(\bar{b}_i) = [A^{ij}] (b_i) \rightarrow (b_i) = [A^{ij}]^{-1} (\bar{b}_i) \quad (614)$$

Le calcul de la variation de la courbure par rapport aux degrés de liberté nécessite de tenir compte de la variation des coordonnées dans tous les termes des différentes expressions précédentes. C'est ce qui a été fait et implanté dans Herezh++. Cependant, la courbure ainsi définie, qui paraît a priori intéressante, pose des problèmes de convergence vers la solution exacte, aussi on ne va donc pas détailler plus en avant la variation (sauf si on trouve par la suite une idée pour améliorer cette forme initiale!!).

### 25.2.1 Problème de convergence

Soit le cas test suivant. On considère un maillage de deux éléments dont les sommets sont disposés initialement sur un plan, puis après transformation sur un cylindre de Rayon "R" de la manière indiquée sur la figure (9). Dans l'opération, seul le noeud A bouge de telle manière que l'élément BAC effectue une rotation d'angle "a" autour de l'arête BC.

Si l'on applique le modèle approché de calcul de la courbure selon  $\vec{U}'_{2(1)}$ , nous allons trouver une différence systématique, quelque soit la valeur de l'angle "a", car :

$$\begin{aligned} b_{U'_{2(1)}U'_{2(1)}} &\approx -\frac{\vec{N}_i - \vec{N}}{(gH_1 + h_iG_i)} \cdot \vec{U}'_{2(1)} \\ &\approx -\frac{1}{0.66} \langle \sin(a), 0, \cos(a) - 1 \rangle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\approx -\frac{\sin(a)}{0.66} \end{aligned} \quad (615)$$

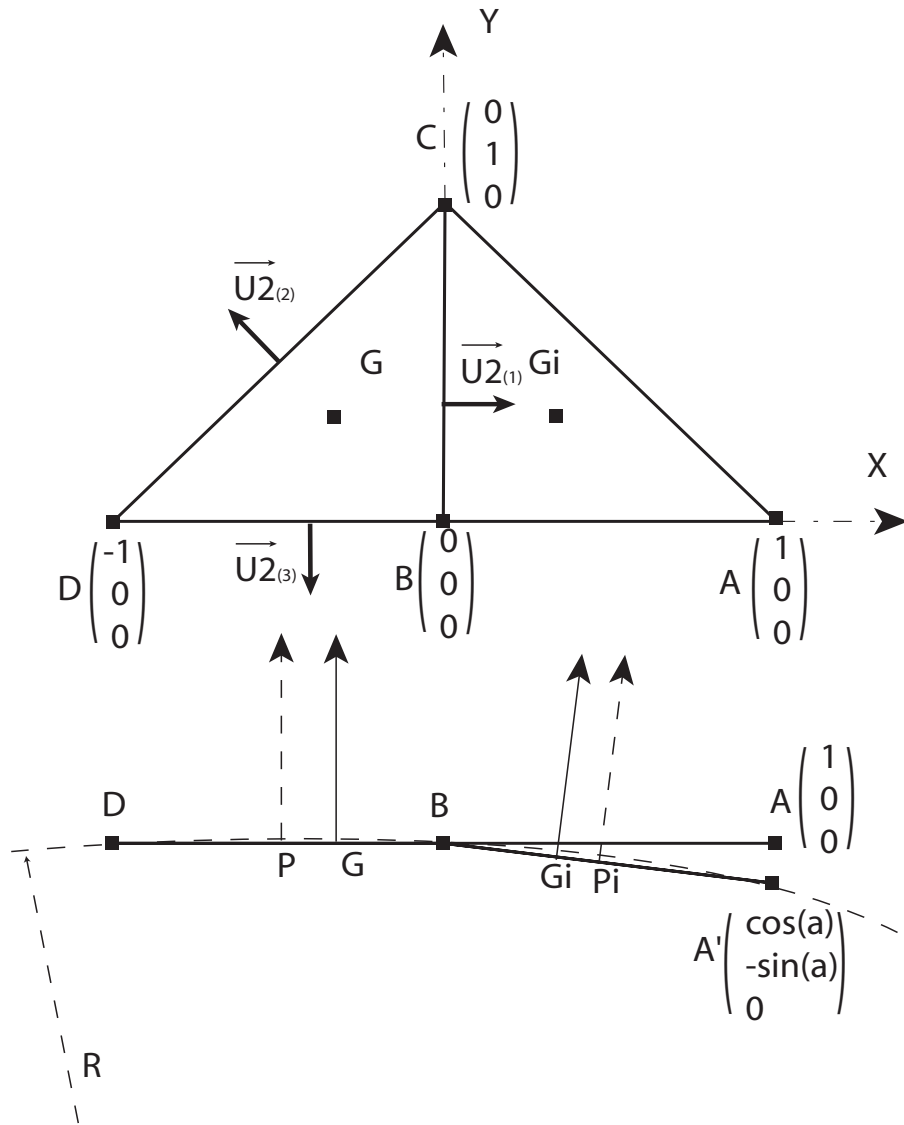


FIGURE 9 – cylindre

D'autre part un simple calcul de géométrie montre que le rayon du cercle qui passe par DBA' est  $R = 0.5/\sin(a/2)$  c'est-à-dire lorsque l'angle est faible :  $1/R \approx a$  D'où :

$$\lim_{a \rightarrow 0} b_{U'_{2(1)} U'_{2(1)}} \approx -\frac{a}{0.66} \quad (616)$$

**Premier problème** Donc on voit que l'on n'obtiendra jamais la solution exacte. Ce premier problème peut-être surmonté en considérant, non plus la distance du centre de gravité à l'arête, mais la moitié de la distance du noeud externe à l'arête. Dans l'exemple ce serait la distance de D à l'arête BC d'une part et d'autre part la distance de A' à l'arête BC. Dans ce cas on divisera par 1 et non par 0.66 et on convergera vers le résultat exact.

**Second problème** Le second problème est a priori plus difficile à résoudre. Considérons toujours l'exemple précédent, et recherchons le tenseur final de courbure. Nous aurons dans la direction  $\vec{U}_{2(1)}$  une courbure correcte que l'on note  $\bar{b}_1$ . Dans les deux autres directions on trouvera une courbure nulle d'où :  $\bar{b}_2 = \bar{b}_3 = 0$ . Or une fois que l'on cherchera à calculer les composantes du tenseur final via l'expression (614), on obtiendra une valeur correcte pour  $b_{11} = \bar{b}_1$  et  $b_{22} = \bar{b}_2$ , par contre on aura systématiquement  $b_{12} \neq 0$  alors que pour un cylindre on doit avoir  $b_{12} = 0$ . On pourrait penser que le résultat dépend du nombre d'éléments mis dans la largeur, mais il n'en est rien. Prenons par exemple 4 éléments (fig.10). Le calcul de la courbure pour les 3 arêtes sera identique !

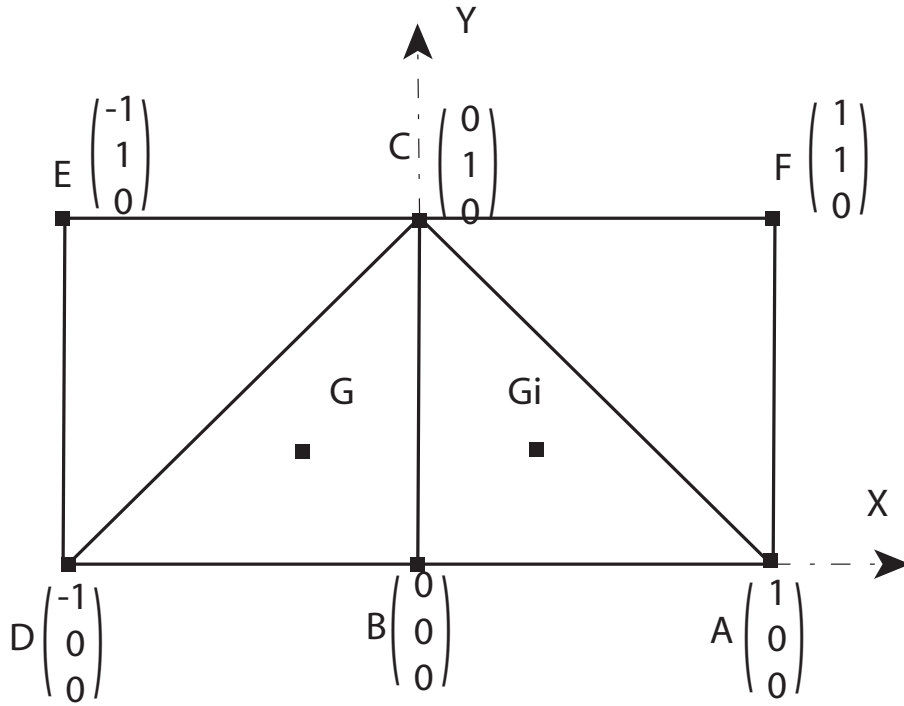


FIGURE 10 – 4 éléments

En conclusion, dans l'état actuel du modèle, on ne peut pas tendre vers la solution exacte pour une géométrie de cylindre. On peut donc penser que la qualité des résultats de flexion ne sera jamais bonne, ce que l'on observe au niveau des résultats numériques dans le cas de la flexion d'une poutre (plaque) sur deux appuis avec une flèche imposée au milieu. On observe une erreur systématique.

### 25.3 Modèle original simple d'estimation de la courbure

Il s'agit du modèle original introduit par Rio et al [1], dont l'idée est de calculer la normale au milieu d'une arête à partir de la demi-somme des normales de part et d'autre de l'arête.

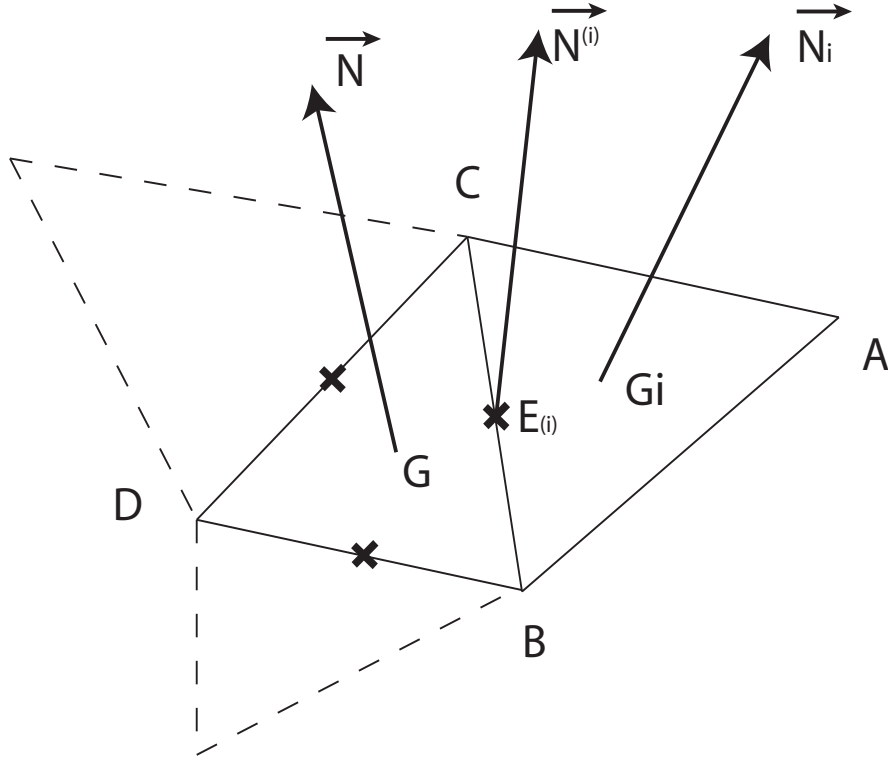


FIGURE 11 – modèle simple : l'élément SFE

Si l'on retient les notations de la figure (11), on a :

$$\vec{N}^{(i)} = \frac{\vec{N} + \vec{N}_i}{\|\vec{N} + \vec{N}_i\|} \quad (617)$$

Le vecteur  $\vec{N}^{(i)}$  est supposé se situer exactement au milieu de l'arête c'est-à-dire au point :  $E_{(i)}$ . Ensuite le vecteur est étendu à toute la surface du triangle par interpolation entre les trois normales  $\vec{N}^{(i)}$  selon :

$$\vec{N}(\eta^1, \eta^2) = \vec{N}^{(i)} \omega_{(i)} \quad (618)$$

avec "i" variant de 1 à 3 et

$$\omega_{(1)} = 2(\eta^1 + \eta^2) - 1 \quad , \quad \omega_{(2)} = 1 - 2\eta^1 \quad , \quad \omega_{(3)} = 1 - 2\eta^2 \quad (619)$$

Ensuite à partir de la relation (618) on en déduit la variation du vecteur normal :

$$\vec{N}_{,1} = \frac{\partial \vec{N}(\eta^1, \eta^2)}{\partial \eta^1} = 2(\vec{N}^{(1)} - \vec{N}^{(2)}) \quad \text{et} \quad \vec{N}_{,2} = \frac{\partial \vec{N}(\eta^1, \eta^2)}{\partial \eta^2} = 2(\vec{N}^{(1)} - \vec{N}^{(3)}) \quad (620)$$

d'où la valeur des composantes de la courbure :

$$b_{11} = -\vec{N}_{,1} \cdot \vec{a}_1 \quad , \quad b_{22} = -\vec{N}_{,2} \cdot \vec{a}_2 \quad , \quad b_{12} = -0.5(\vec{N}_{,2} \cdot \vec{a}_1 + \vec{N}_{,1} \cdot \vec{a}_2) \quad (621)$$



Le calcul des termes  $b_{11}$  et  $b_{22}$  provient directement de la formule théorique du calcul de la courbure. Par contre pour le calcul du terme  $b_{12}$ , cela mérite une explication. En faite on sait que d'un point de vue théorique, le tenseur de courbure est symétrique, car nous avons :

$$b_{\alpha\beta} = \vec{a}_{,\alpha\beta} \cdot \vec{N} = \frac{\partial^2 O\vec{M}}{\partial \eta^1 \eta^2} \cdot \vec{N} \quad (622)$$

Or l'approximation (620) devrait conduire à :

$$b'_{12} = -\vec{N}_{,1} \cdot \vec{a}_2 \quad \text{et} \quad b'_{21} = -\vec{N}_{,2} \cdot \vec{a}_1 \quad (623)$$

Or il n'y a pas de raison que dans le cadre de l'approximation (620),  $b'_{12}$  soit identique à  $b'_{21}$ . Aussi dans le modèle original, on prend donc la moyenne :

$$b_{12} = 0.5(b'_{12} + b'_{21})$$

En fait dans le cadre de l'implantation dans Herezh++, le tenseur de courbure est utilisé essentiellement pour calculer la variation du vecteur normale. Dans ce cas, il est possible également de garder le tenseur non symétrique ce qui conduit alors à la vraie variation constatée à partir des  $\vec{N}^{(i)}$ , ensuite pour d'autres calculs qui nécessiteraient un tenseur symétrique, on peut symétriser le tenseur " $\mathbf{b}'$ ". Donc les deux options sont actuellement implantées, la validation numérique montrera si une option est meilleure que l'autre.

## 25.4 Modèle Sfe2

Il s'agit du modèle développé par H. Laurent et G. Rio. L'idée est d'essayer de prendre en compte la non-régularité du maillage. Le modèle est présenté dans la thèse de Hervé Laurent [ ] et dans [ ]. L'implantation est ici légèrement différente, mais globalement elle devrait conduire aux mêmes résultats. En particulier on ne se sert pas de la position des centres de gravité pour calculer les normales sur les arêtes.

Soit la figure (12) pour représenter une disposition courante.

Tout d'abord on calcul la normale sur les deux facettes  $\vec{N}$  et  $\vec{N}_e$ . Ensuite la valeur de la normale sur l'arête est définie initialement à partir d'une moyenne pondérée en fonction des distances des centres de gravité à l'arête :

$$\vec{N}^{(i)} = \frac{(\vec{N} H_e G_i + \vec{N}_e GH)}{(H_e G_i + GH)} \quad (624)$$

En fait, cette moyenne pondérée est identique à la suivante :

$$\vec{N}^{(i)} = \frac{(\vec{N} H_a A + \vec{N}_e DH_d)}{(H_a A + DH_d)} \quad (625)$$

Cette dernière expression ne faisant pas intervenir explicitement la position des centres de gravité est peu plus simple. C'est donc cette expression qui est implantée dans Herezh++.

Au niveau de la position de la normale, l'idée est de trouver le point " $H_i$ " tel que si l'on déplie la facette BAC pour la ramener dans le plan de la facette centrale DBC, le point

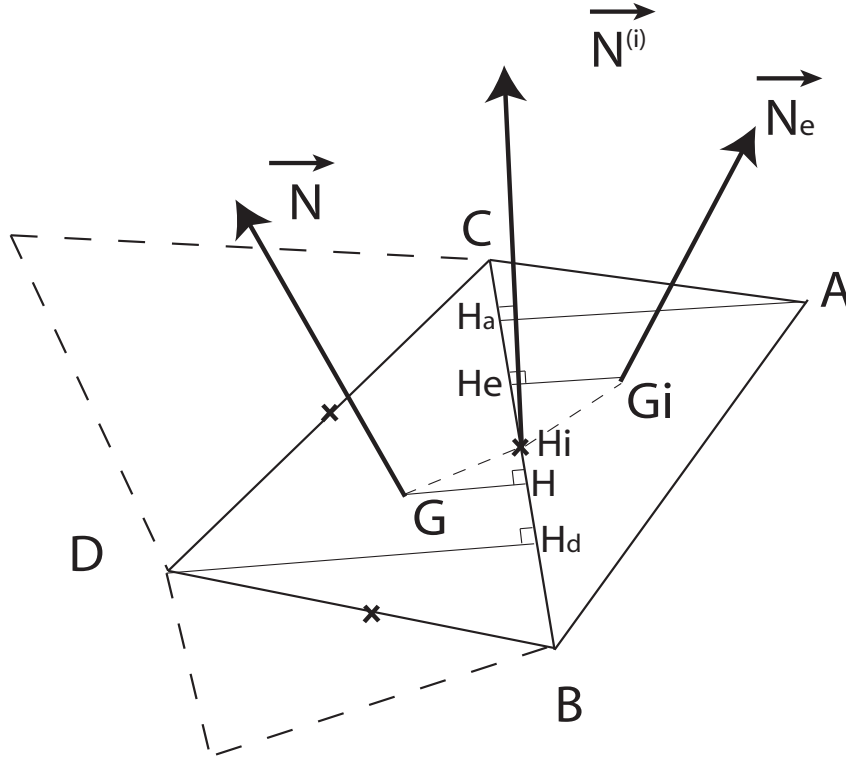


FIGURE 12 – modèle SFE2 : grandeurs pour le calcul sur une arête

$H_i$  se situe à l'intersection des segments  $BC$  et  $GG'_i$ ,  $G'_i$  étant la nouvelle position de  $G_i$ . On doit donc avoir la relation :

$$\vec{GH}_i \cdot \vec{CB} = \vec{H}_i \vec{G}_i \cdot \vec{CB} \quad (626)$$

En appelant  $\vec{U}_1 = \vec{CB}/\|\vec{CB}\|$  on obtient :

$$\vec{OH}_i = \vec{OB} + \beta \vec{U}_1 \text{ avec } \beta = \frac{(\vec{BG}_i - \vec{GB}) \cdot \vec{U}_1}{2} \quad (627)$$

Le calcul de la courbure s'effectue à partir de l'interpolation des normales sur tout le triangle. Pour ce faire, on définit les fonctions d'interpolation associées aux positions  $H_i$ . Ces fonctions sont calculées à partir des coordonnées locales des points  $H_i$ . Soit  $O'$  l'origine du repère de la facette centrale (cf.13). Les coordonnées locales du point  $H_i$  s'obtiennent via :

$$\theta_{(i)}^\alpha = O'H_i \cdot \vec{a}^\alpha \quad (628)$$

On remarque que l'on doit avoir :  $\theta_{(3)}^2 = 0$  et  $\theta_{(2)}^1 = 0$ .

En cherchant les fonctions d'interpolations sous la forme :

$$\omega_r = a_r \theta^1 + b_r \theta^2 + c_r \text{ avec } r = 1, 2, 3 \text{ et } \vec{N} = \vec{N}^r \omega_r \quad (629)$$

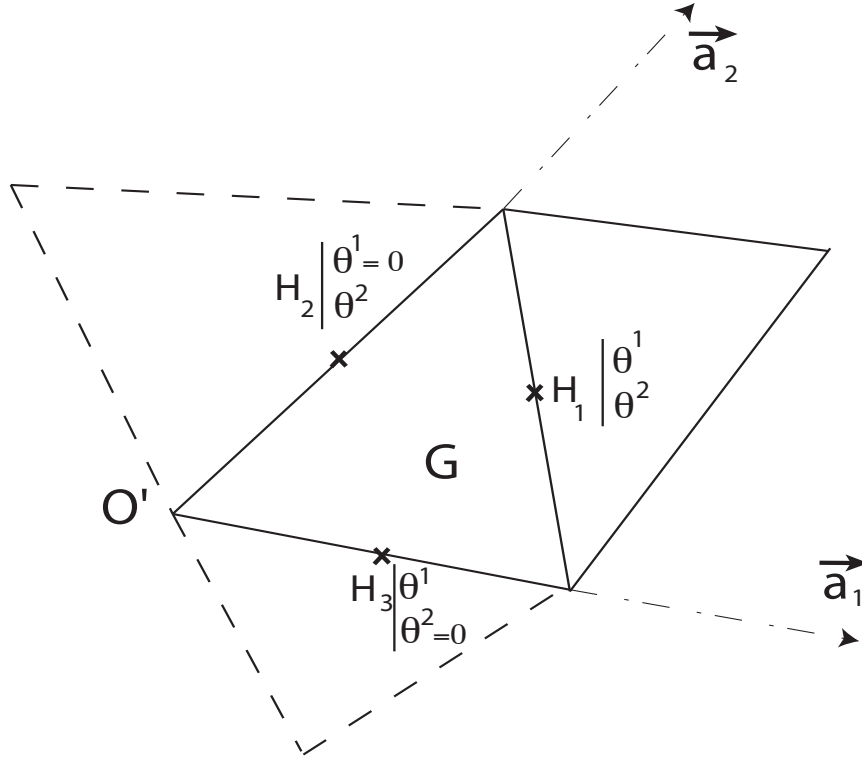


FIGURE 13 – modèle SFE2 : éléments pour le calcul des fonctions d'interpolation

On obtient en notant  $s = \theta_{(1)}^1 \theta_{(2)}^2 - \theta_{(3)}^1 \theta_{(2)}^2 + \theta_{(1)}^2 \theta_{(3)}^1$  :

$$\begin{aligned}
 a_1 &= \theta_{(2)}^2/s & b_1 &= \theta_{(3)}^1/s & c_1 &= -\theta_{(3)}^1 \theta_{(2)}^2/s \\
 a_2 &= -\theta_{(1)}^2/s & b_2 &= 1/\theta_{(3)}^2 - \theta_{(1)}^2 \theta_{(3)}^1/(s \theta_{(2)}^2) & c_2 &= \theta_{(3)}^1/s \\
 a_3 &= 1/\theta_{(3)}^1 - \theta_{(1)}^1 \theta_{(2)}^2/(s \theta_{(3)}^1) & b_3 &= -\theta_{(1)}^1/s & c_3 &= \theta_{(2)}^2 \theta_{(1)}^1/s
 \end{aligned} \tag{630}$$

Maintenant, nous pouvons calculer le tenseur de courbure selon :

$$b_{\alpha\beta} = -\vec{N}^r \frac{\partial \omega_r}{\partial \theta^\alpha} \cdot \vec{a}_\beta \tag{631}$$

Le tenseur ainsi obtenu est non symétrique contrairement au tenseur d'une surface régulière. On peut éventuellement le symétriser.

**Remarque** Le modèle SFE2 doit conduire aux mêmes résultats que le modèle SFE1 dans le cas d'un maillage de taille d'élément constant, et pour lequel le point  $H_i$  est au milieu des cotés.

## 25.5 Modèle Sfe3

Il s'agit d'un modèle initialement imaginé au cours du DEA de Mathieu Porez. L'idée est d'utiliser un polynôme quadratique pour interpoler les cotes des points externes, selon

la direction normale à la face centrale. Sylvain Couëdo, dans le cadre de sa thèse, a étudié de manière comparative, l'erreur entraînée par une distorsion de la régularité des triangles, d'un maillage constitué d'un élément SFE dont les noeuds appartiennent à une sphère ou à un cylindre, et a montré que l'utilisation d'un polynôme d'interpolation conduisait à une plus faible erreur comparativement aux éléments SFE1 et SFE2. L'implantation a donc pour objectif de valider cette étude sur des maillages plus importants.

Supposons que les bases naturelle et duale associées à l'élément central DBC (on se réfère aux notations de la figure 8) soient calculées, d'où le calcul de la normale :

$$\vec{N} = \frac{\vec{a}_1 \times \vec{a}_2}{\|\vec{a}_1 \times \vec{a}_2\|} \quad (632)$$

On cherche à calculer la cote selon la normale du point A.

$$\theta^3 = \overrightarrow{DA} \cdot \vec{N} \quad (633)$$

puis ses coordonnées locales dans le plan de la facette :

$$\theta^\alpha = (\overrightarrow{DA} - \theta^3 \vec{N}) \cdot \vec{a}^\alpha \quad (634)$$

On suppose que la surface qui passe par tous les noeuds de l'élément SFE est un polynôme en  $\theta^\alpha$  :

$$\theta^3(\theta^\alpha) = a (\theta^1)^2 + b (\theta^2)^2 + c \theta^1 \theta^2 + d \theta^1 + e \theta^2 + f \quad (635)$$

Tout d'abord la surface devant passer par les sommets du triangle centrale cela entraîne :  $f = 0$ ,  $d = -a$  et  $e = -b$  d'où il reste :

$$\theta^3(\theta^1, \theta^2) = a \theta^1 (\theta^1 - 1.) + b \theta^2 (\theta^2 - 1.) + c \theta^1 \theta^2 \quad (636)$$

Dans le cas où il y a trois noeuds externes  $A^i$  cela conduit à 3 équations d'où le système à résoudre :

$$\begin{bmatrix} \theta_{A^1}^1 (\theta_{A^1}^1 - 1.) & \theta_{A^1}^2 (\theta_{A^1}^2 - 1.) & \theta_{A^1}^1 \theta_{A^1}^2 \\ \theta_{A^2}^1 (\theta_{A^2}^1 - 1.) & \theta_{A^2}^2 (\theta_{A^2}^2 - 1.) & \theta_{A^2}^1 \theta_{A^2}^2 \\ \theta_{A^3}^1 (\theta_{A^3}^1 - 1.) & \theta_{A^3}^2 (\theta_{A^3}^2 - 1.) & \theta_{A^3}^1 \theta_{A^3}^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta_{A^1}^3 \\ \theta_{A^2}^3 \\ \theta_{A^3}^3 \end{pmatrix} \quad (637)$$

En appelant  $[K]$  la matrice et  $(SM)$  le second membre on obtient :

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = [K]^{-1}(SM) \quad (638)$$

Soit "M" un point courant :

$$M \left| \begin{array}{l} \theta^1 \\ \theta^2 \\ \theta^3(\theta^1, \theta^2) \end{array} \right. \quad (639)$$

cela conduit directement aux composantes de la courbure selon :

$$b_{\alpha\beta} = \frac{\partial^2 \vec{M}}{\partial \theta^1 \partial \theta^2} \cdot \vec{N} \quad (640)$$

d'où :

$$b_{11} = 2 a , \quad b_{22} = 2 b , \quad b_{12} = c \quad (641)$$

Dans le cas où le noeud extérieur n'existe pas, on considère que la courbure dans la direction de ce noeud est nulle.

Soit  $\vec{v}$  la direction normale à l'arête pour laquelle il n'y a pas de noeud externe.

$$(v) = \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \end{pmatrix} \quad (642)$$

$v^\alpha$  étant les coordonnées locales de  $v$ .

La courbure dans la direction  $\vec{v}$  est :

$$b_{vv} = \langle v^1, v^2 \rangle \begin{bmatrix} b_{11} & b_{21} \\ b_{12} & b_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \end{pmatrix} = 2 (a (v^1)^2 + b (v^2)^2 + c (v^1 v^2)) = 0 \quad (643)$$

Ce qui constitue une équation de remplacement à l'équation initiale :

$$a \theta_A^1 (\theta_A^1 - 1.) + b \theta_A^2 (\theta_A^2 - 1.) + c \theta_A^1 \theta_A^2 = \theta_A^3$$

Dans le cas où il manque deux noeuds extérieurs, on répète deux fois la précédente opération. Enfin s'il n'y a pas de noeud extérieur en répétant 3 fois l'opération précédente on obtient naturellement une courbure nulle ce qui est cohérent.

Dans le cas où une des arêtes appartient à un axe de symétrie ou à une ligne d'encastrement, la condition correspond à une dérivée imposée dans la direction normale au plan de symétrie ou au plan d'encastrement. Soit  $\vec{d}$  la direction dans laquelle la dérivée est imposée, on a :

$$\vec{d} = d^\alpha \vec{g}_\alpha + d^3 \vec{N} \quad \text{et} \quad \theta_{,\alpha}^3 d^\alpha = d^3 \quad (644)$$

ce qui signifie que la variation d'un point géométrique de la surface :  $\vec{d}M$  doit se faire dans la direction imposée  $\vec{d}$ .

En développant la dernière expression par exemple au point  $A$  on obtient :

$$a (2\theta_A^1 - 1.)d^1 + b (2\theta_A^2 - 1.)d^2 + c (\theta_A^1 d^2 + \theta_A^2 d^1) = d^3 \quad (645)$$

D'une manière pratique, la direction  $\vec{d}$  peut-être construite à partir d'une direction donnée en entrée  $\vec{w}$  et de celle de l'arête  $\vec{u}$  :

$$\vec{d} = \vec{w} \times \vec{u}$$

La condition dépend alors de la direction de l'arête, qui dépend de la position des noeuds. Cependant, dans le cas de l'opérateur tangent, par simplicité, il est peut-être possible de ne pas tenir compte de cette dépendance dans une première étape.

Dans le cas où l'on veut définir un encastrement, il faut en plus de la condition de dérivée, imposer un déplacement bloqué.

Le tenseur ainsi obtenu est naturellement symétrique.

**Remarque** Le tenseur ainsi obtenu est naturellement symétrique, et le polynôme ainsi construit tiens compte de la position réelle des points extérieurs, donc de la non-régularité des triangles.

### 25.5.1 Test simple de convergence sur une géométrie de cylindre

Supposons une géométrie de cylindre avec éventuellement un noeud manquant dans la direction de l'axe du cylindre, on montre facilement que l'on tend vers la solution exacte.

Onzième partie

# Chargement et Conditions limites

## 26 torseur d'efforts via une répartition de charges ponctuelles

Il est parfois utile de pouvoir imposer un chargement globalement, selon une répartition spatiale voulue et avec au final, une résultante et un moment donnés : c'est-à-dire avec un torseur d'efforts donnés. Ce pose alors la question de l'application en pratique des efforts sur la structure dans le cadre d'un calcul par éléments finis.

Dans cette partie, on va utiliser une répartition d'efforts ponctuelles, appliqués aux noeuds, qui permet d'appliquer au final un torseur d'effort désiré. On suppose donc connu en entrée :

- un ensemble de noeuds sur lesquels seront appliqué les efforts ponctuelles. Chaque noeud sera repéré par une position "  $P_i$  ".
- un torseur d'effort représenté par une résultante :  $\vec{R}$  et un moment  $\vec{M}_{/o'}$ , par rapport à un point "  $o'$  " également connu.
- une fonction à valeur scalaire de répartition d'effort  $f(O'P_i)$  qui indique le type de répartition spatiale d'intensité d'effort ponctuel que l'on désire obtenir. Par exemple si la fonction "  $f$  " est linéaire on introduit ainsi un moment de torsion classique.

Dans une première étape on calcule le centre de gravité "  $G$  " de l'ensemble des points pondérés avec la fonction  $f$ . On a :

$$O'\vec{G} = \frac{\sum_i O'\vec{P}_i \cdot f(O'\vec{P}_i)}{\sum_i f(O'\vec{P}_i)} \quad (646)$$

On transporte alors le moment au point  $G$  :

$$\vec{M}_{/G} = \vec{M}_{/o'} - O'\vec{G} \wedge \vec{R} \quad (647)$$

Soit  $\vec{m}$  le vecteur unitaire de  $\vec{M}_{/G}$  et soit  $P'_i$  la projection du point  $P_i$  sur le plan géométrique normale au vecteur  $\vec{M}_{/G}$  et passant par "  $G$  ". On a donc :

$$G\vec{P}'_i = G\vec{P}_i - (G\vec{P}_i \cdot \vec{m}) \vec{m} \text{ avec } \vec{m} = \frac{\vec{M}_{/G}}{\|\vec{M}_{/G}\|} \quad (648)$$

avec le scalaire  $M_{/G} \geq 0$

On considère le vecteur  $\vec{t}_i$  qui est proportionnel à  $G\vec{P}'_i \wedge \vec{m}$  et qui s'écrit :

$$\vec{t}_i = \beta G P'_i \vec{t}_i f(O'\vec{P}_i) \quad (649)$$

avec  $\vec{t}'_i$  le vecteur unitaire de la direction, donc normal à  $G\vec{P}'_i$  et  $\vec{m}$ .  $G\vec{P}'_i$  étant normale à  $\vec{m}$  :

$$\vec{t}'_i = \frac{\vec{m} \wedge G\vec{P}'_i}{\|G\vec{P}'_i\|} \quad (650)$$

Le moment exercé par  $\vec{t}_i$  appliqué en  $P'_i$ , autour de  $\vec{m}$  est :

$$\vec{M}_i = \vec{m} \beta (G P'_i)^2 f(O'\vec{P}_i) \quad (651)$$



Maintenant en considérant que l'ensemble de ces moments individuels vaut la valeur recherchée  $\vec{M}_{/G}$  :

$$\sum_i \vec{M}_i = \beta \sum_i \vec{m} (GP'_i)^2 f(O\vec{P}_i) = \vec{M}_{/G} \quad (652)$$

on en déduit :

$$\beta = \frac{M_{/G}}{\sum_i (GP'_i)^2 f(O\vec{P}_i)} \quad (653)$$

Ce qui permet d'obtenir les moments exercés individuellement :

$$\vec{M}_i = \frac{M_{/G} \vec{m}}{\sum_i (GP'_i)^2 f(O\vec{P}_i)} (GP'_i)^2 f(O\vec{P}_i) = \frac{(GP'_i)^2 f(O\vec{P}_i)}{\sum_i (GP'_i)^2 f(O\vec{P}_i)} \vec{M}_{/G} \quad (654)$$

Maintenant on considère la répartition suivante de forces ponctuelles :

$$\vec{F}_i = \alpha f(O\vec{P}_i) \vec{R} + \vec{t}_i = \alpha f(O\vec{P}_i) \vec{R} + \beta GP'_i \vec{t}_i f(O\vec{P}_i) \quad (655)$$

On en calcule la somme que l'on veut égale à la résultante :

$$\vec{R} = \sum_i \vec{F}_i = \alpha \sum_i f(O\vec{P}_i) \vec{R} + \beta \sum_i GP'_i \vec{t}_i f(O\vec{P}_i) \quad (656)$$

On peut remarquer la relation suivante en tenant compte du fait que  $P'_i\vec{P}_i$  est colinéaire avec  $\vec{m}$  :

$$G\vec{P}_i \wedge \vec{m} = (G\vec{P}'_i + P'_i\vec{P}_i) \wedge \vec{m} = G\vec{P}'_i \wedge \vec{m} = GP'_i \vec{t}_i \quad (657)$$

Ce qui permet d'écrire :

$$\sum_i GP'_i \vec{t}_i f(O\vec{P}_i) = \left( \sum_i G\vec{P}_i f(O\vec{P}_i) \right) \vec{t}_i = \vec{0} \quad (658)$$

d'où

$$\alpha = \frac{1}{\sum_i f(O\vec{P}_i)} \quad (659)$$

et la valeur des fonctions ponctuelles :

$$\vec{F}_i = \frac{f(O\vec{P}_i)}{\sum_j f(O\vec{P}_j)} \vec{R} + \vec{t}_i \quad (660)$$

Calculons le moment de cette répartition de force  $\vec{F}_i$  :

$$\sum_i G\vec{P}_i \wedge \vec{F}_i = \sum_i G\vec{P}_i \wedge \frac{f(O\vec{P}_i)}{\sum_j f(O\vec{P}_j)} \vec{R} + \sum_i G\vec{P}_i \wedge \vec{t}_i \quad (661)$$

Montrons que le premier terme est nul :

$$\sum_i G\vec{P}_i \wedge \frac{f(O\vec{P}_i)}{\sum_i f(O\vec{P}_i)} \vec{R} = \frac{1}{\sum_j f(O\vec{P}_j)} \sum_i \left( G\vec{P}_i f(O\vec{P}_i) \right) \wedge \vec{R} = \frac{1}{\sum_j f(O\vec{P}_j)} \vec{O} \wedge \vec{R} = \vec{O} \quad (662)$$

d'où

$$\sum_i G\vec{P}_i \wedge \vec{F}_i = \sum_i G\vec{P}_i \wedge \vec{t}_i = \sum_i \vec{M}_i = M/G \quad (663)$$

On a donc déterminé une répartition de forces ponctuelles  $\vec{F}_i$  dont la résultante et le moment résultant correspondent à des valeurs voulues, ceci avec une pondération donnée :  $f(O'\vec{P}_j)$ . L'expression finale de la répartition est ainsi :

$$\begin{aligned} \vec{F}_i &= f(O'\vec{P}_i)\alpha \vec{R} + \beta GP'_i \vec{t}_i f(O'\vec{P}_i) \\ &= f(O'\vec{P}_i) \left( \alpha \vec{R} + \beta GP'_i \frac{\vec{m} \wedge G\vec{P}'_i}{\|G\vec{P}'_i\|} \right) \\ &= f(O'\vec{P}_i) \left( \alpha \vec{R} + \beta \vec{m} \wedge G\vec{P}'_i \right) \\ &= f(O'\vec{P}_i) \left( \alpha \vec{R} + \beta \vec{m} \wedge G\vec{P}_i \right) \end{aligned} \quad (664)$$

avec

$$\beta = \frac{M/G}{\sum_i (GP'_i)^2 f(O'\vec{P}_i)} \quad \text{et} \quad \alpha = \frac{1}{\sum_i f(O'\vec{P}_i)}$$

Douzième partie

# Méthodes de calcul

## 27 Calcul de grandeurs globales

L'objectif est ici de décrire les méthodes utilisées dans Herezh++ pour le calcul de grandeurs globales.

1. **energie\_cinetique** L'énergie cinétique est calculée à l'aide de la matrice masse et des vitesses aux noeuds. La matrice masse peut-être une matrice diagonale ("lumped") ou la matrice complète ("consistante") selon le choix du type de matrice masse retenue par l'utilisateur. Les vitesses sont celles calculées à chaque noeuds. La formule finale est donc :

$$E_{cin}(t + \Delta t) = \frac{1}{2} \langle V(t + \Delta t) \rangle [M](V(t + \Delta t)) \quad (665)$$

2. **energie\_externe** On part de l'idée que l'énergie externe vaut :

$$E_{ext}(t + \Delta t) = \int_{t=0}^{t+\Delta t} \vec{F}_{ext}(t) \cdot d\vec{X} \quad (666)$$

Compte tenu de l'évolution incrémentale du calcul dans Herezh, la formule devient :

$$E_{ext}(t + \Delta t) = E_{ext}(t) + \frac{\langle F_{ext}(t) + F_{ext}(t + \Delta t) \rangle (\Delta X)}{2} \quad (667)$$

$F_{ext}$  représente l'ensemble des forces externes ramenées aux noeuds.

Pour les forces ponctuelles, cela correspond directement à la composante exprimée au noeud.

Pour les forces surfaciques  $\vec{T}$ , il s'agit de :

$$\int_s \vec{T} \cdot \vec{V}^* ds = \langle \vec{V}^{*ar} \rangle \left( \int_s \vec{T} \cdot \vec{I}_a \varphi_r ds \right) \quad (668)$$

avec "r" le numéro du noeud, "a" l'indice de coordonnée global et  $\varphi_r$  la fonction d'interpolation de surface au noeud r. Le vecteur  $F_{ext}$  intègre alors les grandeurs  $(\int_s \vec{T} \cdot \vec{I}_a \varphi_r ds)$

Pour les forces volumique  $\vec{F}_v$  :

$$\int_{vol} \vec{F}_v \cdot \vec{V}^* dv = \langle \vec{V}^{*ar} \rangle \left( \int_{vol} \vec{F}_v \cdot \vec{I}_a \varphi_r dv \right) \quad (669)$$

La différence par rapport au cas surfacique, concerne les fonctions d'interpolation qui sont relatives ici au volume des éléments. Le vecteur  $F_{ext}$  intègre ici les grandeurs  $(\int_{vol} \vec{F}_v \cdot \vec{I}_a \varphi_r dv)$

3. **energie\_interne** On suit la même logique que pour l'énergie externe avec la formule incrémentale :

$$E_{int}(t + \Delta t) = E_{int}(t) + \frac{\langle F_{int}(t) + F_{int}(t + \Delta t) \rangle (\Delta X)}{2} \quad (670)$$

$F_{int}$  correspond aux forces internes généralisées qui sont déduites du principe des puissances virtuelles via dans le cas courant :

$$\begin{aligned}
\sum_e \int_{elemente} \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D}^* dv &= \langle \dot{V}^{*ar} \rangle \int_{elemente} \sigma^{ij}(\varphi_{r,i} \vec{I}_a \cdot \vec{g}_j) dv \\
&= \langle \dot{V}^{*ar} \rangle \int_{elemente} \sigma^{ij}(\varphi_{r,i} \vec{I}_a) (X^{bs} \varphi_{s,j} \vec{I}_b) dv \\
&= \langle \dot{V}^{*ar} \rangle (F_{int})
\end{aligned} \tag{671}$$

4. **puissance\_acceleration** : il s'agit de la puissance développée par les forces d'inertie calculée globalement selon :

$$P_{acc}(t + \Delta t) = \vec{V} \cdot (\mathbf{M} \cdot \vec{\gamma}) = \langle V(t + \Delta t) \rangle [M](\gamma(t + \Delta t)) \tag{672}$$

avec  $V$  le vecteur global des vitesses aux noeuds,  $M$  la matrice masse,  $\gamma$  le vecteur globale d'accélération aux noeuds.

5. **puissance\_interne** : il s'agit de la puissance développée par les forces internes généralisées :

$$P_{int}(t + \Delta t) = \langle V(t + \Delta t) \rangle (F_{int}) \tag{673}$$

6. **puissance\_externe** : il s'agit de la puissance développée par les forces externes globalisées :

$$P_{ext}(t + \Delta t) = \langle V(t + \Delta t) \rangle (F_{ext}) \tag{674}$$

7. **energie\_elastique** : Globalise la totalité de l'énergie élastique échangée par la structure. L'énergie est la somme sur tous les éléments et tous les points d'intégration, de la partie élastique de la loi de comportement.

$$E_{elas} = \sum_{elements} \int_{elem} E_{elas}(loi) dv = \sum_{elements} \sum_{pti} E_{elas}(loi, pti) W(pti) \sqrt{g(pti)} \tag{675}$$

où  $W$  est le poids d'intégration au point d'intégration "pti",  $\sqrt{g}$  est le jacobien.

8. **energie\_plastique** : Globalise la totalité de la dissipation plastique depuis le début du chargement. L'énergie est la somme sur tous les éléments et tous les points d'intégration, de la partie dissipation plastique de la loi de comportement.

$$\begin{aligned}
E_{plas} &= \sum_{elements} \int_0^{t+\Delta t} \int_{elem} E_{plas}(loi) dv \\
&= \sum_{elements} \left( E_{plas}(loi, \text{sur l'élément à } t) + \Delta_t^{t+\Delta t} E_{plas}(loi, pti) W(pti) \sqrt{g(pti)} \right)
\end{aligned} \tag{676}$$

où  $W$  est le poids d'intégration au point d'intégration "pti",  $\sqrt{g}$  est le jacobien.

9. **energie\_visqueuse** : Globalise la totalité de la dissipation visqueuse depuis le début du chargement. L'énergie est la somme sur tous les éléments et tous les points d'intégration, de la partie dissipation visqueuse de la loi de comportement.

$$\begin{aligned}
E_{vis} &= \sum_{elements} \int_0^{t+\Delta t} \int_{elem} E_{vis}(loi) dv \\
&= \sum_{elements} \left( E_{vis}(loi, \text{sur l'élément à } t) + \Delta_t^{t+\Delta t} E_{vis}(loi, pti) W(pti) \sqrt{g(pti)} \right)
\end{aligned} \tag{677}$$

où  $W$  est le poids d'intégration au point d'intégration "pti",  $\sqrt{g}$  est le jacobien.

10. **energie\_hourglass** : à pour objectif de donner une valeur approchée de l'énergie développée pour le blocage des mode d'hourglass. Deux cas sont à considérer suivant le type de blocage choisit (cf. le manuel d'utilisateur) :
- **STABHOURGLASS\_PAR\_COMPORTEMENT** : le blocage s'effectue via la sur-imposition d'une contrainte supplémentaire et une intégration complète. La contrainte est calculée avec une loi particulière choisit par l'utilisateur. L'énergie de blocage d'hourglass correspond à la totalité (élastique+plastique+visqueuse) de l'énergie associée avec cette sur-imposition, globalisée sur l'ensemble des éléments stabilisés.
  - **STABHOURGLASS\_PAR\_COMPORTEMENT\_REDUIT** : comme avec le premier cas, l'idée est de sur-imposer à l'élément, une contrainte supplémentaire et une intégration complète. Cependant, cette contrainte supplémentaire n'est déterminée précisément à l'aide de la loi de comportement particulière qu'à la première itération en implicite, ou au premier incrément en explicite, ou à des instants particuliers. La matrice de raideur associée  $[K_{sup}]$  est ensuite sauvegardée pour les itérations ou incréments suivants. La stabilisation est alors effectuée en considérant une force élastique ( $F_{stab} = -\alpha[K_{sup}](\Delta ddl)$ ). L'énergie de stabilisation est alors calculée via :

$$E_{stab} = \sum_{elements} \int_{elem} E_{stab} dv = \sum_{elements} \sum_{pti} \alpha < \Delta ddl > [K_{sup}](\Delta ddl) W(pti) \sqrt{g(pti)} \tag{678}$$

11. **energie\_penalisation** : elle correspond à l'énergie de pénétration développée par les éléments de contact via la méthode de pénalisation. Elle globalise l'énergie de pénétration de tous les éléments. Sur chaque élément de contact l'énergie est calculée selon :

$$energie\_penalisation = 0.5 F\_N gap \tag{679}$$

$F\_N$  est la force normale de contact, calculée via la pénalisation,  $gap$  est la profondeur de pénétration.

12. **energie\_frot\_elast** : elle correspond à l'énergie élastique développée par les forces tangentielles de contact, lorsque le contact n'est pas glissant. Elle globalise l'énergie de tous les éléments de contact. Sur chaque élément de contact l'énergie est calculée selon :

$$energie\_frot\_elast = 0.5 F\_T dep\_tangential \tag{680}$$

avec  $F_T$  est la force tangentielle,  $dep\_tangentielle$  le déplacement tangentielle.

13. **energie\_frot\_plast** : elle correspond à l'énergie développée par les forces tangentielles de contact pendant un glissement. Elles globalisent l'énergie de tous les éléments de contact. Dans le cas d'un frottement de Coulomb la force de frottement sur un élément de contact est calculée selon :

$$F\_frot = force\_tangente \cdot \mu_{frot} \cdot \|\vec{F}_{normale}\| / \|\vec{F}_{tangente}\| \quad (681)$$

où la force de contact est décomposée en  $\vec{F}_{normale}$  et  $\vec{F}_{tangente}$ ,  $force\_tangente$  est la valeur algébrique de la force tangente,  $\mu_{frot}$  est le coefficient de Coulomb.

D'où le calcul de l'énergie de frottement selon :

$$\Delta energie\_frot\_plast = F\_frot \cdot vit\_T \cdot \Delta t \quad (682)$$

ou  $vit\_T$  est l'intensité de la vitesse de déplacement et  $\Delta t$  la durée de l'incrément de déplacement

Ensuite cette énergie est sommée sur tous les éléments de contact et accumulée tout au long du chargement. Elle est irréversible, elle ne peut qu'augmenter.

14. **energie\_visco\_numerique** : Globalise la totalité de la dissipation visqueuse d'origine numérique : amortissement de Rayleigh, depuis le début du chargement. La viscosité numérique conduit à l'apparition de forces visqueuse définies à chaque noeud  $forces\_vis\_num$  d'où le calcul de énergie visqueuse associée :

$$E_{vis\_num}^{t+\Delta t} = E_{vis\_num}^t + \langle \Delta X \rangle (forces\_vis\_num) \quad (683)$$

15. **energie\_bulk\_viscosity** : Le "bulk viscosity" est une technique permettant d'atténuer les hautes fréquences dites "numériques" qui apparaissent lors d'un calcul dynamique. La méthode consiste à introduire une modification de la contrainte fonction de la vitesse de déformation, ce qui entraîne l'apparition d'une énergie associée fictive qu'il est important de pouvoir mesurer pour valider ou non le calcul final.

Le calcul de l'énergie associée s'effectue en sommant sur tous les éléments et points d'intégration où la contrainte "bulk viscosity" est introduite :

$$\begin{aligned} q &= \rho l \left( (C_B)^2 l (\mathbf{I}_D)^2 - C_T C \mathbf{I}_D \right) \\ E_{bulk}^{t+\Delta t} &= E_{bulk}^t + \sum_{elements} \sum_{pti} \left( -q \mathbf{I}_D \Delta t W(pti) \sqrt{g(pti)} \right) \\ P_{bulk}^{t+\Delta t} &= P_{bulk}^t + \sum_{elements} \sum_{pti} \left( -q \mathbf{I}_D W(pti) \sqrt{g(pti)} \right) \end{aligned} \quad (684)$$

avec  $C$  la célérité d'une onde de compression, " $l$ " la longueur géométrique caractéristique de l'élément, " $C_B$ " et " $C_T$ " les deux coefficients qui pilotent l'intensité de la contrainte "bulk viscosity" (cf. documentation utilisateur),  $\mathbf{I}_D$  la trace du tenseur vitesse de déformation,  $W(pti)$  est le poids d'intégration au point d'intégration "pti",  $\sqrt{g}$  est le jacobien.

16. **volume\_total\_matiere** : Le volume total de matière est obtenue en sommant les volumes élémentaires associées aux points d'intégration des éléments :

$$volume\_total\_matiere = \sum_{elements} \sum_{pti} \left( W(pti) \sqrt{g(pti)} \right) \quad (685)$$

avec  $W(pti)$  le poids d'intégration au point d'intégration "pti",  $\sqrt{g(pti)}$  le jacobien.

17. **energie\_stabilisation\_membrane\_biel** : N'est effective que pour les membranes (V 6.938) . L'idée est d'introduire une raideur suivant la direction normale au plan de la membrane. La force des raideurs est égale à :

$$\vec{F} = -\alpha \times [(\vec{X}(t + \Delta t) - \vec{X}(t)) \cdot \vec{N}] \times \vec{N} \quad (686)$$

où  $\alpha$  est l'intensité de la raideur de stabilisation,  $(\Delta \vec{X} = \vec{X}(t + \Delta t) - \vec{X}(t))$  représente la variation de position du point (donc de chaque noeud) entre le début et la fin de l'incrément,  $\vec{N}$  est la normale à la membrane calculée à chaque point d'intégration. D'où l'énergie de stabilisation calculée comme celle d'un comportement élastique de rappel à l'image d'une pénalisation :

$$energie\_stabilisation\_membrane\_biel = 0.5 F (\Delta \vec{X} \cdot \vec{N}) \quad (687)$$

18. **vol\_total2D\_avec\_plan\_yz** ,  
**vol\_total2D\_avec\_plan\_xz** ,  
**vol\_total2D\_avec\_plan\_xy** :

Ces grandeurs sont spécifiques aux structures 2D membranaires. Il s'agit du volume entre un plan et la membrane. Le calcul s'effectue en sommant sur les éléments, le volume individuel compris entre le plan et l'élément fini membrane. Pour ce faire, l'élément fini est décomposé en triangles linéaires : ex : un triangle quadratique est décomposé en 4 triangles linéaires, cf. la documentation utilisateur pour le détail exhaustif de la triangulation linéaire de tous les éléments. Chaque triangle linéaire avec le plan associé, conduit à la création d'un volume pentaédrique dont on peut calculer l'intégral exact, d'où le volume complet final par sommation de tous les volumes pentaédriques.

19. **maxpui sext** : le maximum de puissance extérieure. Par défaut il s'agit de la puissance virtuelle pour une vitesse de 1, ce qui conduit en fait aux forces extérieures  $\vec{F}_{ext}$ . Ainsi **maxpui sext** représente le maximum des forces extérieures en jeu pendant le calcul.

$$maxpui sext = \|\vec{F}_{ext}\|_{\infty}$$

Ces forces correspondent aux forces imposées et elles incluent les forces de contact ! par contre elles n'incluent pas les réactions dues aux cinématiques imposées.

20. **maxpui sint** : le maximum de puissance intérieure. Comme pour la puissance extérieure, il s'agit par défaut de la puissance virtuelle intérieure pour une vitesse de 1, ce qui conduit en fait aux forces généralisées intérieures  $\vec{F}_{int}$ . **maxpui sint** représente ainsi le maximum des forces généralisées intérieures, en jeu pendant le calcul.



$$\text{maxpuissint} = \|\vec{F}_{int}\|_{\infty}$$

Les forces intérieures sont dues au comportement interne du matériau, elles sont donc directement pilotées par les lois de comportement utilisées dans le calcul.

21. **maxreaction** :  
le maximum des réactions  $\text{maxreaction} = \|\vec{R}_{eac}\|_{\infty}$   
dues aux cinématiques imposées.
22. **maxresiduglobal** :  
le maximum du résidu global d'équilibre  $\text{maxresiduglobal} = \|\vec{R}\|_{\infty}$
23. **maxdeltax** :  
le maximum de l'incrément de déplacement entre les instants "t" et "t+Δt" :  
 $\text{maxdeltax} = \|\Delta_t^{t+\Delta t} \vec{X}\|_{\infty}$ .  
Cette grandeur est mise à jour à chaque itération et chaque incrément.
24. **maxvardeltax** :  
le maximum de variation de l'incrément de déplacement entre 2 itérations en implicite et entre 2 incréments en explicite.  
 $\text{maxvardeltax} = \|\delta_i^{i+1} (\Delta_t^{t+\Delta t} \vec{X})\|_{\infty}$
25. le maximum de l'incrément de degré de liberté entre les instants "t" et "t+Δt" :  
 $\text{maxvarddl} = \|\Delta_t^{t+\Delta t} \vec{ddl}\|_{\infty}$ .  
Cette grandeur est mise à jour à chaque itération et chaque incrément. Ici il s'agit des ddl primaires correspondant à l'équation d'équilibre global et du type de problème.
  - En dynamique explicite, il s'agit des accélérations entre "t" et "t+Δt",
  - en dynamique implicite, il s'agit de la variation des accélérations entre l'itération "i" et "i+1",
  - en mécanique statique et transitoire, il s'agit de la variation des déplacements entre l'itération "i" et "i+1",
  - en thermique statique et transitoire il s'agit de la variation des températures entre l'itération "i" et "i+1".
26. concernant les algorithmes
  - la valeur de la norme utilisée pour la convergence globale, mot clé : " **norme\_de\_convergence** "
  - le numéro des itérations d'équilibre en cours dans l'algorithme global, mot clé : " **compteur\_iteration\_algo\_global** "
  - le numéro d'incrément de chargement en cours dans l'algorithme global, mot clé : " **compteur\_increment\_charge\_algo\_global** "
  - le numéro interne de définition de l'algorithme en cours, mot clé : **algo\_global\_actuel**  
On se reportera à la documentation utilisateur pour plus de détail concernant la signification de ce numéro.

Treizième partie  
**Annexes**

## 28 Éléments particuliers de calcul tensoriel

### 28.1 Produit tensoriel de deux vecteurs

Le produit tensoriel de deux vecteurs permet de créer un tenseur d'ordre deux à partir de deux vecteurs. Soient deux vecteurs  $\vec{V}$  et  $\vec{U}$ , on a :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A} &= V^i U^j \vec{g}_i \otimes \vec{g}_j = A^{ij} \vec{g}_i \otimes \vec{g}_j \\
 &= V_i U_j \vec{g}^i \otimes \vec{g}^j = A_{ij} \vec{g}^i \otimes \vec{g}^j \\
 &= V^i U_j \vec{g}_i \otimes \vec{g}^j = A^i_j \vec{g}_i \otimes \vec{g}^j \\
 &= \vec{V} \otimes \vec{U}
 \end{aligned} \tag{688}$$

On remarque que le tenseur résultat n'est symétrique que si les deux vecteurs sont identiques. Ceci met en évidence que l'opération de produit tensoriel n'est pas commutative.

### 28.2 Produit tensoriel de deux Tenseurs

Le produit tensoriel de deux tenseurs permet de créer un tenseur d'ordre quatre à partir de deux tenseurs d'ordre deux. Soient deux tenseurs  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{B}$ , on a par exemple en 2 fois covariants :

$$\mathbf{W} = A^{ij} B^{kl} \vec{g}_i \otimes \vec{g}_j \otimes \vec{g}_k \otimes \vec{g}_l = W^{ijkl} \vec{g}_i \otimes \vec{g}_j \otimes \vec{g}_k \otimes \vec{g}_l = \mathbf{A} \otimes \mathbf{B} \tag{689}$$

L'opération peut s'appliquer également (comme dans le cas des vecteurs) à tous les type de coordonnées : covariants et contravariants.

On remarque que le tenseur résultat est symétrique par rapport aux deux premiers indices si et seulement si le tenseur  $\mathbf{A}$  l'est également, idem par rapport aux deux derniers indices. Enfin il sera symétrique par rapport aux indices 1 et 3 ou 2 et 4 si les deux tenseurs sont identiques.

### 28.3 Calcul matriciel pour les changements de base

Supposons deux bases curvilignes  $\vec{g}_i$  et  $\vec{g}'_i$  et les bases duales associés :  $\vec{g}^i$  et  $\vec{g}'^i$ . La base  $\vec{g}'_i$  peut s'écrire dans la base  $\vec{g}_i$  et de même pour  $\vec{g}'^i$  dans  $\vec{g}^i$

$$\vec{g}'_i = \beta_i^j \vec{g}_j \quad , \quad \vec{g}'^i = \gamma^i_j \vec{g}^j \tag{690}$$

On peut aussi exprimer ces relations sous forme matricielle :

$$(\vec{g}'_i) = [\beta_i^j] (\vec{g}_j) \quad , \quad (\vec{g}'^i) = [\gamma^i_j] (\vec{g}^j) \tag{691}$$

Pour les matrices  $[\beta_i^j]$  et  $[\gamma^i_j]$ , le premier indice est l'indice de ligne et le second indice et l'indice de colonne.

Comme nous avons par définition de la base duale :  $\vec{g}'_i \cdot \vec{g}'^j = \delta_i^j$ , cela conduit à : une relation sur les matrices associées :

$$\begin{aligned}
\vec{g}'_i \cdot \vec{g}'^j &= \delta_i^j = \beta_i^e \vec{g}_e \cdot \gamma_f^j \vec{g}^f \\
&= \beta_i^e \gamma_f^j \delta_e^f \\
&= \beta_i^e \gamma_{:e}^j
\end{aligned} \tag{692}$$

d'où sous forme matricielle

$$\begin{aligned}
[\langle \vec{g}'_i \rangle (\vec{g}'^j)] &= [\delta_i^j] \\
&= [\beta_i^e] [\gamma_{:e}^j]^T
\end{aligned} \tag{693}$$

ou encore :

$$[\beta_j^i]^{-1} = [\gamma_{:j}^i]^T = [\gamma^{(T)j}_i] \quad \text{et} \quad [\beta_i^j]^{-1T} = [\beta^{(T)j}_i]^{-1} = [\gamma_{:i}^j] \tag{694}$$

Dans ces relations la signification des indices "i" et "j" n'est pas celles des indices de tenseurs par exemple, car on traite ici l'ensemble de la matrice. Ce sont dans tous les cas des indices muets. Par contre leurs positions a de l'importance, le premier indiquant l'indice de ligne et le second l'indice de colonne. En inversant on a aussi :

$$[\beta_j^i] = [\gamma_{:j}^i]^{-1T} = [\gamma^{(T)j}_i] \quad \text{et} \quad [\beta_i^j]^T = [\beta^{(T)j}_i] = [\gamma_{:i}^j]^{-1} \tag{695}$$

### 28.3.1 Application pour un changement de base quelconque d'un vecteur

Supposons un vecteur  $\vec{A} = A_i \vec{g}^i = A'_k \vec{g}'^k$ . On cherche à exprimer  $A_i$  en fonction de  $A'_k$  et vice versa.

On a naturellement :

$$A_i = A'_k \gamma_{:i}^k \quad \text{ou sous forme matricielle} \quad (A_i) = [\gamma_{:i}^k]^T (A'_k) \tag{696}$$

D'où également la relation inverse :

$$(A'_f) = \left[ [\gamma_{:f}^i]^T \right]^{-1} [\gamma_{:i}^k]^T (A'_k) = [\gamma_{:f}^i]^{-1T} (A_i) = [\beta_f^i] (A_i) \tag{697}$$

Cas des coordonnées contravariantes,  $\vec{A} = A^i \vec{g}_i = A'^k \vec{g}'_k$ . On cherche à exprimer  $A^i$  en fonction de  $A'^k$  et vice versa. On a naturellement :

$$A^i = A'^k \beta_k^i \quad \text{ou sous forme matricielle} \quad (A^i) = [\beta_k^i]^T (A'^k) \tag{698}$$

D'où également la relation inverse :

$$(A'^f) = \left[ [\beta_k^i]^T \right]^{-1} [\beta_k^i]^T (A'^k) = [\beta_i^f]^{-1T} (A^i) = [\gamma_{:i}^f] (A^i) \tag{699}$$

### 28.3.2 Application pour un changement de base quelconque d'un tenseur

Supposons un tenseur  $\mathbf{A} = A_{ij}\vec{g}^i \otimes \vec{g}^j = A'_{kl}\vec{g}'^k \otimes \vec{g}'^l$ . On cherche à exprimer  $A_{ij}$  en fonction de  $A'_{kl}$  et vice versa.

On a naturellement :

$$A_{ij} = A'_{kl}\gamma_i^k\gamma_j^l \quad \text{ou sous forme matricielle} \quad [A_{ij}] = [\gamma_i^k]^T [A'_{kl}] [\gamma_j^l] \quad (700)$$

D'où également la relation inverse :

$$[A'_{fe}] = \left[ [\gamma_i^f]^T \right]^{-1} [\gamma_i^k]^T [A'_{kl}] [\gamma_j^l] [\gamma_e^j]^{-1} = [\gamma_i^f]^{-1T} [A_{ij}] [\gamma_e^j]^{-1} = [\beta_f^i] [A_{ij}] [\beta_e^j]^T \quad (701)$$

Cas des coordonnées deux fois contravariantes,  $\mathbf{A} = A^{ij}\vec{g}_i \otimes \vec{g}_j = A'^{kl}\vec{g}'_k \otimes \vec{g}'_l$ . On cherche à exprimer  $A^{ij}$  en fonction de  $A'^{kl}$  et vice versa. On a naturellement :

$$A^{ij} = A'^{kl}\beta_k^i\beta_l^j \quad \text{ou sous forme matricielle} \quad [A^{ij}] = [\beta_k^i]^T [A'^{kl}] [\beta_l^j] \quad (702)$$

D'où également la relation inverse :

$$[A'^{fe}] = \left[ [\beta_i^f]^T \right]^{-1} [\beta_k^i]^T [A'^{kl}] [\beta_l^j] [\beta_j^e]^{-1} = [\beta_i^f]^{-1T} [A^{ij}] [\beta_j^e]^{-1} = [\gamma_i^f] [A^{ij}] [\gamma_j^e]^T \quad (703)$$

Cas des coordonnées mixtes covariantes contravariantes,  $\mathbf{A} = A_i^j\vec{g}^i \otimes \vec{g}_j = A'^l_k\vec{g}'^k \otimes \vec{g}'_l$ . On cherche à exprimer  $A_i^j$  en fonction de  $A'^l_k$  et vice versa. On a naturellement :

$$A_i^j = A'^l_k\gamma_i^k\beta_l^j \quad \text{ou sous forme matricielle} \quad A_i^j = [\gamma_i^k]^T [A'^l_k] [\beta_l^j] \quad (704)$$

D'où également la relation inverse :

$$[A'^e_f] = \left[ [\gamma_i^f]^T \right]^{-1} [\gamma_i^k]^T [A'^l_k] [\beta_l^j] [\beta_j^e]^{-1} = [\gamma_i^f]^{-1T} [A_i^j] [\beta_j^e]^{-1} = [\beta_f^i] [A_i^j] [\gamma_j^e]^T \quad (705)$$

Et pour finir, le cas mixte : contravariant covariant, on a :

$$A^i_j = A'^k_l\beta_k^i\gamma_j^l \quad \text{ou sous forme matricielle} \quad A^i_j = [\beta_k^i]^T [A'^k_l] [\gamma_j^l] \quad (706)$$

et la relation inverse :

$$[A'^f_e] = \left[ [\beta_i^f]^T \right]^{-1} [\beta_k^i]^T [A'^k_l] [\gamma_j^l] [\gamma_e^j]^{-1} = \left[ [\beta_i^f]^T \right]^{-1} [A^i_j] [\gamma_e^j]^{-1} = [\gamma_i^f] [A^i_j] [\beta_e^j]^T \quad (707)$$

### 28.3.3 Cas particulier de la base absolue

Supposons que les vecteurs  $\vec{g}_i$  et  $\vec{g}'^i$  s'écrivent selon :

$$\vec{g}_i = B_i^a \vec{I}_a \quad \text{et} \quad \vec{g}'^i = A^i_a \vec{I}^a \quad (708)$$

Si l'on utilise les formules génériques pour passer des bases  $\vec{g}_i$  et  $\vec{g}^i$  à la base absolue il nous faut calculer les matrices  $[\beta]$  et  $[\gamma]$ . Par définition nous avons alors :

$$\vec{g}'_a = \vec{I}_a = \beta_a^j \vec{g}_j \quad , \quad \vec{g}'^b = \vec{I}^b = \gamma_j^b \vec{g}^j \quad (709)$$

d'où

$$\beta_a^j = \vec{I}_a \cdot \vec{g}^j = A_{.a}^j \quad , \quad \gamma_j^b = \vec{I}^b \cdot \vec{g}_j = B_j^b \quad (710)$$

c'est-à-dire sous forme matricielle et compte tenue des relations qui existent entre  $[\beta]$  et  $[\gamma]$  :

$$[\beta_a^j] = [A_{.a}^j] = [A_a^j]^T = [\gamma_{.a}^j]^{-1T} \quad , \quad [\gamma_j^b] = [B_j^b] = [B_j^b]^T = [\beta_j^b]^{-1T} \quad (711)$$

## 28.4 Particularités liées à plusieurs paramétrages matériels

Supposons deux types de coordonnées curvilignes  $\theta^i$  et  $\theta'^i$  et les vecteurs de bases naturelles associées :  $\vec{g}_i = \frac{\partial \vec{M}}{\partial \theta^i}$  et  $\vec{g}'_i = \frac{\partial \vec{M}}{\partial \theta'^i}$ . Par définition les composantes covariantes de  $\vec{g}'_i$  dans  $\vec{g}_j$  sont :  $\vec{g}'_i \cdot \vec{g}_j$  d'où :

$$\vec{g}'_i = (\vec{g}'_i \cdot \vec{g}_j) \vec{g}^j = (\vec{g}'_i \cdot \vec{g}^j) \vec{g}_j \quad (712)$$

Par ailleurs nous avons :

$$\vec{g}'_i = \frac{\partial \vec{M}}{\partial \theta'^i} = \frac{\partial \theta^j}{\partial \theta'^i} \frac{\partial \vec{M}}{\partial \theta^j} = \vec{g}_j \frac{\partial \theta^j}{\partial \theta'^i} \quad (713)$$

d'où :

$$\frac{\partial \theta^j}{\partial \theta'^i} = \vec{g}'_i \cdot \vec{g}^j \quad (714)$$

**Cas particulier :** Supposons que  $\theta'^i = X'^i$  c'est-à-dire que le paramétrage  $\theta'^i$  correspond à des coordonnées dans une base de référence orthonormée (pas forcément la base globale). Dans ce cas  $\vec{g}'_i = \vec{I}'_i$  c'est-à-dire les vecteurs de la base de référence et l'on a :

$$\frac{\partial \theta^j}{\partial X'^i} = \vec{I}'_i \cdot \vec{g}^j \quad (715)$$

Les termes  $\frac{\partial \theta^j}{\partial X'^i}$  correspondent aux coordonnées dans la base de référence, des vecteurs de la base duale initiale  $\vec{g}^j$

**Application :** Supposons un état initial représenté par les points matériels  $\vec{M}$  et un état final représenté par les points  $\hat{\vec{M}}$ . On suppose que les points matériels sont repérés par leurs coordonnées initiales  $X'^a$  dans un repère orthonormé de référence et un jeu de paramètre  $\theta^i$  qui en éléments finis sont par exemple les coordonnées des éléments de référence qui servent pour l'interpolation.

Dans ce contexte, on a directement accès aux vecteurs des bases naturelles avant  $\vec{g}_i$  et après déformation  $\hat{\vec{g}}_i$  via les fonctions d'interpolation. On cherche maintenant à déterminer les bases naturelles associées au paramétrage  $X'^i$ . Par définition on aura :

$$\vec{g}'_i = \vec{I}'_i \quad \text{et} \quad \hat{\vec{g}}'_i = \hat{\vec{I}}'_i = (\vec{I}'_i \cdot \vec{g}^j) \hat{\vec{g}}_j \quad (716)$$

Cette formule permet de déterminer les coordonnées de la base naturelle déformée, correspondante à un paramétrage (cartésien) initial arbitraire d'une base orthonormée, à partir des bases naturelles associées à un paramétrage curviligne quelconque  $\theta^i$

De la même manière on aura :

$$\hat{g}'^i = \hat{I}'^i = (\vec{I}'^i \cdot \vec{g}_j) \hat{g}^j \quad (717)$$

Remarquons que la base  $\hat{I}'^i$  n'est pas à priori orthonormée.

**Cas particulier d'un espace 3D avec une base de deux vecteurs :** Dans le cas où les vecteurs  $\vec{g}_\alpha$  et  $\hat{g}_\alpha$  sont dans le plan  $\vec{I}'_\alpha$ , la matrice jacobienne de la transformation  $\theta^\alpha < - > X^\beta$  est carrée et dans le cas général non-singulière. Par contre dans le cas général où les vecteurs ne sont pas dans un plan  $X^\beta$ , le problème est mal posé et n'a pas de solution.

**Cas particulier d'un espace 3D avec deux bases de deux vecteurs :** Supposons que l'on dispose d'un repère orthonormé 2D particulier  $\vec{I}'_\alpha$ , la formule (716) est alors exploitable à condition d'être capable d'effectuer les produits scalaires  $(\vec{I}'_\alpha \cdot \vec{g}^\beta)$ . En particulier, les différents vecteurs peuvent très bien avoir 3 composantes, i.e. être définis dans un autre repère global composé de 3 vecteurs.

#### 28.4.1 Opérations dans une base orthonormée 2D dans un espace 3D

Soit connu un repère orthonormé 2D particulier  $\vec{I}'_\alpha$ . Ce repère est défini initialement par la connaissance des vecteurs de la base duale initiale dans ce nouveau repère :

$$\vec{g}^\alpha = \gamma_{\beta}^{\alpha} \vec{I}'^{\beta} = \Gamma_{.a}^{\alpha} \vec{I}'^a \quad (718)$$

Les coordonnées initiales des vecteurs de la base duale  $\Gamma_a^\alpha$  sont supposées connues. Nous allons voir que les coordonnées locales  $\gamma_{\beta}^{\alpha}$  sont suffisantes pour définir l'ensemble des vecteurs des différents repères.

Tout d'abord nous allons calculer les nouvelles coordonnées de la base naturelle à partir de la relation  $\vec{g}^\alpha \cdot \vec{g}_\beta = \delta_{\beta}^{\alpha}$ . Notons :  $\vec{g}_\beta = \beta_{\gamma}^{\beta} \vec{I}'_{\gamma}$

**NB :** Notons que par rapport aux chapitres précédents de changement de base (cf.28.3), c'est le second indice de  $[\beta_{\beta}^{\gamma}]$  qui représente le numéro du vecteur  $\vec{g}_\beta$ , ce qui évite dans les notations des résultats, l'emploi de l'opérateur "transposé".

$$\vec{g}^\alpha \cdot \vec{g}_\gamma = \delta_{\gamma}^{\alpha} = (\gamma_{\beta}^{\alpha} \vec{I}'^{\beta}) \cdot (\beta_{\gamma}^{\delta} \vec{I}'_{\delta}) = \gamma_{\beta}^{\alpha} \beta_{\gamma}^{\delta} \delta_{\delta}^{\beta} = \gamma_{\beta}^{\alpha} \beta_{\gamma}^{\beta} \quad (719)$$

Ce qui signifie que :

$$[\gamma_{\beta}^{\alpha}] [\beta_{\gamma}^{\beta}] = [\delta_{\gamma}^{\alpha}] \text{ c'est-à-dire } [\beta_{\gamma}^{\beta}] = [\gamma_{\beta}^{\alpha}]^{-1} [\delta_{\gamma}^{\alpha}] = [\gamma_{\beta}^{\gamma}]^{-1} \quad (720)$$

en notant ainsi que si la matrice  $[\gamma_{\beta}^{\alpha}]$  est construite de telle manière que chaque ligne représente un vecteur de la base duale  $\vec{g}^\alpha$ , et (cf. la remarque précédente relative à la transposée) les vecteurs de la base naturelle  $\vec{g}_\beta$  seront représentés par les colonnes de la matrice  $[\beta_{\beta}^{\gamma}]$ .

La formule (718) peut également s'utiliser pour calculer les coordonnées de la base orthonormée  $\vec{I}^{\beta}$  dans la base naturelle  $\vec{g}_{\alpha}$ . En effet supposons que nous nottions temporairement  $\vec{I}^{\beta} = I^{\beta\alpha} \vec{g}_{\alpha}$ . Pour un repère orthonormé, les vecteurs de la base naturelle et duale sont identiques d'où

$$\vec{I}^{\beta} = \vec{I}'_{\beta} = I^{\beta\alpha} \vec{g}_{\alpha} = I'^{\alpha}_{\beta} \vec{g}_{\alpha} \quad (721)$$

Par définition nous avons  $I'^{\alpha}_{\beta} = \vec{I}'_{\beta} \cdot \vec{g}^{\alpha}$  c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} I'^{\alpha}_{\beta} &= \vec{I}'_{\beta} \cdot \vec{g}^{\alpha} = \vec{I}'_{\beta} \cdot (\gamma^{\alpha}_{\delta} \vec{I}^{\delta}) = \delta^{\delta}_{\beta} \gamma^{\alpha}_{\delta} = \gamma^{\alpha}_{\beta} \\ \text{ou encore} \\ \vec{I}'_{\beta} &= \gamma^{\alpha}_{\beta} \vec{g}_{\alpha} \end{aligned} \quad (722)$$

**NB :** En remarquant comme précédemment que la colonnes  $\beta$  de  $[\gamma^{\alpha}_{\beta}]$  représente le vecteur  $\vec{I}'_{\beta}$

De manière équivalente on a également :

$$\vec{I}^{\delta} = \beta^{\delta}_{\alpha} \vec{g}^{\alpha} \quad (723)$$

**NB :** Ici c'est la ligne  $\delta$  de la matrice  $[\beta^{\delta}_{\alpha}]$  qui représente le vecteur  $\vec{I}^{\delta}$

Maintenant nous pouvons retrouver les coordonnées de la base orthonormée locale  $\vec{I}'^{\beta}$  dans la base globale  $\vec{I}^{\alpha}$  à l'aide de (722) ou (723) connaissant les coordonnées des vecteurs de la base naturelle  $\vec{g}_{\alpha}$  ou  $\vec{g}^{\alpha}$ . Par exemple avec (723) et (718) on a :

$$\vec{I}^{\delta} = \beta^{\delta}_{\alpha} \vec{g}^{\alpha} = \beta^{\delta}_{\alpha} \Gamma^{\alpha}_{\cdot a} \vec{I}^a \quad (724)$$

## 28.4.2 Mixte de repères orthonormés, et repères curvilignes

Supposons que l'on dispose à l'origine d'un paramétrage curviligne  $\theta^i$  avec les bases naturelles et duales associées  $\vec{g}_i = \frac{\partial \vec{M}}{\partial \theta^i}$  et  $\vec{g}^i$ . Ces vecteurs et positions sont exprimées dans un repère orthonormé de référence  $\vec{I}_a$ .

On suppose maintenant un repère orthonormé particulier  $\vec{I}'_b$  et on veut utiliser les coordonnées initiales dans  $\vec{I}'_b$  comme nouveau paramétrage matériel  $X'_b$ . Dans ce cas la base naturelle associée à ce paramétrage est de manière triviale  $\vec{I}'_b$ .

Maintenant on suppose une transformation géométrique représentée par une variation des vecteurs de la base naturelle  $\hat{g}_i$ . Les composantes de ces nouveaux vecteurs sont naturellement exprimés dans le repère initiale  $\vec{I}_a$ .

Nous avons vu qu'il est également possible de calculer la variation du repère naturel  $\vec{I}'_b$  associé au paramétrage matériel  $X'_b$  via la formule (716) :  $\hat{I}'_i = (\vec{I}'_i \cdot \hat{g}^j) \hat{g}_j$

Dans cette formule, tous les vecteurs sont naturellement exprimés dans  $\vec{I}_a$  et il faut noter que  $\hat{I}'_i$  n'est évidemment pas un repère orthonormé en général.

On cherche maintenant à se repérer dans  $\vec{I}'_b$ .

Supposons les notations suivantes :  $\hat{I}'_i = I_i{}^b \vec{I}'_b$ , on a par définition :

$$I_i{}^b = \hat{I}'_i \cdot \vec{I}'^b = (\vec{I}'_i \cdot \hat{g}^j) (\hat{g}_j \cdot \vec{I}'^b) \quad (725)$$



Dans cette formule on remarque que les deux produits scalaires sont interchangeables et que l'on peut également interpréter la formule de la manière suivante :  $(\hat{g}_j \cdot \vec{l}'^b)$  représente les coordonnées de  $\hat{g}_j$  dans le nouveau repère, et ensuite la relation (716) est utilisée pour calculer l'équivalent de  $\hat{g}_j$  c'est-à-dire  $\hat{l}'_i$  relativement au nouveau paramétrage  $X'_b$ .

## 28.5 Contraction des tenseurs

**Produit une fois contracté** : on contracte les vecteurs les plus proches ex :

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = (A^{ij} \hat{g}_i \otimes \hat{g}_j) \cdot (B^{kl} \hat{g}_k \otimes \hat{g}_l) = A^{ij} B^{kl} \hat{g}_{jk} \hat{g}_i \otimes \hat{g}_l = A^{ij} B_j^l \hat{g}_i \otimes \hat{g}_l \quad (726)$$

**Produits tensoriels** On introduit trois notations particulières à partir de deux tenseurs du premier ordre  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{B}$  :

$$\mathbf{T} = \mathbf{A} \bar{\otimes} \mathbf{B} = (A^{ij} \hat{g}_i \otimes \hat{g}_j) \bar{\otimes} (B^{kl} \hat{g}_k \otimes \hat{g}_l) = (A^{ik} \cdot B^{jl}) \hat{g}_i \otimes \hat{g}_j \otimes \hat{g}_k \otimes \hat{g}_l \quad (727)$$

$$\mathbf{T}' = \mathbf{A} \underline{\otimes} \mathbf{B} = (A^{ij} \hat{g}_i \otimes \hat{g}_j) \underline{\otimes} (B^{kl} \hat{g}_k \otimes \hat{g}_l) = (A^{il} \cdot B^{jk}) \hat{g}_i \otimes \hat{g}_j \otimes \hat{g}_k \otimes \hat{g}_l \quad (728)$$

$$\mathbf{T}'' = \mathbf{A} \overset{*}{\otimes} \mathbf{B} = 1/4 \cdot (A^{ik} \cdot B^{jl} + A^{jk} \cdot B^{il} + A^{il} \cdot B^{jk} + A^{jl} \cdot B^{ik}) \hat{g}_i \otimes \hat{g}_j \otimes \hat{g}_k \otimes \hat{g}_l \quad (729)$$

Dans le cas où les tenseurs  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{B}$  sont symétriques et qu'on cherche à obtenir un opérateur qui conduise à un résultat intrinsèquement symétrique par rapport aux deux premiers indices et par rapport aux deux derniers indices, par exemple dans le cas (qui nous intéresse ici) où on cherche à calculer un opérateur tangent, i.e à déterminer un tenseur du quatrième ordre  $\mathbf{T}$  qui sera "a priori" utilisé en double contraction avec un tenseur du quatrième ordre symétrique pour les deux premiers indices et les deux derniers (construit à partir du produit tensoriel d'un incrément de déplacement ou de vitesse ou de vitesse virtuelle avec un second tenseur du même type). Dans tous les cas, le fait de cette contraction, supprimera tous les termes n'ayant pas la symétrie de base. Ainsi soient par exemple  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{F}$ , symétriques du second ordre et  $\mathbf{Z} = \mathbf{E} \otimes \mathbf{F}$  du quatrième ordre étant donc par construction symétrique par rapport aux deux premiers indices et par rapport aux deux derniers indices. On a la relation importante suivante :

$$\mathbf{T} \dot{\vdash} \mathbf{Z} = \mathbf{T}' \dot{\vdash} \mathbf{Z} = \mathbf{T}'' \dot{\vdash} \mathbf{Z} \quad (730)$$

Donc l'opérateur  $\overset{*}{\otimes}$  agit comme filtrant les parties non symétriques qui de toute manière, disparaissent dans l'expression finale. Ainsi d'une manière pratique, au niveau de l'implémentation informatique, on utilisera "pour l'opérateur tangent" l'opérateur  $\overset{*}{\otimes}$  à la place de l'opérateur  $\bar{\otimes}$  et de  $\underline{\otimes}$ , bien que ces opérateurs soient différents intrinsèquement.

On remarque donc que le tenseur  $\mathbf{T}''$ , de part sa construction, est symétrique par rapport aux deux premiers indices et par rapport aux deux derniers indices :  $T''^{ijkl} = T''^{jikl} = T''^{ijlk} = T''^{jilk}$ . Il a donc 36 composantes différentes d'où la possibilité d'avoir un stockage plus compacte que tenseur général du 4<sup>ieme</sup> représenté par 81 coefficients.

**NB** : voir également 730 pour une explication pratique dans le cas de l'élasticité isotrope linéaire.

## 28.6 Variation d'un vecteur normé

Supposons un vecteur  $\vec{U}'$  quelconque et le vecteur normé colinéaire :  $\vec{U} = \frac{\vec{U}'}{\|\vec{U}'\|}$ . On cherche à calculer la variation du vecteur normé.

Par définition (en notant  $\partial U$  une variation quelconque) :

$$\partial \vec{U} = \frac{1}{\|\vec{U}'\|} \partial \vec{U}' - (\partial \vec{U}' \cdot \vec{U}') \frac{1}{\|\vec{U}'\|^3} \vec{U}' \quad (731)$$

Dans le cas où les vecteurs sont connus via leurs coordonnées contravariantes :

$$\partial \vec{U}' = \partial U'^i \vec{g}_i + U'^i \partial \vec{g}_i \quad (732)$$

d'où :

$$\partial \vec{U}' \cdot \vec{U}' = (\partial U'^i \vec{g}_i + U'^i \partial \vec{g}_i) \cdot (U'^j \vec{g}_j) = \partial U'^i U'^j g_{ij} + U'^i U'^j 0.5 \partial g_{ij} \quad (733)$$

et au final

$$\partial \vec{U} = \frac{1}{\|\vec{U}'\|} (\partial U'^i \vec{g}_i + U'^i \partial \vec{g}_i) - (\partial U'^i U'^j g_{ij} + U'^i U'^j 0.5 \partial g_{ij}) \frac{1}{\|\vec{U}'\|^3} \vec{U}' \quad (734)$$

### 28.6.1 Calcul de l'opérateur tangent

**Généralités** L'objectif est la détermination de l'évolution tangente du tenseur des contraintes par rapport aux degrés de liberté du problème.

L'opérateur tangent est utilisé lors du calcul de la raideur, plus précisément pour déterminer la variation de la puissance interne virtuelle :

$$\dot{P}_{int}^* = \int_{\mathcal{D}} \boldsymbol{\sigma} : \dot{\mathbf{D}} \, dv = \int_{\mathcal{D}} \sigma^{ij} : \dot{D}_{ij} \, dv \quad (735)$$

Nous allons utiliser l'expression en composantes pour des raisons de simplicité, ce qui ne conduira pas systématiquement à des grandeurs intermédiaires tensorielles. Notons cependant que cela ne pose pas de problème, du moment que la variation finale

$$\frac{\partial \dot{P}_{int}^*}{\partial ddl}$$

soit intrinsèque. Ainsi en composantes, on voit que le calcul de raideur fait intervenir la variation des contraintes par rapport au ddl :  $\frac{\partial \sigma^{ij}}{\partial ddl}$  grandeur ensuite doublement contractée avec  $\dot{D}_{ij}^*$ .

Le calcul de la contrainte a montré que celui-ci ne dépendait directement que du champ de déformation et de son histoire, ce qui permet d'écrire :

$$\frac{\partial \sigma^{ij}}{\partial ddl} = \frac{\partial \sigma^{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}} \frac{\partial \varepsilon_{kl}}{\partial ddl} \quad (736)$$

Notons que l'on dérive que par rapport aux composantes de la déformation. Cette dérivation est complète si l'on prend en compte les variations des composantes du tenseur métrique par rapport aux composantes  $\varepsilon_{kl}$ , ce qui montre la difficulté d'une notion de dérivée tensorielle dans ce cas.

La variation des composantes deux fois covariantes de la déformation par rapport aux ddl est relative à la cinématique. Nous n'en parlerons pas, d'autant qu'elle peut-être spécifique, par exemple pour des cinématiques de coque ..., dans tous les cas elle est indépendante du comportement matériel.

Décomposons le tenseur contrainte en une partie sphérique et une partie déviatorique.

$$\frac{\partial \sigma^{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}} = \frac{\partial S^{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}} + \frac{\partial (\frac{K}{3} I_{\boldsymbol{\varepsilon}} \hat{g}^{ij})}{\partial \varepsilon_{kl}} \quad (737)$$

#### Variation de la partie sphérique de $\boldsymbol{\sigma}$ par rapport aux composantes de déformations

En tenant compte de la relation

$$I_{\boldsymbol{\varepsilon}} = \text{trace}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \mathbf{Id} : \boldsymbol{\varepsilon} = \varepsilon_{ij} \hat{g}^{ij} \quad (738)$$

Il vient :

$$\frac{\partial (\frac{K}{3} I_{\boldsymbol{\varepsilon}})}{\partial \varepsilon_{kl}} = \frac{K}{3} \hat{g}^{kl} \quad (739)$$

**Variation du déviateur des déformations par rapport aux composantes de déformations** Le calcul de la variation du déviateur de la partie élastique nécessite le calcul de la variation du déviateur totale de la déformation. En tenant compte de la définition du déviateur des déformations :

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = \boldsymbol{\varepsilon} - \frac{1}{3} I_{\boldsymbol{\varepsilon}} \mathbf{Id} \quad (740)$$

il vient :

$$\frac{\partial \bar{\varepsilon}_{kl}}{\partial \varepsilon_{ij}} = \delta_k^i \delta_l^j - \frac{1}{3} \hat{g}^{ij} \hat{g}_{kl} \quad (741)$$

### Variation du multiplicateur plastique par rapport aux composantes de déformation

Maintenant il nous faut déterminer la variation du déviateur des contraintes par rapport aux composantes de déformation. Dans ce but nous cherchons tout d'abord la variation du multiplicateur plastique par rapport aux composantes de déformation. Pour cela on utilise la condition de consistance qui indique que l'on doit toujours avoir  $f = 0$  d'où :

$$df = 0 = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\varepsilon} |_{\Delta\lambda}} : d\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} + \frac{\partial f}{\partial \Delta\lambda |_{\boldsymbol{\varepsilon}}} d\Delta\lambda \quad (742)$$

Ces différentes dérivées sont indépendantes du repère matériel, la fonction  $f$  ne dépendant intrinséquement que de  $\Delta\lambda$  et de  $\boldsymbol{\varepsilon}$ .

La relation (221) conduit à :

$$d\Delta\lambda = \left( \frac{-1}{\frac{\partial f}{\partial \Delta\lambda |_{\boldsymbol{\varepsilon}}} } \right) \left( \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\varepsilon} |_{\Delta\lambda}} : d\boldsymbol{\varepsilon} \right) \quad (743)$$

Les dérivées tensorielles ne sont clairement explicite que si elle sont effectuées à systèmes d'axe constants par exemple pour la base  $\{\hat{g}_i\}$  constante. Dans ce cas on suppose la relation suivante vraie (qui n'est pas parfaitement démontrée pour l'instant) :

$$\left( \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\varepsilon} |_{\Delta\lambda}} : d\boldsymbol{\varepsilon} \right) = \left( \frac{\partial f}{\partial \varepsilon_{ij} |_{\Delta\lambda}} d\varepsilon^{ij} \right) = \left( \frac{\partial f}{\partial \varepsilon_{ij} |_{\Delta\lambda}} \hat{g}^{ki} \hat{g}^{lj} d\varepsilon_{kl} \right) \quad (744)$$

d'où

$$\frac{\partial \Delta\lambda}{\partial \varepsilon_{kl}} = \left( \frac{-1}{\frac{\partial f}{\partial \Delta\lambda |_{\boldsymbol{\varepsilon}}} } \right) \left( \frac{\partial f}{\partial \varepsilon_{ij} |_{\Delta\lambda}} \hat{g}^{ki} \hat{g}^{lj} \right) \quad (745)$$

Le terme  $\frac{\partial f}{\partial \Delta\lambda |_{\boldsymbol{\varepsilon}}}$  est calculé à la convergence de l'algorithme de Newton permettant le calcul du multiplicateur plastique. Il nous reste à déterminer la variation de  $f$  par rapport aux composantes de déformation. Pour cela il faut connaître la dépendance entre plasticité transporté et déformation en particulier la variation de la trace de  ${}_{..t}^{t+\Delta t} \boldsymbol{\varepsilon}^{(p)}$ .

### Variation de la trace de ${}_{..t}^{t+\Delta t} \boldsymbol{\varepsilon}^{(p)}$ par rapport aux composantes de déformation

Nous allons tout d'abord étudier la variation des éléments de la métrique. Nous avons tout d'abord :

$$\hat{g}^{ij} \hat{g}_{jk} = \delta_k^i$$

d'où

$$\frac{\partial \hat{g}^{ij}}{\partial \varepsilon_{lm}} \hat{g}_{jk} = -\hat{g}^{ij} \frac{\partial \hat{g}_{jk}}{\partial \varepsilon_{lm}}$$

D'autre part à partir de la définition du calcul de la déformation nous avons :

$$\left\{ \varepsilon_{lm} = \frac{1}{2}(\hat{g}_{lm} - g_{lm}) \right\} \rightarrow \left\{ \frac{\partial \hat{g}_{ij}}{\partial \varepsilon_{lm}} = 2 \delta_i^l \delta_j^m \right\}$$

Avec l'expression précédente nous obtenons :

$$\frac{\partial \hat{g}^{ir}}{\partial \varepsilon_{lm}} = -2 \hat{g}^{il} \hat{g}^{mr} \quad (746)$$

Nous pouvons maintenant déterminer la variation de la trace de  ${}^{t+\Delta t}_{..t} \boldsymbol{\varepsilon}^{(p)}$  par rapport au tenseur des déformations, indépendamment de la base matérielle choisit. A priori cette grandeur est bien tensorielle car ses constituants sont eux-mêmes des tenseurs objectifs.

$$\begin{aligned} \frac{\partial I_{..t} {}^{t+\Delta t} \boldsymbol{\varepsilon}^{(p)}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \Big|_{\hat{g}_{i,t}} &= \frac{\partial (\varepsilon_{ij}^{(p)} \hat{g}^{ij})}{\partial \varepsilon_{lm}} \Big|_{\hat{g}_{i,t}} \hat{g}_l \otimes \hat{g}_m \\ &= -2 \varepsilon_{ir}^{(p)} \hat{g}^{il} \hat{g}^{rm} \hat{g}_l \otimes \hat{g}_m \\ &= -2 \mathbf{Id} \otimes \mathbf{Id} : {}^{t+\Delta t}_{..t} \boldsymbol{\varepsilon}^{(p)} \\ &= -2 {}^{t+\Delta t}_{..t} \boldsymbol{\varepsilon}^{(p)} \end{aligned} \quad (747)$$

${}^{t+\Delta t}_{..t} \boldsymbol{\varepsilon}^{(p)}$  étant un tenseur objectif, la variation est donc objective. En particulier en composante cela donne :

$$\frac{\partial I_{..t} {}^{t+\Delta t} \boldsymbol{\varepsilon}^{(p)}}{\partial \varepsilon_{lm}} = -2 \varepsilon_{ir}^{(p)} \hat{g}^{il} \hat{g}^{rm} \quad (748)$$

**Variation des composantes du tenseur  $\mathbf{C}$  par rapport aux composantes de déformation** A partir de l'expression (176) nous avons :

$$\begin{aligned} \mathbf{C} &= \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} - \left( \Delta t \boldsymbol{\varepsilon}_n^{(p)} - \frac{I_{..t} {}^{t+\Delta t} \boldsymbol{\varepsilon}^{(p)}}{3} \mathbf{Id} \right) \\ &= \left( \bar{\varepsilon}_{ij} - \left( \varepsilon_{(n)ij}^{(p)} - \frac{I_{..t} {}^{t+\Delta t} \boldsymbol{\varepsilon}^{(p)}}{3} \hat{g}_{ij} \right) \right) \hat{g}^i \otimes \hat{g}^j \end{aligned} \quad (749)$$

d'où en tenant compte que  $\frac{\varepsilon_{(n)ij}^{(p)}}{\partial \varepsilon_{ij}} = 0$

$$\frac{\partial C_{kl}}{\partial \varepsilon_{ij}} = \delta_k^i \delta_l^j - \frac{1}{3} \hat{g}^{ij} \hat{g}_{kl} - 2 \varepsilon_{em}^{(p)} \hat{g}^{ei} \hat{g}^{mj} \hat{g}_{kl} \quad (750)$$

et pour les coordonnées deux fois contravariantes en tenant compte de la relation (746) :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial C^{kl}}{\partial \varepsilon_{ij}} &= \frac{\partial C_{rs}}{\partial \varepsilon_{ij}} \hat{g}^{rk} \hat{g}^{sl} + C_{rs} \left( \frac{\partial \hat{g}^{rk}}{\partial \varepsilon_{ij}} \hat{g}^{sl} + \hat{g}^{rk} \frac{\partial \hat{g}^{sl}}{\partial \varepsilon_{ij}} \right) \\
&= \left( \delta_r^i \delta_s^j - \frac{1}{3} \hat{g}^{ij} \hat{g}_{rs} - 2 \varepsilon_{em}^{(p)} \hat{g}^{ei} \hat{g}^{mj} \hat{g}_{rs} \right) \hat{g}^{rk} \hat{g}^{sl} + C_{rs} (-2 \hat{g}^{ri} \hat{g}^{kj} \hat{g}^{sl} - 2 \hat{g}^{rk} \hat{g}^{si} \hat{g}^{lj}) \\
&= \hat{g}^{ik} \hat{g}^{jl} - \frac{1}{3} \hat{g}^{ij} \hat{g}^{kl} - 2 \varepsilon^{(p)ij} \hat{g}^{kl} - 2 (C^{ril} \hat{g}^{kj} + C^{ki} \hat{g}^{lj}) \tag{751}
\end{aligned}$$

On voit que le dernier membre n'est pas symétrique par rapport aux indices, de manière à retrouver la symétrie, on utilise la symétrie de  $\hat{g}^{rk}$  :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial C^{kl}}{\partial \varepsilon_{ij}} &= \frac{\partial C_{rs}}{\partial \varepsilon_{ij}} \hat{g}^{kr} \hat{g}^{sl} + C_{rs} \left( \frac{\partial \hat{g}^{kr}}{\partial \varepsilon_{ij}} \hat{g}^{sl} + \hat{g}^{kr} \frac{\partial \hat{g}^{sl}}{\partial \varepsilon_{ij}} \right) \\
&= \hat{g}^{ik} \hat{g}^{jl} - \frac{1}{3} \hat{g}^{ij} \hat{g}^{kl} - 2 \varepsilon^{(p)ij} \hat{g}^{kl} + C_{rs} (-2 \hat{g}^{ki} \hat{g}^{rj} \hat{g}^{sl} - 2 \hat{g}^{rk} \hat{g}^{si} \hat{g}^{lj}) \\
&= \hat{g}^{ik} \hat{g}^{jl} - \frac{1}{3} \hat{g}^{ij} \hat{g}^{kl} - 2 \varepsilon^{(p)ij} \hat{g}^{kl} - 2 (C^{jil} \hat{g}^{ik} + C^{ki} \hat{g}^{lj}) \tag{752}
\end{aligned}$$

En retenant la décomposition additive de la déformation totale e La résolution du problème est supposée effectuée de manière incrémentale. Soit  $\varepsilon_n^p$  la déformation plastique obtenue à l'incrément "n". D'un point de vue informatique, ce sont les coordonnées mixtes dans le repère local matériel de ce tenseur qui sont obtenue après résolution. Le repère matériel de travail  $\{M, \vec{g}_i^{(n)}\}$  utilisé durant l'incrément "n" est en général différent de celui de l'incrément "n+1", à cause du changement de géométrie entre ces deux incréments. Il n'est donc pas possible de transporter sans modification les composantes locales de  $\varepsilon_n^p$  d'un incrément à l'autre. D'une manière pratique, pour tenir compte de la variation du repère matériel naturel,  $\varepsilon_n^p$  est projeté dans le repère globale en fin d'incrément et ses composantes globales ainsi obtenue sont utilisées à l'incrément "n+1" pour calculer sa projection dans le nouveau repère matériel naturel  $\{M, \vec{g}_i^{(n+1)}\}$ .

Durant la recherche de l'équilibre de l'incrément "n+1", nous avons :

$$\varepsilon_{n+1}^p = \varepsilon_n^p + \Delta \varepsilon^p \tag{753}$$

La déformation plastique  $\varepsilon_{n+1}^p$  est inconnue au travers de l'incrément plastique recherché  $\Delta \varepsilon^p$ . Par contre la déformation plastique de l'incrément précédent  $\varepsilon_n^p$  est constante au cours de cette recherche d'équilibre. Cependant il faut noter que bien que le tenseur  $\varepsilon_n^p$  soit constant il n'en est pas de même de ces composantes locales d'une itération à l'autre dans un processus itératif de recherche d'équilibre. De manière à pouvoir calculer la variation des composantes locales du tenseur des contraintes par rapport au degré de liberté du système, il est donc nécessaire de pouvoir connaître celle des composantes de  $\varepsilon_n^p$ . Pour des raisons pratiques d'implantation informatique nous nous intéressons aux composantes deux fois contravariantes  $\varepsilon_{ij(n)}^p$ . Au cours de l'incrément "n+1" nous avons la condition  $d\varepsilon_n^p = \mathbf{0}$

$$\frac{\partial \varepsilon_n^p}{\partial ddl} = \mathbf{0} = \frac{\partial \varepsilon_{ij(n)}^p}{\partial ddl} \vec{g}_{(n+1)}^i \otimes \vec{g}_{(n+1)}^j + \varepsilon_{ij(n)}^p \left( \frac{\partial \vec{g}_{(n+1)}^i}{\partial ddl} \otimes \vec{g}_{(n+1)}^j + \vec{g}_{(n+1)}^i \otimes \frac{\partial \vec{g}_{(n+1)}^j}{\partial ddl} \right) \tag{754}$$

A priori la variation des vecteurs de la base naturelle est connue. Supposons qu'elle soit exprimée dans la base duale.

$$\frac{\partial \vec{g}_{(n+1)}^i}{\partial d d l} = e_j^i \vec{g}_{(n+1)}^j \quad \text{c'est à dire} \quad e_j^i = \frac{\partial \vec{g}_{(n+1)}^i}{\partial d d l} \cdot \vec{g}_{(n+1)}^j \quad (755)$$

A l'aide des deux expressions précédente nous pouvons exprimer la variation des composantes deux fois covariantes de la déformation plastique de l'incrément "n".

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon_{ij(n)}^p}{\partial d d l} \vec{g}_{(n+1)}^i \otimes \vec{g}_{(n+1)}^j &= -\varepsilon_{ij(n)}^p \left( e_k^i \vec{g}_{(n+1)}^k \otimes \vec{g}_{(n+1)}^j + e_k^j \vec{g}_{(n+1)}^i \otimes \vec{g}_{(n+1)}^k \right) \\ &= -\left( \varepsilon_{kj(n)}^p e_i^k + \varepsilon_{ik(n)}^p e_j^k \right) \vec{g}_{(n+1)}^i \otimes \vec{g}_{(n+1)}^j \end{aligned} \quad (756)$$

d'où

$$\frac{\partial \varepsilon_{ij(n)}^p}{\partial d d l} = -\left( \varepsilon_{kj(n)}^p e_i^k + \varepsilon_{ik(n)}^p e_j^k \right) \quad (757)$$

On remarque que cette expression met bien en évidence la symétrie (i,j) des composantes du tenseur résultat.

Ensuite cette expression est utilisée pour le calcul de la variation des composantes covariantes de la déformation élastique en début d'itération.

## 29 Variation de la partie spérique de $\sigma$ par rapport au tenseur déformation

En tenant compte de la relation

$$I_{\varepsilon} = \text{trace}(\varepsilon) = \mathbf{Id} : \varepsilon \quad (758)$$

Il vient :

$$\frac{\partial (\frac{K}{3} I_{\varepsilon} \mathbf{Id})}{\partial \varepsilon} \Big|_{\vec{g}_{i,t}} = \frac{K}{3} \mathbf{Id} \otimes \mathbf{Id} \quad (759)$$

## 30 Variation du déviateur des déformations par rapport au tenseur de déformation

Le calcul de la variation du déviateur de la partie élastique nécessite le calcul de la variation du déviateur totale de la déformation. En tenant compte de la définition du déviateur des déformations :

$$\bar{\varepsilon} = \varepsilon - \frac{1}{3} I_{\varepsilon} \mathbf{Id} \quad (760)$$

il vient :

$$\frac{\partial \bar{\varepsilon}}{\partial \varepsilon} \Big|_{\vec{g}_{i,t}} = \mathbf{Id} \otimes \mathbf{Id} - \frac{1}{3} \mathbf{Id} \otimes \mathbf{Id} \quad (761)$$

### 31 Variation du tenseur $\mathbf{C}$ par rapport au tenseur de déformation

A partir de l'expression (176) nous avons :

$$\mathbf{C} = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} - \left( \frac{\Delta t}{..t} \boldsymbol{\varepsilon}_{(n)}^{(p)} - \frac{I_{..t}{}^{t+\Delta t} \boldsymbol{\varepsilon}_{(n)}^{(p)}}{3} \mathbf{Id} \right) \quad (762)$$

d'où

$$\frac{\partial \mathbf{C}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \Big|_{\bar{\mathbf{g}}_{i,t}} = \mathbf{Id} \otimes \bar{\mathbf{Id}} - \frac{1}{3} \mathbf{Id} \otimes \mathbf{Id} - \left( \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \Big|_{\bar{\mathbf{g}}_{i,t}} \frac{I_{..t}{}^{t+\Delta t} \boldsymbol{\varepsilon}_{(n)}^{(p)}}{\boldsymbol{\varepsilon}_{(n)}^{(p)}} + \frac{2}{3} I_{..t}{}^{t+\Delta t} \boldsymbol{\varepsilon}_{(n)}^{(p)} \otimes \mathbf{Id} \right) \quad (763)$$

Il nous faut donc déterminer la variation d'un tenseur transporté deux fois covariants. Tout d'abord remarquons que :

$$d\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{-1}{2} d(I_{..0}{}^{t+\Delta t} \boldsymbol{\varepsilon}) = \frac{-1}{2} g_{ij} d(\hat{\mathbf{g}}^i \otimes \hat{\mathbf{g}}^j) \quad (764)$$

d'où en multipliant de part et d'autre par  $g^{ki}$  on obtient :

$$-2g^{ki} d\boldsymbol{\varepsilon} = d(\hat{\mathbf{g}}^i \otimes \hat{\mathbf{g}}^j) \quad (765)$$

Maintenant calculons la variation du tenseur plastique convecté :

$$d(I_{..t}{}^{t+\Delta t} \boldsymbol{\varepsilon}_{(n)}^{(p)}) = \varepsilon_{(n)ik}^{(p)} d(\hat{\mathbf{g}}^i \otimes \hat{\mathbf{g}}^k) = -2g^{ki} \varepsilon_{(n)ik}^{(p)} d\boldsymbol{\varepsilon} = -2 I_{..t}{}^{t+\Delta t} \boldsymbol{\varepsilon}_{(n)}^{(p)} d\boldsymbol{\varepsilon} \quad (766)$$

On observe que le résultat est indépendant de la base retenue. A partir de cette expression et de la remarque précédente on peut en déduire la variation tangente à base constante :

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \Big|_{\bar{\mathbf{g}}_{i,t}} \frac{I_{..t}{}^{t+\Delta t} \boldsymbol{\varepsilon}_{(n)}^{(p)}}{\boldsymbol{\varepsilon}_{(n)}^{(p)}} = -2 I_{..t}{}^{t+\Delta t} \boldsymbol{\varepsilon}_{(n)}^{(p)} \mathbf{Id} \otimes \bar{\mathbf{Id}} \quad (767)$$

Le calcul final de la variation de  $\mathbf{C}$  s'en déduit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \Big|_{\bar{\mathbf{g}}_{i,t}} &= \mathbf{Id} \otimes \bar{\mathbf{Id}} - \frac{1}{3} \mathbf{Id} \otimes \mathbf{Id} - \left( -2 I_{..t}{}^{t+\Delta t} \boldsymbol{\varepsilon}_{(n)}^{(p)} \mathbf{Id} \otimes \bar{\mathbf{Id}} + \frac{2}{3} I_{..t}{}^{t+\Delta t} \boldsymbol{\varepsilon}_{(n)}^{(p)} \otimes \mathbf{Id} \right) \\ &= \left( 1 + 2 I_{..t}{}^{t+\Delta t} \boldsymbol{\varepsilon}_{(n)}^{(p)} \right) \mathbf{Id} \otimes \bar{\mathbf{Id}} - \frac{1}{3} \mathbf{Id} \otimes \mathbf{Id} - \left( \frac{2}{3} I_{..t}{}^{t+\Delta t} \boldsymbol{\varepsilon}_{(n)}^{(p)} \otimes \mathbf{Id} \right) \end{aligned} \quad (768)$$

Qui est une grandeur symétrique par rapport aux deux premiers indices et par rapport aux deux derniers indices.



## Références

- [Chung and Lee, 1994] Chung, J. and Lee, J. (1994). A new family of explicit time integration methods for linear and non-linear structural dynamics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 37 :3961–3976.
- [Engeln-Müllges and Uhlig, 1996] Engeln-Müllges, G. and Uhlig, F. (1996). *Numerical Algorithms with C*. Number ISBN 3-540-60530-4. Springer-Verlag.
- [Favier, 1988a] Favier, D. (1988a). *Contribution à l'étude théorique de l'élastohystérésis à température variable : application aux propriétés de mémoire de forme*. Thèse de doctorat d'état, Université Joseph Fourier & Institut National Polytechnique de Grenoble.
- [Favier, 1988b] Favier, D. (1988b). *Contribution à l'étude théorique de l'élastohystérésis à température variable : application aux propriétés de mémoire de forme*. Thèse de doctorat d'état, University UJF Grenoble 1, Institut National Polytechnique de Grenoble.
- [Guélin, 1980] Guélin, P. (1980). Remarques sur l'hystérésis mécanique. *J. Mécanique Théorique et Appliquée*, 19(2) :217–247.
- [Hulbert and Chung, 1996] Hulbert, G. and Chung, J. (1996). Explicit time integration algorithms for structural dynamics with optimal numerical dissipation. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, 137 :175–188. PII : S0045-7825(96)01036-5.
- [Lemaitre and Chaboche, 2004] Lemaitre, J. and Chaboche, J.-L. (2004). *Mécanique des matériaux solides*. Number ISBN 2 10 048632 2. Dunod.
- [Mahéo, 2006] Mahéo, L. (2006). *Etude des effets dissipatifs de différents schémas d'intégration temporelle en calcul dynamique par éléments finis*. PhD thesis, Université de Bretagne Sud.
- [Mahéo et al., 2009] Mahéo, L., Grolleau, V., and Rio, G. (2009). Damping efficiency of the tchamwa-wielgosz explicit dissipative scheme under instantaneous loading conditions. *Comptes Rendus de Mécanique*, 337 :722–732.
- [Manach and Rio, 1999] Manach, P. Y. and Rio, G. (1999). Analysis of orthotropic behavior in convected coordinate frames. *Computational Mechanics*, 23 :510–518. 10.1007/s004660050430.
- [Mora, 2004] Mora, V. (2004). Etude de l'intégration temporelle du tenseur taux de déformation, application à la modélisation de l'élastoplasticité en grandes transformations. Master's thesis, Université Européenne de Bretagne, Lorient.
- [Pegon, 1988] Pegon, P. (1988). *Contribution à l'étude de l'hystérésis élastoplastique*. Thèse d'état, Institut National Polytechnique, Université Joseph Fourier, Grenoble.
- [Press et al., 2002] Press, W. H., Teukolsky, S. A., Vetterling, W. T., and Flannery, B. P. (2002). *Numerical Recipes in C*. Number ISBN 0-521-43108-5. Cambridge University Press, second edition edition.
- [Rio, 2015] Rio, G. (2015). Hyperélasticité, rapport interne sur le développement de potentiels hyperélastiques en formulation entraînée. Technical report, Université de Bretagne Sud, <http://kleger.univ-ubs.fr/Herezh/projects/herezh/documents>.
- [RIO, 2017] RIO, G. (2017). Herezh++, manuel d'utilisation (user's manual in french), v 6.799, university of "bretagne sud", iddn.fr.010.0106078.000.r.p.2006.035.20600 (<http://kleger.univ-ubs.fr/herezh/projects/herezh/documents>).

- [Rio et al., 2008] Rio, G., Laurent, H., and Bles, G. (2008). Asynchronous interface between a finite element commercial software abaqus and an academic research code he-rezh++. *Advances in Engineering Software*, 39(12) :1010–1022. (ISSN 0965-9978).
- [Rio et al., 1995] Rio, G., Manach, P. Y., and Favier, D. (1995). Finite element simulation of 3d mechanical behaviour of niti shape memory alloys. *Archives of Mechanics*, 47(3) :537–556.
- [Underwood, 1983] Underwood, P. (1983). Dynamic relaxation : a review. in : Ted belytschko and thomas j.r. hughes editors. computational methods for transient analysis. volume 1, chapter 5, pages 245–265. Elsevier Science Publishers B.V.
- [Watts and Shampine, 2005] Watts, H. A. and Shampine, L. F. (2005). Rkf45 runge-kutta-fehlberg ode solver. Technical report, Albuquerque, New Mexico.
- [Wright, 2002] Wright, W. (2002). *General linear methods with inherent Runge-Kutta stability*. PhD thesis, University of Auckland.
- [ZHAI, 1996] ZHAI, W.-M. (1996). Two simple fast integration methods for large-scale dynamic problems in engineering. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 39(24) :4199–4214.