

# Hyperélasticité

## Rapport interne sur le développement de potentiels hyperélastiques en formulation entraînée.

Gérard Rio

2 août 2022

### Table des matières

<b>I</b>	<b>Introduction</b>	<b>6</b>
1	Introduction	7
<b>II</b>	<b>Cas générales</b>	<b>9</b>
2	Expressions générales de la contrainte en fonction du potentiel	10
2.1	Cas particulier d'un comportement purement sphérique . . . . .	11
<b>III</b>	<b>Comportement isotrope</b>	<b>13</b>
3	Cas d'un comportement isotrope, expressions générales de la contrainte en fonction des invariants de la déformation et du potentiel	14
3.1	Variation du premier invariant par rapport aux composantes de déformations	14
3.2	Variation du second invariant par rapport aux composantes de déformations	15
3.3	Variation du troisième invariant par rapport aux composantes de déformations	16
3.4	Variation du jacobien en fonction des déformations . . . . .	16
3.5	résumé : variation des composantes de la métrique et de la déformation en fonction de $\epsilon_{ij}$ . . . . .	16
3.6	Expression de la contrainte en fonction des trois moments . . . . .	18
3.7	Expression de la contrainte pour un potentiel exprimé en fonction de la variation relative de volume, de la trace du tenseur de déformation et du second moment du déviateur des déformations : $V, \bar{II}_{\bar{\epsilon}}, I_{\epsilon}$ . . . . .	18

<b>4</b>	<b>Calcul de la variation de la contrainte</b>	<b>20</b>
4.1	Expressions générales : variation par rapport aux degrés de liberté . . . . .	20
4.2	Variation par rapport aux composantes covariantes de la déformations . . . . .	21
<b>IV</b>	<b>Potentiel de Treloar</b>	<b>23</b>
<b>5</b>	<b>Exemple du potentiel de TRELOAR avec variation de la déformation volumique</b>	<b>24</b>
5.1	Expression du potentiel original . . . . .	24
5.2	Prise en compte de la variation relative de volume dans le potentiel de TRELOAR . . . . .	25
5.3	Nouveau potentiel : prise en compte d'un durcissement lors des fortes élongations . . . . .	25
5.4	Calcul des variations premières et secondes du potentiel de TRELOAR avec variation relative de volume . . . . .	26
5.5	Calcul des variations premières et secondes du nouveau potentiel . . . . .	27
<b>V</b>	<b>Présentation actuelle des potentiels AMF</b>	<b>29</b>
<b>6</b>	<b>Exemples de potentiels dédiés aux alliages à mémoire de forme (AMF)</b>	<b>30</b>
6.1	Calcul des variations premières du potentiel, expressions générale . . . . .	31
6.1.1	Cas de la mesure d'ALMANSI . . . . .	31
6.1.2	Cas de la mesure de HENCKY . . . . .	31
6.2	Calcul des variations secondes du potentiel, expressions générale . . . . .	32
6.2.1	Cas de la mesure d'ALMANSI . . . . .	32
6.2.2	Cas de la mesure de HENCKY . . . . .	33
6.3	Cas particuliers pour l'implantation numérique . . . . .	34
6.4	Potentiels dépendant de $V$ uniquement . . . . .	37
6.4.1	Exemple : potentiel $\omega_1$ . . . . .	37
6.4.2	Exemple : potentiel $\omega_2$ . . . . .	38
6.5	Potentiels dépendant de $V$ et de $Q_\epsilon$ . . . . .	38
6.5.1	Exemple : potentiel $\omega_3$ . . . . .	38
6.5.2	Exemple : potentiel $\omega_4$ . . . . .	39
6.6	Potentiels dépendant de $V$ , $Q_\epsilon$ et $\varphi_\epsilon$ . . . . .	41
6.6.1	Calcul des variations premières et secondes des paramètres $\chi_i$ . . . . .	41
6.6.2	Exemple : potentiel $\omega_5$ . . . . .	42
6.6.3	Exemple : potentiel $\omega_6$ . . . . .	43
6.6.4	Exemple : potentiel $\omega_7$ . . . . .	47
6.6.5	Dépendance à la température : potentiel $\omega_4$ et $\omega_6$ . . . . .	52
<b>7</b>	<b>Remarques sur le calcul d'un module de compressibilité et de cisaillement</b>	<b>54</b>

<b>VI</b>	<b>Remarques sur l’implantation informatique</b>	<b>55</b>
<b>8</b>	<b>Remarques sur la mise au point, dans le code EF</b>	<b>56</b>
8.1	Vérification des résultats . . . . .	56
8.1.1	Cas du potentiel de TRELOAR avec variation volumique . . . . .	56
<b>VII</b>	<b>Potentiel de Mooney-Rivlin</b>	<b>57</b>
<b>9</b>	<b>Cas du potentiel de Mooney-Rivlin</b>	<b>58</b>
9.1	Variations du potentiel de Mooney-Rivlin par rapport aux invariants $J_i$ . .	63
9.2	Variations de la partie additionnelle de courbure par rapport aux invariants $J_i$ . . . . .	63
9.3	Variation des contraintes par rapport aux déformations . . . . .	64
9.4	Variation des contraintes par rapport aux degrés de liberté . . . . .	65
9.5	Variation seconde des invariants par rapport aux déformations . . . . .	66
9.6	Particularités entraînées par l’utilisation d’un repère orthonormé . . . . .	67
<b>VIII</b>	<b>Autres Potentiels utilisant également les invariants <math>(J_1, J_2, J_3)</math></b>	<b>70</b>
<b>10</b>	<b>Potentiel de HartSmith</b>	<b>71</b>
<b>11</b>	<b>Extension à une forme polynomiale de potentiel, fonction des invariants <math>(J_1, J_2, J_3)</math></b>	<b>71</b>
<b>IX</b>	<b>Cas de potentiels utilisant les invariants de HENCKY</b>	<b>73</b>
<b>12</b>	<b>Cas de potentiels utilisant les invariants de HENCKY</b>	<b>74</b>
12.1	Variation première entre les invariants de HENCKY et de CAUCHY-GREEN gauche . . . . .	75
12.2	Variation seconde entre les invariants de HENCKY et de CAUCHY-GREEN gauche . . . . .	79
<b>X</b>	<b>Annexes</b>	<b>81</b>
<b>13</b>	<b>Première présentation des potentiels dédiés aux alliages à mémoire de forme (AMF)</b>	<b>82</b>
13.1	Potentiel 1, indépendant de la phase . . . . .	82
13.1.1	Calcul des variations premières et secondes du potentiel . . . . .	82
13.2	Potentiel 1, dépendant de la phase . . . . .	83
13.2.1	Calcul des variations premières et secondes du potentiel . . . . .	84

<b>14</b>	<b>Présentation du potentiel développé par Laurent Orgéas : calculs effectués par Laurent</b>	<b>88</b>
14.0.1	Exemple : potentiel $\omega_4$ . . . . .	88
14.0.2	Exemple : potentiel $\omega_6$ . . . . .	89
<b>15</b>	<b>Eléments particuliers de calcul tensoriel</b>	<b>93</b>
<b>16</b>	<b>Remarques concernant l'identification de potentiels</b>	<b>94</b>

## Liste des tableaux

## Table des figures

1	Evolution de $\cos(3\varphi_e)$ en fonction de $\alpha$ . . . . .	35
---	---	----

Première partie  
**Introduction**

# 1 Introduction

L'objectif est l'introduction de loi Hyperélastique dans un code éléments finis. On se situe dans le contexte des travaux développés par Denis Favier et ces collaborateurs : Pierre Yves Manach, Laurent Orgéas. Une première mise en place a été effectuée dans le code Herezh, version fortran 77 (Rio, Manach []). Suite à l'introduction de potentiels spécifiques aux élastomères (Thuillier, Moreau, Rio) l'utilisation directe du formalisme initial, qui s'appuie principalement sur la décomposition polaire du tenseur de déformation, a entraîné plusieurs difficultés. En particulier le calcul et l'utilisation du paramètre *angle de phase* conduit à des complexités numériques inutiles qui pourraient ne pas apparaître dans le cas de l'utilisation d'une autre série d'invariants. Ainsi l'idée est de remplacer dans le code de calcul, les paramètres de la décomposition polaire, à savoir la trace, le rayon de Mises et la phase, par des paramètres plus simples à utiliser numériquement, par exemple n'entraînant pas de division par zéro pour certaines configurations. Ceci n'empêche pas de développer et d'exprimer le potentiel sous forme d'invariants particuliers qui ont l'intérêt d'être parlant physiquement. La transformation que l'on propose n'est que purement mathématique, étant entendu que les choix d'invariants sont équivalents entre eux : à partir d'un certain choix d'invariants (complets et indépendants entre eux) on doit être capable d'exprimer n'importe quel autre choix d'invariant.

Dans ce travail on se propose d'utiliser tout d'abord pour les calculs intermédiaires les moments du tenseur de déformation et la variation volumique relative  $V$ .

$$\begin{aligned}
 I_\epsilon &= \epsilon_i^i = \epsilon_1^1 + \epsilon_2^2 + \epsilon_3^3 \\
 \bar{I}I_\epsilon &= \frac{1}{2} \epsilon_j^i \epsilon_i^j \\
 I\bar{I}I_\epsilon &= \frac{1}{3} \epsilon_j^i \epsilon_k^j \epsilon_i^k \\
 V &= \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{g_0}}
 \end{aligned} \tag{1}$$

On verra dans la suite du document que deux mesures de déformation sont envisagées : la mesure d'ALMANSI et la mesure de HENCKY (logarithmique). Dans le cas de la mesure d'ALMANSI nous avons la relation :

$$\frac{1}{V^2} = 1 - 2I_\epsilon + 2I_\epsilon^2 - 4\bar{I}I_\epsilon + 8I_\epsilon \bar{I}I_\epsilon - 8I\bar{I}I_\epsilon - \frac{4}{3}I_\epsilon^3 \tag{2}$$

alors que dans le cas de la mesure de HENCKY nous avons :

$$\ln(V) = I_\epsilon \tag{3}$$

A partir de ce choix d'invariants il nous faut redéfinir un certain nombre d'expressions nécessaire au calcul de la contrainte de CAUCHY et de ces variations par rapport aux degrés de liberté. Pour ce faire nous reviendrons aux définitions initiales des grandeurs de base.

**Remarques** Un des problèmes qui se pose lors de la recherche d'un potentiel hyperélastique, est le découplage déformation volumique / déformation avec changement de

forme. Supposons que le solide considéré est soumis à une pression hydrostatique, c'est-à-dire que la trace du tenseur des contraintes est non nulle, la contrainte de MISES ou de TRESCA est nulle, et l'angle de phase dans l'espace déviatoire des contraintes est quelconque. Dans ce cas, il apparaît naturelle d'obtenir un tenseur sphérique de déformation, ce qui correspond à un changement de volume sans changement de forme. A l'inverse un changement de volume, sans changement de forme devrait habituellement conduire à un tenseur sphérique de contrainte. Dans la pratique, l'obtention de ce type de comportement est difficile à satisfaire dans le cas de l'utilisation de la mesure d'ALMANSI, contrairement au cas de la mesure de HENCKY pour laquelle la la variation de volume est directement reliée à la trace du tenseur de déformation.

Dans le cas de la mesure d'ALMANSI nous retenons comme invariants finaux : la trace de la déformation qui mesure l'intensité de la partie sphérique, le deuxième moment du déviateur des déformations qui mesure l'intensité du déviateur et enfin la variation relative de volume qui se révèle être une grandeur distincte, particulièrement intéressante pour les élastomères.

$$\begin{aligned}
 I_\epsilon &= \epsilon_i^i = \epsilon_1^1 + \epsilon_2^2 + \epsilon_3^3 \\
 \bar{II}_\epsilon &= \bar{II}_\epsilon - \frac{I_\epsilon^2}{6} \\
 V &= \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{g_0}}
 \end{aligned} \tag{4}$$

Dans le cas de la mesure de HENCKY , la trace et la variation de volume étant directement lié, on utilise le troisième moment comme troisième invariant indépendant.

$$\begin{aligned}
 I_\epsilon &= \epsilon_i^i = \epsilon_1^1 + \epsilon_2^2 + \epsilon_3^3 = \ln(V) \\
 \bar{II}_\epsilon &= \bar{II}_\epsilon - \frac{I_\epsilon^2}{6} \\
 \bar{III}_\epsilon &
 \end{aligned} \tag{5}$$

Les potentiels sont supposés s'exprimer à l'aide de ces invariants. Dans une première étape les diverses expressions sont développées à l'aide des moments, puis pour l'écriture finale on effectue un changement de variable.

Les développements initiaux concernent la mesure d'ALMANSI. La mesure de HENCKY est prise en compte uniquement pour certain potentiel.

Deuxième partie  
**Cas générales**

## 2 Expressions générales de la contrainte en fonction du potentiel

L'objectif est de relier la contrainte au potentiel élastique. Tout d'abord dans le cadre d'un comportement hyperélastique, on suppose que le solide possède une énergie libre, fonction d'état uniquement, c'est-à-dire indépendante du trajet de chargement par exemple. Soit un paramétrage matériel  $\theta^i$  cet énergie peut s'exprimer sous la forme :

$$\begin{aligned}
 E &= \int_{\mathcal{D}} e \, dm \\
 &= \int_{\mathcal{D}} e \rho \, dV = \int_{\mathcal{D}_{ref}} e \rho \sqrt{g} \, d\theta^i \\
 &= \int_{\mathcal{D}_0} e_0 \rho_0 \, dV_0 = \int_{\mathcal{D}_{ref}} e_0 \rho_0 \sqrt{g_0} \, d\theta^i
 \end{aligned} \tag{6}$$

avec  $e$  l'énergie par unité de masse et  $\rho$  la masse volumique, l'indice 0 étant relatif au corps non déformé.

Classiquement la modélisation du comportement hyperélastique se réfère au corps non déformé alors que dans notre étude nous ferons référence au corps déformé. Ce choix, qui a priori n'est que mathématique, nous paraît plus en adéquation avec les mesures de déformation retenues : ALMANSI et HENCKY ainsi qu'avec la contrainte associée : CAUCHY. Cependant, nous introduisons quelques notations classiques relatives au milieu non déformé, de manière à pouvoir effectuer par la suite des comparaisons.

Soient les grandeurs :

- $\omega = e \rho$  la densité d'énergie par unité de corps déformé,
  - $W = e_0 \rho_0$  la densité d'énergie par unité de corps non déformé,
- avec ces notations l'énergie s'écrit :

$$\begin{aligned}
 E &= \int_{\mathcal{D}} \omega \, dV = \int_{\mathcal{D}_{ref}} \omega \sqrt{g} \, d\theta^i \\
 &= \int_{\mathcal{D}_0} W \, dV_0 = \int_{\mathcal{D}_{ref}} W \sqrt{g_0} \, d\theta^i
 \end{aligned} \tag{7}$$

d'où la relation qui relie les densités :

$$W = \omega \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{g_0}} = V \omega \tag{8}$$

Maintenant calculons la puissance en utilisant les relations classiques de la mécanique des milieux continus.

$$\begin{aligned}
 \dot{E} &= \int_{\mathcal{D}_{ref}} \frac{d(\omega \sqrt{g})}{dt} \, d\theta^i = \int_{\mathcal{D}_{ref}} \sigma : D \sqrt{g} \, d\theta^i \\
 &= \int_{\mathcal{D}_{ref}} \frac{dW}{dt} \sqrt{g_0} \, d\theta^i
 \end{aligned} \tag{9}$$

d'où :

$$\sigma : D = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{d(\omega\sqrt{g})}{dt} = \frac{\sqrt{g_0}}{\sqrt{g}} \frac{dW}{dt} \quad (10)$$

On suppose que l'énergie interne n'est fonction que de l'état de déformation du solide c'est-à-dire du tenseur  $\epsilon$  ce qui permet d'écrire :

$$\begin{aligned} \sigma : D &= \sigma^{ij} D_{ij} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial(\omega\sqrt{g})}{\partial\epsilon_{ij}} \frac{d\epsilon_{ij}}{dt} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial(\omega\sqrt{g})}{\partial\epsilon_{ij}} D_{ij} \\ &= \frac{\sqrt{g_0}}{\sqrt{g}} \frac{\partial W}{\partial\epsilon_{ij}} \frac{d\epsilon_{ij}}{dt} = \frac{\sqrt{g_0}}{\sqrt{g}} \frac{\partial W}{\partial\epsilon_{ij}} D_{ij} \end{aligned} \quad (11)$$

Ces expressions ne sont valides que si les composantes du tenseur de déformation sont exprimées dans le repère matériel entraîné pour la mesure d'ALMANZI et le repère en rotation logarithmique pour la mesure de HENCKY.

Ainsi par identification on obtient la relation générale permettant le calcul des composantes du tenseur des contraintes à partir des variations de la densité d'énergie élastique ou potentiel :

$$\sigma^{ij} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial(\omega\sqrt{g})}{\partial\epsilon_{ij}} = \frac{\sqrt{g_0}}{\sqrt{g}} \frac{\partial W}{\partial\epsilon_{ij}} \quad (12)$$

Ces composantes sont exprimées dans le repère matériel entraîné pour la mesure d'ALMANZI et le repère en rotation logarithmique pour la mesure de HENCKY.

## 2.1 Cas particulier d'un comportement purement sphérique

Considérons le cas d'une variation de volume sans changement de forme, en transformations finies.

$$\mathbf{D} = \left( \frac{\mathbf{I}_D}{3} \mathbf{Id} + \bar{\mathbf{D}} \right) = \frac{\mathbf{I}_D}{3} \mathbf{Id} \quad (13)$$

Dans ce cas nous avons :

$$\begin{aligned} \sigma : \mathbf{D} &= \left( \frac{\mathbf{I}_\sigma}{3} \mathbf{Id} + \mathbf{S} \right) : \left( \frac{\mathbf{I}_D}{3} \mathbf{Id} \right) \\ &= \frac{\mathbf{I}_\sigma}{3} \frac{\mathbf{I}_D}{3} \mathbf{Id} : \mathbf{Id} \\ &= \frac{\mathbf{I}_\sigma}{3} \frac{\mathbf{I}_D}{3} 3 = -p \mathbf{I}_D \end{aligned} \quad (14)$$

Cette formule est respectée quelque soit le tenseur des contraintes. En particulier, dans le cas d'un comportement anisotrope, ce dernier peut ne pas être sphérique.

Le tenseur de déformation est par contre sphérique et la déformation d'Almansi suivant l'axe "i" est par exemple, dans le repère naturel associé au paramétrage absolu initial () :

$$\epsilon_{ii} = 0.5((\lambda_i)^2 - 1)$$

d'où la vitesse de déformation

$$D_{ii} = \lambda_i \dot{\lambda}_i$$

. On a :  $\vec{g}_i = I_i$  et  $\hat{\vec{g}}_i = \lambda_i I_i$ . D'où  $\hat{g}_{ij} = \delta_{ij} (\lambda_i)^2$  et  $\hat{g}^{ij} = \delta^{ij} 1/(\lambda_i)^2$ . Ce qui permet le calcul de la trace de la vitesse de déformation :

$$\mathbf{I}_D = D_{ij} \hat{g}^{ij} = \sum_i \frac{\dot{\lambda}_i}{\lambda_i} = \frac{\dot{V}}{V}$$

. On retrouve le résultat connu de la vitesse relative de variation de volume.  
Cette expression est introduite dans (14) :

$$\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} = -p \frac{\dot{V}}{V} \quad (15)$$

ou encore :

$$\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D}\sqrt{g} = -p \dot{V} \sqrt{g_0} \quad (16)$$

D'autre part :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D}\sqrt{g} &= \frac{\partial(w \sqrt{g})}{\partial t} \\ &= \sqrt{g} \frac{\partial w}{\partial t} + w \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial t} \\ &= \sqrt{g} \frac{\partial w}{\partial V} \dot{V} + w \sqrt{g_0} \dot{V} \\ &= \sqrt{g_0} \dot{V} \left( V \frac{\partial w}{\partial V} + w \right) \end{aligned} \quad (17)$$

En groupant les relations (17) et (16), finalement on obtient :

$$-p = \left( V \frac{\partial w}{\partial V} + w \right) \quad (18)$$

Dans le cas où l'on utilise un potentiel exprimé sous forme d'une densité d'énergie par unité de corps non déformé (type Mooney-Rivlin classique et les autres potentiels de même type) :  $W = e_0 \rho_0 = \omega V$ , la formule est encore plus simple :

$$-p = \frac{\partial W}{\partial V} \quad (19)$$

Ces deux formules peuvent-être utiles pour calculer le module de compressibilité.

Troisième partie

# Comportement isotrope

### 3 Cas d'un comportement isotrope, expressions générales de la contrainte en fonction des invariants de la déformation et du potentiel

On se place dans le cadre de la mesure de déformation d'ALMANSI et on retient les invariants introduits dans l'introduction.

On suppose que le potentiel ne s'exprime que par l'intermédiaire des invariants du fait de l'isotropie matérielle.

$$\omega = \omega(I_\epsilon, \bar{I}I_\epsilon, \bar{I}\bar{I}I_\epsilon) \quad (20)$$

d'où le calcul des variations par rapport aux composantes de déformation.

$$\frac{\partial \omega}{\partial \epsilon_{ij}} = \frac{\partial \omega}{\partial I_\epsilon} \frac{\partial I_\epsilon}{\partial \epsilon_{ij}} + \frac{\partial \omega}{\partial \bar{I}I_\epsilon} \frac{\partial \bar{I}I_\epsilon}{\partial \epsilon_{ij}} + \frac{\partial \omega}{\partial \bar{I}\bar{I}I_\epsilon} \frac{\partial \bar{I}\bar{I}I_\epsilon}{\partial \epsilon_{ij}} \quad (21)$$

Les variations du potentiel par rapport aux invariants sont propres au potentiel étudié. Par contre les variations des invariants par rapport aux composantes de déformations peuvent être calculées indépendamment du potentiel considéré.

#### 3.1 Variation du premier invariant par rapport aux composantes de déformations

$$\begin{aligned} \frac{\partial I_\epsilon}{\partial \epsilon_{ij}} &= \frac{\partial(\epsilon_i^l)}{\partial \epsilon_{ij}} = \frac{\partial(\epsilon_{kl} \hat{g}^{kl})}{\partial \epsilon_{ij}} \\ &= \frac{\partial \epsilon_{kl}}{\partial \epsilon_{ij}} \hat{g}^{kl} + \epsilon_{kl} \frac{\partial \hat{g}^{kl}}{\partial \epsilon_{ij}} = \delta_i^k \delta_j^l \hat{g}^{kl} + \epsilon_{kl} \frac{\partial \hat{g}^{kl}}{\partial \epsilon_{ij}} = \hat{g}^{ij} + \epsilon_{kl} \frac{\partial \hat{g}^{kl}}{\partial \epsilon_{ij}} \end{aligned} \quad (22)$$

Pour calculer les variations des composantes duales de la métrique il nous faut revenir à la définition des composantes de la déformation.

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\hat{g}_{ij} - g_{ij}) \text{ ou encore } \hat{g}_{ij} = 2\epsilon_{ij} + g_{ij} \quad (23)$$

d'où :

$$\frac{\partial \hat{g}_{kl}}{\partial \epsilon_{ij}} = 2\delta_k^i \delta_l^j \quad (24)$$

La relation :

$$\hat{g}_{kl} \hat{g}^{lm} = \delta_m^k \quad (25)$$

conduit à :

$$-\frac{\partial \hat{g}_{kl}}{\partial \epsilon_{ij}} \hat{g}^{lm} = \hat{g}_{kl} \frac{\partial \hat{g}^{lm}}{\partial \epsilon_{ij}} \quad (26)$$

ou encore

$$\begin{aligned}
\hat{g}^{rk} \hat{g}_{kl} \frac{\partial \hat{g}^{lm}}{\partial \epsilon_{ij}} &= \delta_l^r \frac{\partial \hat{g}^{lm}}{\partial \epsilon_{ij}} \\
&= \frac{\partial \hat{g}^{rm}}{\partial \epsilon_{ij}} \\
&= -\hat{g}^{rk} \hat{g}^{ml} \frac{\partial \hat{g}_{kl}}{\partial \epsilon_{ij}} = -\hat{g}^{rk} \hat{g}^{ml} 2\delta_i^k \delta_j^l = -2\hat{g}^{ri} \hat{g}^{mj}
\end{aligned} \tag{27}$$

ce qui permet le calcul final de la variation du premier invariant :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial I_\epsilon}{\partial \epsilon_{ij}} &= \hat{g}^{ij} + \epsilon_{kl} \frac{\partial \hat{g}^{kl}}{\partial \epsilon_{ij}} \\
&= \hat{g}^{ij} - 2\epsilon_{kl} \hat{g}^{ki} \hat{g}^{lj} = \hat{g}^{ij} - 2\epsilon^{ij}
\end{aligned} \tag{28}$$

Sous forme tensorielle en adoptant les notations proposées en (9) :

$$\left( \frac{\partial I_\epsilon}{\partial \epsilon} \right)_{..} = \hat{g} - 2\epsilon \tag{29}$$

### 3.2 Variation du second invariant par rapport aux composantes de déformations

Le calcul est plus laborieux mais il suit la même procédure qu'avec le premier invariant.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \bar{I}_\epsilon}{\partial \epsilon_{ij}} &= \frac{\partial}{\partial \epsilon_{ij}} \left( \frac{1}{2} \epsilon_m^l \epsilon_l^m \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \epsilon_m^l}{\partial \epsilon_{ij}} \epsilon_l^m + \epsilon_m^l \frac{\partial \epsilon_l^m}{\partial \epsilon_{ij}} \right) \\
&= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial (\hat{g}^{lr} \epsilon_{rm})}{\partial \epsilon_{ij}} \epsilon_l^m + \epsilon_m^l \frac{\partial (\hat{g}^{mr} \epsilon_{rl})}{\partial \epsilon_{ij}} \right) \\
&= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \hat{g}^{lr}}{\partial \epsilon_{ij}} \epsilon_{rm} \epsilon_l^m + \frac{\partial \epsilon_{rm}}{\partial \epsilon_{ij}} \hat{g}^{lr} \epsilon_l^m + \epsilon_m^l \epsilon_{rl} \frac{\partial \hat{g}^{mr}}{\partial \epsilon_{ij}} + \epsilon_m^l \hat{g}^{mr} \frac{\partial \epsilon_{rl}}{\partial \epsilon_{ij}} \right) \\
&= \frac{1}{2} \left( -2\hat{g}^{li} \hat{g}^{rj} \epsilon_{rm} \epsilon_l^m + \delta_{ri} \delta_{mj} \hat{g}^{lr} \epsilon_l^m - 2\epsilon_m^l \epsilon_{rl} \hat{g}^{mi} \hat{g}^{rj} + \epsilon_m^l \hat{g}^{mr} \delta_{ri} \delta_{lj} \right) \\
&= \frac{1}{2} \left( -2\epsilon_m^j \epsilon^{mi} + \hat{g}^{li} \epsilon_l^j - 2\epsilon^{li} \epsilon_l^j + \epsilon_m^j \hat{g}^{mi} \right) \\
&= -2\epsilon_m^j \epsilon^{mi} + \epsilon^{ij}
\end{aligned} \tag{30}$$

Sous forme tensorielle :

$$\left( \frac{\partial \bar{I}_\epsilon}{\partial \epsilon} \right)_{..} = \epsilon - 2 \epsilon . \epsilon \tag{31}$$

On remarque dans ce calcul l'expression :

$$\frac{\partial \epsilon_m^l}{\partial \epsilon_{ij}} = -2\hat{g}^{li} \epsilon_m^j + \delta_m^j \hat{g}^{li} \tag{32}$$

qui va être utilisée dans les calculs suivant.

### 3.3 Variation du troisième invariant par rapport aux composantes de déformations

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \bar{III}_\epsilon}{\partial \epsilon_{ij}} &= \frac{\partial}{\partial \epsilon_{ij}} \left( \frac{1}{3} \epsilon_m^l \epsilon_k^m \epsilon_l^k \right) = \frac{1}{3} \left( \frac{\partial \epsilon_m^l}{\partial \epsilon_{ij}} \epsilon_k^m \epsilon_l^k + \epsilon_m^l \frac{\partial \epsilon_k^m}{\partial \epsilon_{ij}} \epsilon_l^k + \epsilon_m^l \epsilon_k^m \frac{\partial \epsilon_l^k}{\partial \epsilon_{ij}} \right) \\
&= \frac{1}{3} \left( (-2\hat{g}^{li} \epsilon_m^j + \delta_{mj} \hat{g}^{li}) \epsilon_k^m \epsilon_l^k + \epsilon_m^l (-2\hat{g}^{mi} \epsilon_k^j + \delta_{kj} \hat{g}^{mi}) \epsilon_l^k + \epsilon_m^l \epsilon_k^m (-2\hat{g}^{ki} \epsilon_l^j + \delta_{lj} \hat{g}^{ki}) \right) \\
&= \frac{1}{3} \left( (-2\epsilon_m^j + \delta_{mj}) \epsilon_k^m \epsilon^{ki} + \epsilon^{li} (-2\epsilon_k^j + \delta_{kj}) \epsilon_l^k + \epsilon_m^l \epsilon^{mi} (-2\epsilon_l^j + \delta_{lj}) \right) \\
&= \frac{1}{3} \left( -2\epsilon_m^j \epsilon_k^m \epsilon^{ki} + \epsilon_k^j \epsilon^{ki} - 2\epsilon^{li} \epsilon_k^j \epsilon_l^k + \epsilon^{li} \epsilon_l^j - 2\epsilon_m^l \epsilon^{mi} \epsilon_l^j + \epsilon_m^j \epsilon^{mi} \right) \\
&= -2\epsilon_m^j \epsilon_k^m \epsilon^{ki} + \epsilon_k^j \epsilon^{ki}
\end{aligned} \tag{33}$$

Sous forme tensorielle :

$$\left( \frac{\partial \bar{III}_\epsilon}{\partial \epsilon} \right)_{..} = \epsilon . \epsilon - 2 \epsilon . \epsilon . \epsilon \tag{34}$$

### 3.4 Variation du jacobien en fonction des déformations

$$\frac{\partial \sqrt{g}}{\partial \epsilon_{ij}} = \sqrt{g_0} \frac{\partial V}{\partial \epsilon_{ij}} \tag{35}$$

On se reportera également aux expressions (203) et (204) qui donnent les formes tensorielles des variations de V et de son inverse.

### 3.5 résumé : variation des composantes de la métrique et de la déformation en fonction de $\epsilon_{ij}$

Ces formules seront en particulier utiles pour la variation du tenseur des contraintes en fonction des composantes deux fois covariantes de la déformation.

— composantes deux fois covariantes de la métrique :

$$\frac{\partial \hat{g}_{kl}}{\partial \epsilon_{ij}} = 2\delta_k^i \delta_l^j = 2\hat{g}_k^i \hat{g}_l^j \tag{36}$$

En utilisant la notation particulier de produit tensoriel pour tenseurs symétriques introduite en Annexe (15) :

$$\left( \frac{\partial \hat{g}_{kl}}{\partial \epsilon} \right)_{..} \hat{g}^k \otimes \hat{g}^l = 2 \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \tag{37}$$

— composantes deux fois contravariantes de la métrique :

$$\frac{\partial \hat{g}^{rm}}{\partial \epsilon_{ij}} = -2\hat{g}^{ri} \hat{g}^{mj} \tag{38}$$

sous forme tensorielle :

$$\left( \frac{\partial \hat{g}^{rm}}{\partial \epsilon} \right) \hat{g}_r \otimes \hat{g}_m = -2 \mathbf{I} \bar{\otimes} \mathbf{I} \quad (39)$$

**Remarque :** On remarque que contrairement au cas d'un tenseur classique, la dérivée du tenseur métrique par rapport aux composantes du tenseur déformation, n'est pas un tenseur (une grandeur unique), chaque variation d'un type de composantes données conduit à un tenseur particulier (au même titre que que la dérivée temporelle de Lie).

— composantes deux fois covariantes de la déformation :

$$\frac{\partial \epsilon_{kl}}{\partial \epsilon_{ij}} = \delta_k^i \delta_l^j = \hat{g}_k^i \hat{g}_l^j \quad (40)$$

ou encore

$$\left( \frac{\partial \epsilon_{kl}}{\partial \epsilon} \right) \hat{g}^k \otimes \hat{g}^l = \mathbf{I} \bar{\otimes} \mathbf{I} \quad (41)$$

— composantes deux fois contravariantes de la déformation : En utilisant la symétrie des tenseur  $\epsilon$  et  $\mathbf{I}$  on obtient :

$$\frac{\partial \epsilon^{kl}}{\partial \epsilon_{ij}} = \hat{g}^{ki} \hat{g}^{lj} - 2 (\hat{g}^{ki} \epsilon^{lj} + \epsilon^{ki} \hat{g}^{lj}) \quad (42)$$

en tenant compte des symétries des tenseurs on a :

$$\left( \frac{\partial \epsilon^{kl}}{\partial \epsilon} \right) \hat{g}_k \otimes \hat{g}_l = \mathbf{I} \bar{\otimes} \mathbf{I} - 2 (\mathbf{I} \bar{\otimes} \epsilon + \epsilon \bar{\otimes} \mathbf{I}) \quad (43)$$

— composantes mixtes de la déformation : Ce calcul a été réalisé en (32) :

$$\frac{\partial \epsilon_m^l}{\partial \epsilon_{ij}} = -2 \hat{g}^{li} \epsilon_m^j + \hat{g}^{li} \delta_m^j \quad (44)$$

d'où en tensoriel :

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial \epsilon_m^l}{\partial \epsilon_{ij}} \right) \hat{g}_l \otimes \hat{g}^m \otimes \hat{g}_i \otimes \hat{g}_j &= (-2 \hat{g}^{li} \epsilon_m^j + \hat{g}^{li} \delta_m^j) \hat{g}_l \otimes \hat{g}^m \otimes \hat{g}_i \otimes \hat{g}_j \\ &= \left( \frac{\partial \epsilon_m^l}{\partial \epsilon} \right) \hat{g}_l \otimes \hat{g}^m = (-2 \hat{g}^{li} \epsilon_m^j \hat{g}^{mr} + \hat{g}^{li} \delta_m^j \hat{g}^{mr}) \hat{g}_l \otimes \hat{g}_r \otimes \hat{g}_i \otimes \hat{g}_j \\ &= (-2 \hat{g}^{li} \epsilon^{rj} + \hat{g}^{li} \hat{g}^{rj}) \hat{g}_l \otimes \hat{g}_r \otimes \hat{g}_i \otimes \hat{g}_j \\ &= -2 \mathbf{I} \bar{\otimes} \epsilon + \mathbf{I} \bar{\otimes} \mathbf{I} \end{aligned} \quad (45)$$

— composantes deux fois contravariantes du produit une fois contracté  $\epsilon \cdot \epsilon$  :

On a

$$\frac{\partial \epsilon_m^k \epsilon^{ml}}{\partial \epsilon_{ij}} = -2 (\hat{g}^{ki} \epsilon^{lm} \epsilon_m^j + \epsilon^{ki} \epsilon^{lj} + \epsilon_m^k \epsilon^{mi} \hat{g}^{lj}) + \hat{g}^{ki} \epsilon^{lj} + \epsilon^{ki} \hat{g}^{lj} \quad (46)$$

Sous forme tensorielle :

$$\left( \frac{\partial \epsilon_m^k \epsilon^{ml}}{\partial \epsilon_{ij}} \right) \hat{g}_k \otimes \hat{g}_l \otimes \hat{g}_i \otimes \hat{g}_j = -2 (\mathbf{I} \bar{\otimes} (\epsilon \cdot \epsilon) + \epsilon \bar{\otimes} \epsilon + (\epsilon \cdot \epsilon) \bar{\otimes} \mathbf{I}) + \mathbf{I} \bar{\otimes} \epsilon + \epsilon \bar{\otimes} \mathbf{I} \quad (47)$$

### 3.6 Expression de la contrainte en fonction des trois moments

On reprend l'expression générale en fonction des invariants.

$$\begin{aligned}
\sigma^{ij} &= \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial(\omega\sqrt{g})}{\partial\epsilon_{ij}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{g}} \left( \frac{\partial(\omega\sqrt{g})}{\partial I_\epsilon} \frac{\partial I_\epsilon}{\partial\epsilon_{ij}} + \frac{\partial(\omega\sqrt{g})}{\partial \bar{I}I_\epsilon} \frac{\partial \bar{I}I_\epsilon}{\partial\epsilon_{ij}} + \frac{\partial(\omega\sqrt{g})}{\partial \bar{I}\bar{I}I_\epsilon} \frac{\partial \bar{I}\bar{I}I_\epsilon}{\partial\epsilon_{ij}} \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{g}} \left( \frac{\partial(\omega\sqrt{g})}{\partial I_\epsilon} (\hat{g}^{ij} - 2\epsilon^{ij}) + \frac{\partial(\omega\sqrt{g})}{\partial \bar{I}I_\epsilon} (-2\epsilon_m^j \epsilon^{mi} + \epsilon^{ij}) + \frac{\partial(\omega\sqrt{g})}{\partial \bar{I}\bar{I}I_\epsilon} (-2\epsilon_m^j \epsilon_k^m \epsilon^{ki} + \epsilon_k^j \epsilon^{ki}) \right) \\
&= \hat{g}^{ij} \left( \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial(\omega\sqrt{g})}{\partial I_\epsilon} \right) + \epsilon^{ij} \frac{1}{\sqrt{g}} \left( \frac{\partial(\omega\sqrt{g})}{\partial \bar{I}I_\epsilon} - 2 \frac{\partial(\omega\sqrt{g})}{\partial \bar{I}_\epsilon} \right) + \\
&\quad \epsilon_m^j \epsilon^{mi} \frac{1}{\sqrt{g}} \left( \frac{\partial(\omega\sqrt{g})}{\partial \bar{I}\bar{I}I_\epsilon} - 2 \frac{\partial(\omega\sqrt{g})}{\partial \bar{I}I_\epsilon} \right) + \epsilon_m^j \epsilon_k^m \epsilon^{ki} \frac{1}{\sqrt{g}} \left( -2 \frac{\partial(\omega\sqrt{g})}{\partial \bar{I}\bar{I}I_\epsilon} \right) \tag{48}
\end{aligned}$$

On observe des termes d'ordre 0 à 4 en  $\epsilon$ , les termes multiplicatifs ne dépendant que des variations du potentiel.

On peut également utiliser la relation de CAYLEY HAMILTON pour exprimer les termes du troisième ordre en fonction des autres ordres et des invariants.

$$\epsilon_m^j \epsilon_k^m \epsilon^{ki} = I_\epsilon \epsilon_m^j \epsilon^{mi} - \left( \frac{I_\epsilon^2}{2} - \bar{I}I_\epsilon \right) \epsilon^{ij} + \left( \bar{I}\bar{I}I_\epsilon - I_\epsilon \bar{I}I_\epsilon + \frac{I_\epsilon^3}{6} \right) \hat{g}^{ij} \tag{49}$$

d'où :

$$\begin{aligned}
\sigma^{ij} &= \hat{g}^{ij} \frac{1}{\sqrt{g}} \left( \frac{\partial(\omega\sqrt{g})}{\partial I_\epsilon} - 2 \frac{\partial(\omega\sqrt{g})}{\partial \bar{I}\bar{I}I_\epsilon} \left( \frac{I_\epsilon^3}{6} - I_\epsilon \bar{I}I_\epsilon + \bar{I}\bar{I}I_\epsilon \right) \right) + \\
&\quad \epsilon^{ij} \frac{1}{\sqrt{g}} \left( -2 \frac{\partial(\omega\sqrt{g})}{\partial I_\epsilon} + \frac{\partial(\omega\sqrt{g})}{\partial \bar{I}I_\epsilon} + \frac{\partial(\omega\sqrt{g})}{\partial \bar{I}\bar{I}I_\epsilon} (I_\epsilon^2 - 2 \bar{I}I_\epsilon) \right) + \\
&\quad \epsilon_m^j \epsilon^{mi} \frac{1}{\sqrt{g}} \left( \frac{\partial(\omega\sqrt{g})}{\partial \bar{I}\bar{I}I_\epsilon} (1 - 2 I_\epsilon) - 2 \frac{\partial(\omega\sqrt{g})}{\partial \bar{I}I_\epsilon} \right) \tag{50}
\end{aligned}$$

Cette dernière formules est identiques à celle donnée par D. Favier (ref?).

### 3.7 Expression de la contrainte pour un potentiel exprimé en fonction de la variation relative de volume, de la trace du tenseur de déformation et du second moment du déviateur des déformations : $V, \bar{I}I_\epsilon, I_\epsilon$

On suppose que le potentiel s'exprime à partir de ces trois invariants. Il nous faut donc modifier les formules obtenues précédemment.

Tout d'abord nous exprimons les nouveaux invariants à partir des moments.

$$\begin{aligned}
I_\epsilon &= \text{inchangé} \\
\bar{I}I_\epsilon &= \bar{I}I_\epsilon - \frac{I_\epsilon^2}{6} \\
\frac{1}{V^2} &= 1 - 2I_\epsilon + 2I_\epsilon^2 - 4\bar{I}I_\epsilon + 8I_\epsilon \bar{I}I_\epsilon - 8\bar{I}\bar{I}I_\epsilon - \frac{4}{3}I_\epsilon^3 \tag{51}
\end{aligned}$$

d'où pour les variations :

$$\begin{aligned}
d(I_\epsilon) &= \text{inchangé} \\
d(\bar{I}\bar{I}_\epsilon) &= d\bar{I}I_\epsilon - \frac{I_\epsilon}{3}dI_\epsilon \\
-\frac{2}{V^3}dV &= (-2 + 4I_\epsilon + 8\bar{I}I_\epsilon - 4I_\epsilon^2)dI_\epsilon + (-4 + 8I_\epsilon)d\bar{I}I_\epsilon - 8d\bar{I}\bar{I}I_\epsilon
\end{aligned} \tag{52}$$

ce qui permet le calcul des dérivées partielles :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial I_\epsilon}{\partial I_\epsilon} &= 1, & \frac{\partial I_\epsilon}{\partial \bar{I}I_\epsilon} &= 0, & \frac{\partial I_\epsilon}{\partial \bar{I}\bar{I}I_\epsilon} &= 0, \\
\frac{\partial \bar{I}\bar{I}_\epsilon}{\partial I_\epsilon} &= -\frac{I_\epsilon}{3}, & \frac{\partial \bar{I}\bar{I}_\epsilon}{\partial \bar{I}I_\epsilon} &= 1, & \frac{\partial \bar{I}\bar{I}_\epsilon}{\partial \bar{I}\bar{I}I_\epsilon} &= 0, \\
\frac{\partial V}{\partial I_\epsilon} &= V^3(1 - 2I_\epsilon + 2I_\epsilon^2 - 4\bar{I}I_\epsilon), & \frac{\partial V}{\partial \bar{I}I_\epsilon} &= V^3(2 - 4I_\epsilon), & \frac{\partial V}{\partial \bar{I}\bar{I}I_\epsilon} &= 4V^3,
\end{aligned} \tag{53}$$

Nous pouvons maintenant calculer la contrainte à partir d'un potentiel dépendant de nos nouveaux invariants (formule 50).

$$\sigma^{ij} = \hat{g}^{ij}a_0 + \epsilon^{ij}a_1 + \epsilon_m^j \epsilon^{mi}a_2 \tag{54}$$

avec :

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\sqrt{g}} \left( b_1 \frac{\partial(\omega\sqrt{g})}{\partial I_\epsilon} + b_2 \frac{\partial(\omega\sqrt{g})}{\partial V} + b_3 \frac{\partial(\omega\sqrt{g})}{\partial \bar{I}\bar{I}_\epsilon} \right) \\
a_1 &= \frac{1}{\sqrt{g}} \left( c_1 \frac{\partial(\omega\sqrt{g})}{\partial I_\epsilon} + c_2 \frac{\partial(\omega\sqrt{g})}{\partial V} + c_3 \frac{\partial(\omega\sqrt{g})}{\partial \bar{I}\bar{I}_\epsilon} \right) \\
a_2 &= \frac{1}{\sqrt{g}} \left( d_1 \frac{\partial(\omega\sqrt{g})}{\partial I_\epsilon} + d_2 \frac{\partial(\omega\sqrt{g})}{\partial V} + d_3 \frac{\partial(\omega\sqrt{g})}{\partial \bar{I}\bar{I}_\epsilon} \right)
\end{aligned} \tag{55}$$

et :

$$\begin{aligned}
b_1 &= 1, & b_2 &= V, & b_3 &= -\frac{I_\epsilon}{3} \\
c_1 &= -2 & c_2 &= 0 & c_3 &= \frac{2I_\epsilon}{3} + 1 \\
d_1 &= 0 & d_2 &= 0 & d_3 &= -2
\end{aligned} \tag{56}$$

Sous forme tensorielle :

$$\sigma = \hat{g} a_0 + \epsilon a_1 + \epsilon.\epsilon a_2 \tag{57}$$

**Remarque :** Le tenseur  $\hat{g}$  n'est autre que le tenseur identité noté également  $\mathbf{I}$

On observe, dans ces formules, différents invariants. On pourrait chercher à n'utiliser que ceux intervenant pour la définition du potentiel. En fait, d'une manière pratique, l'ensemble des invariants est disponible dans le calcul, il n'y a donc pas beaucoup d'intérêts à modifier les formules si-dessus.

## 4 Calcul de la variation de la contrainte

Dans le cas d'une résolution d'un problème d'équilibre mécanique, à l'aide d'un schéma explicite, le calcul de la contrainte est suffisant. Par contre l'utilisation d'un schéma implicite nécessite en général la connaissance de la variation des contraintes par rapport aux degrés de liberté par exemple.

Comme pour le calcul des contraintes, nous allons chercher à obtenir une expression générale qui dégage d'une part des termes généraux, indépendant du potentiel utilisé. Ces termes pourront être calculés de manière littérales. Et d'autre part, des termes propres aux potentiels considérés. Les expressions obtenues permettront de lister les différentes variations du potentiel nécessaires.

### 4.1 Expressions générales : variation par rapport aux degrés de liberté

On suppose une résolution par éléments finis. La variation du tenseur métrique et du tenseur de déformation par rapport aux degrés de libertés est connu, elle dépend du type de discrétisation retenu donc en général du type d'élément finis utilisé. Ces variations ne seront donc pas explicitées dans les développements qui suivent.

En reprenant l'expression générale (cf. 57) on obtient pour la variation :

$$\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial ddl} = \frac{\partial \hat{\mathbf{g}}}{\partial ddl} a_0 + \hat{\mathbf{g}} \frac{\partial a_0}{\partial ddl} + \frac{\partial \boldsymbol{\epsilon}}{\partial ddl} a_1 + \boldsymbol{\epsilon} \frac{\partial a_1}{\partial ddl} + \frac{\partial (\boldsymbol{\epsilon} \cdot \boldsymbol{\epsilon})}{\partial ddl} a_2 + \boldsymbol{\epsilon} \cdot \boldsymbol{\epsilon} \frac{\partial a_2}{\partial ddl} \quad (58)$$

Il nous faut maintenant expliciter le calcul de la variation des termes  $a_i$  (cf.55). Pour ce faire il est nécessaire de connaître d'une part la variation des termes relatifs au potentiel.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2(\omega\sqrt{g})}{\partial I_\epsilon \partial ddl} &= \frac{\partial^2(\omega\sqrt{g})}{\partial^2 I_\epsilon} \frac{\partial I_\epsilon}{\partial ddl} + \frac{\partial^2(\omega\sqrt{g})}{\partial I_\epsilon \partial \bar{I} I_\epsilon} \frac{\partial \bar{I} I_\epsilon}{\partial ddl} + \frac{\partial^2(\omega\sqrt{g})}{\partial I_\epsilon \partial V} \frac{\partial V}{\partial ddl} \\ \frac{\partial^2(\omega\sqrt{g})}{\partial \bar{I} I_\epsilon \partial ddl} &= \frac{\partial^2(\omega\sqrt{g})}{\partial \bar{I} I_\epsilon \partial I_\epsilon} \frac{\partial I_\epsilon}{\partial ddl} + \frac{\partial^2(\omega\sqrt{g})}{\partial^2 \bar{I} I_\epsilon} \frac{\partial \bar{I} I_\epsilon}{\partial ddl} + \frac{\partial^2(\omega\sqrt{g})}{\partial \bar{I} I_\epsilon \partial V} \frac{\partial V}{\partial ddl} \\ \frac{\partial^2(\omega\sqrt{g})}{\partial V \partial ddl} &= \frac{\partial^2(\omega\sqrt{g})}{V \partial I_\epsilon} \frac{\partial I_\epsilon}{\partial ddl} + \frac{\partial^2(\omega\sqrt{g})}{\partial V \partial \bar{I} I_\epsilon} \frac{\partial \bar{I} I_\epsilon}{\partial ddl} + \frac{\partial^2(\omega\sqrt{g})}{\partial^2 V} \frac{\partial V}{\partial ddl} \end{aligned} \quad (59)$$

et d'autre part la variation des termes  $b_i$ . En fait seulement trois de ces termes ont une variations non nulles.

$$\begin{aligned} \frac{\partial b_2}{\partial ddl} &= \frac{\partial V}{\partial ddl} \\ \frac{\partial b_3}{\partial ddl} &= -\frac{1}{3} \frac{\partial I_\epsilon}{\partial ddl} \\ \frac{\partial c_3}{\partial ddl} &= \frac{2}{3} \frac{\partial I_\epsilon}{\partial ddl} \end{aligned} \quad (60)$$

Il reste à déterminer la variation de l'inverse du jacobien, que l'on calcul à partir de celle de  $V$ .

$$\frac{1}{\sqrt{g}} = \frac{\sqrt{g_0}}{V} \quad (61)$$

d'où

$$\frac{\partial \frac{1}{\sqrt{g}}}{\partial ddl} = -\frac{\sqrt{g_0}}{V^2} \frac{\partial V}{\partial ddl} \quad (62)$$

En conclusion, pour le calcul de la variation de la contrainte il faut disposer :  
de toutes les variations secondes du potentiel,  
des variations des divers invariants par rapport aux ddl.

## 4.2 Variation par rapport aux composantes covariantes de la déformations

Ce cas peut-être intéressant pour calculer les éléments d'un comportement tangent.

Comme dans le cas précédent, en reprenant l'expression générale (cf. 57) on obtient pour la variation :

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\epsilon}_{ij}} \right)_{..} &= a_0 \left( \frac{\partial \hat{\boldsymbol{g}}}{\partial \boldsymbol{\epsilon}_{ij}} \right)_{..} + \hat{\boldsymbol{g}} \otimes \left( \frac{\partial a_0}{\partial \boldsymbol{\epsilon}_{ij}} \right)_{..} + a_1 \left( \frac{\partial \boldsymbol{\epsilon}}{\partial \boldsymbol{\epsilon}_{ij}} \right)_{..} + \boldsymbol{\epsilon} \otimes \left( \frac{\partial a_1}{\partial \boldsymbol{\epsilon}_{ij}} \right)_{..} \\ &+ a_2 \left( \frac{\partial (\boldsymbol{\epsilon} \cdot \boldsymbol{\epsilon})}{\partial \boldsymbol{\epsilon}_{ij}} \right)_{..} + \boldsymbol{\epsilon} \cdot \boldsymbol{\epsilon} \otimes \left( \frac{\partial a_2}{\partial \boldsymbol{\epsilon}_{ij}} \right)_{..} \\ &= \mathbf{T} = T^{klij} \hat{g}_k \otimes \hat{g}_l \otimes \hat{g}_i \otimes \hat{g}_j \end{aligned} \quad (63)$$

Dans cette expression, il s'agit de produits tensoriels de tenseurs symétriques, le résultat est un tenseur qui par construction possède les différentes symétries d'un opérateur tangent sauf la symétrie  $T^{klij}$  et  $T^{ijkl}$ .

Pour le calcul de la variation des termes  $a_i$  (cf.55) il est nécessaire de connaître d'une part la variation des termes relatifs au potentiel.

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial^2(\omega\sqrt{g})}{\partial I_\epsilon \partial \boldsymbol{\epsilon}} \right)_{..} &= \frac{\partial^2(\omega\sqrt{g})}{\partial^2 I_\epsilon} \left( \frac{\partial I_\epsilon}{\partial \boldsymbol{\epsilon}} \right)_{..} + \frac{\partial^2(\omega\sqrt{g})}{\partial I_\epsilon \partial \bar{I} I_\epsilon} \left( \frac{\partial \bar{I} I_\epsilon}{\partial \boldsymbol{\epsilon}} \right)_{..} + \frac{\partial^2(\omega\sqrt{g})}{\partial I_\epsilon \partial V} \left( \frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{\epsilon}} \right)_{..} \\ \left( \frac{\partial^2(\omega\sqrt{g})}{\partial \bar{I} I_\epsilon \partial \boldsymbol{\epsilon}} \right)_{..} &= \frac{\partial^2(\omega\sqrt{g})}{\partial \bar{I} I_\epsilon \partial I_\epsilon} \left( \frac{\partial I_\epsilon}{\partial \boldsymbol{\epsilon}} \right)_{..} + \frac{\partial^2(\omega\sqrt{g})}{\partial^2 \bar{I} I_\epsilon} \left( \frac{\partial \bar{I} I_\epsilon}{\partial \boldsymbol{\epsilon}} \right)_{..} + \frac{\partial^2(\omega\sqrt{g})}{\partial \bar{I} I_\epsilon \partial V} \left( \frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{\epsilon}} \right)_{..} \\ \left( \frac{\partial^2(\omega\sqrt{g})}{\partial V \partial \boldsymbol{\epsilon}} \right)_{..} &= \frac{\partial^2(\omega\sqrt{g})}{V \partial I_\epsilon} \left( \frac{\partial I_\epsilon}{\partial \boldsymbol{\epsilon}} \right)_{..} + \frac{\partial^2(\omega\sqrt{g})}{\partial V \partial \bar{I} I_\epsilon} \left( \frac{\partial \bar{I} I_\epsilon}{\partial \boldsymbol{\epsilon}} \right)_{..} + \frac{\partial^2(\omega\sqrt{g})}{\partial^2 V} \left( \frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{\epsilon}} \right)_{..} \end{aligned} \quad (64)$$

et d'autre part la variation des termes  $b_i$ . En fait seulement trois de ces termes ont une variations non nulles.

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial b_2}{\partial \boldsymbol{\epsilon}} \right)_{..} &= \left( \frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{\epsilon}} \right)_{..} \\ \left( \frac{\partial b_3}{\partial \boldsymbol{\epsilon}} \right)_{..} &= -\frac{1}{3} \left( \frac{\partial I_\epsilon}{\partial \boldsymbol{\epsilon}} \right)_{..} \\ \left( \frac{\partial c_3}{\partial \boldsymbol{\epsilon}} \right)_{..} &= \frac{2}{3} \left( \frac{\partial I_\epsilon}{\partial \boldsymbol{\epsilon}} \right)_{..} \end{aligned} \quad (65)$$

En conclusion, pour le calcul de la variation de la contrainte par rapport aux composantes covariantes du tenseur de déformation, il faut disposer :

de toutes les variations secondes du potentiel,

des variations des divers invariants par rapport aux composantes covariantes du tenseur de déformation.

Pour mémoire on rappelle les variations qui ont déjà été calculées :

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial \hat{\mathbf{g}}}{\partial \epsilon_{ij}}\right)_{..} &= \left(\frac{\partial \hat{g}^{rm}}{\partial \epsilon}\right)_{..} \hat{g}_r \otimes \hat{g}_m = -2 \mathbf{I} \bar{\otimes} \mathbf{I} \\
\left(\frac{\partial \epsilon}{\partial \epsilon_{ij}}\right)_{..} &= \left(\frac{\partial \epsilon^{kl}}{\partial \epsilon}\right)_{..} \hat{g}_k \otimes \hat{g}_l = \mathbf{I} \bar{\otimes} \mathbf{I} - 2 (\mathbf{I} \bar{\otimes} \epsilon + \epsilon \bar{\otimes} \mathbf{I}) \\
\left(\frac{\partial (\epsilon \cdot \epsilon)}{\partial \epsilon_{ij}}\right)_{..} &= \left(\frac{\partial \epsilon^k \cdot \epsilon^{ml}}{\partial \epsilon_{ij}}\right)_{..} \hat{g}_k \otimes \hat{g}_l \otimes \hat{g}_i \otimes \hat{g}_j \\
&= -2 (\mathbf{I} \bar{\otimes} (\epsilon \cdot \epsilon) + \epsilon \bar{\otimes} \epsilon + (\epsilon \cdot \epsilon) \bar{\otimes} \mathbf{I}) + \mathbf{I} \bar{\otimes} \epsilon + \epsilon \bar{\otimes} \mathbf{I}
\end{aligned} \tag{66}$$

Quatrième partie

# Potentiel de Treloar

## 5 Exemple du potentiel de TRELOAR avec variation de la déformation volumique

### 5.1 Expression du potentiel original

Initialement le potentiel introduit par TRELOAR ne comporte pas de variation de la déformation volumique. Il s'exprime en fonction des élongations principales, et est repéré par rapport au solide initial.

$$W_T = C (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 3) \quad \text{avec} \quad \lambda_i = \frac{L_i}{L_0} \quad (67)$$

$L_i$  étant une grandeur caractéristique dans la direction  $i$ .

Dans une première étape nous exprimons les élongations en fonction des composantes du tenseur de déformation d'ALMANSI calculées dans la base principale orthonormée.

$$\epsilon_I = \frac{1}{2} \left( \frac{(L_I^2 - L_0^2)}{L_I^2} \right) = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{\lambda_I^2} \right) \quad (68)$$

d'où

$$\lambda_I^2 = \frac{1}{1 - 2\epsilon_I} \quad (69)$$

que l'on introduit dans l'expression du potentiel :

$$\begin{aligned} W_T &= C \left( \frac{1}{1 - 2\epsilon_1} + \frac{1}{1 - 2\epsilon_2} + \frac{1}{1 - 2\epsilon_3} - 3 \right) \\ &= C \left( \frac{3 - 4(\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3) + 4(\epsilon_1\epsilon_2 + \epsilon_2\epsilon_3 + \epsilon_1\epsilon_3)}{1 - 2(\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3) + 4(\epsilon_1\epsilon_2 + \epsilon_2\epsilon_3 + \epsilon_1\epsilon_3) - 8\epsilon_1\epsilon_2\epsilon_3} - 3 \right) \end{aligned} \quad (70)$$

Si l'on utilise les invariants principaux de CAYLEY HAMILTON :

$$\begin{aligned} I_\epsilon &= \epsilon_i^i = \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 = \bar{I}_\epsilon \\ II_\epsilon &= \frac{1}{2} (\epsilon_i^i \epsilon_j^j - \epsilon_l^k \epsilon_k^l) = \epsilon_1\epsilon_2 + \epsilon_2\epsilon_3 + \epsilon_1\epsilon_3 = \frac{I_\epsilon^2}{2} - \bar{II}_\epsilon \\ III_\epsilon &= \det(\epsilon) = \epsilon_1\epsilon_2\epsilon_3 = \bar{III}_\epsilon - \bar{I}_\epsilon \bar{II}_\epsilon + \frac{I_\epsilon^3}{6} \end{aligned} \quad (71)$$

Avec ces invariants le potentiel s'écrit :

$$\begin{aligned} W_T &= C \left( \frac{3 - 4I_\epsilon + 4II_\epsilon}{1 - 2I_\epsilon + 4II_\epsilon - 8III_\epsilon} - 3 \right) \\ &= C \left( \frac{3 - 4I_\epsilon + 2I_\epsilon^2 - 4\bar{II}_\epsilon}{1 - 2I_\epsilon + 2I_\epsilon^2 - 4\bar{II}_\epsilon + 8I_\epsilon \bar{II}_\epsilon - 8III_\epsilon - \frac{4}{3}I_\epsilon^3} - 3 \right) \end{aligned} \quad (72)$$

On remarque que le dénominateur est l'inverse de la variation volumique relative  $V$ . De plus on introduit le deuxième invariant du déviateur.

$$\begin{aligned} W_T &= C (V^2(3 - 4I_\epsilon + 2I_\epsilon^2 - 4\bar{II}_\epsilon) - 3) \\ &= C \left( V^2(3 - 4I_\epsilon + \frac{4}{3}I_\epsilon^2 - 4\bar{II}_\epsilon) - 3 \right) \end{aligned} \quad (73)$$

Dans notre cas on se réfère à la configuration finale.

$$\omega = C \frac{1}{V} \left( V^2(3 - 4I_\epsilon + \frac{4}{3}I_\epsilon^2 - 4\bar{I}\bar{I}_\epsilon) - 3 \right) \quad (74)$$

Dans cette expressions figures le jeux d'invariants recherché :  $I_\epsilon$  ,  $V$  et  $\bar{I}\bar{I}_\epsilon$ .

Dans les calculs relatifs à la recherche des contraintes l'expression utilisée sera plutôt :

$$\sqrt{g}\omega = V\sqrt{g_0}\omega = \sqrt{g_0}C \left( V^2(3 - 4I_\epsilon + \frac{4}{3}I_\epsilon^2 - 4\bar{I}\bar{I}_\epsilon) - 3 \right) \quad (75)$$

Ce qui en constitue la forme finale

## 5.2 Prise en compte de la variation relative de volume dans le potentiel de TRELOAR

On propose de décomposer le potentiel en deux parties, une première partie relative aux déformations ne dépendant pas de la variation relative de volume et une seconde partie dédiée à cette variation volumique. La forme de potentielle relative à cette seconde partie est classique (cf denis). La première partie est obtenue par une modification du potentiel initial de TRELOAR.

!!! vérifier que la partie volumique soit multipliée par V!!!!!!

$$\begin{aligned} \sqrt{g}\omega &= \sqrt{g_0} \left( C \left( V^2(3 - 4I_\epsilon + \frac{4}{3}I_\epsilon^2 - 4\bar{I}\bar{I}_\epsilon) \frac{1}{V^{2/3}} - 3 \right) + \frac{V K}{2} \ln^2(V) \right) \\ &= \sqrt{g_0} \left( C \left( V^{4/3}(3 - 4I_\epsilon + \frac{4}{3}I_\epsilon^2 - 4\bar{I}\bar{I}_\epsilon) - 3 \right) + \frac{V K}{2} \ln^2(V) \right) \end{aligned} \quad (76)$$

On vérifie que lorsque le volume de matière reste inchangé, le potentiel est identique au potentiel de TRELOAR original.

## 5.3 Nouveau potentiel : prise en compte d'un durcissement lors des fortes élongations

Dans le cas de fortes élongations, on observe expérimentalement un durcissement de la réponse du matériau. Une interprétation physique de ce phénomène est l'approche pour les chaînes moléculaires, de la limite maximale d'extension, constituée en théorie par une ligne droite. Dans la pratique, l'enchevêtrement des chaînes, diminue la limite théorique d'extension. Enfin les fortes élongation peuvent également entraîner une cristallisation de la matière qui a aussi pour conséquence de raidir de comportement.

Alors que les moyennes élongations sont assez bien modélisées par exemple par les formulations statistiques, le cas des fortes élongations est assez mal cerné. Dans notre cas nous proposons une approche phénoménologique simple s'appuyant sur le modèle de TRELOAR modifié par la prise en compte de la variation relative de volume.

Pour simplifier l'écriture finale on introduit une grandeur  $A$  intermédiaire.

$$A = V^{4/3}(3 - 4I_\epsilon + \frac{4}{3}I_\epsilon^2 - 4\bar{I}\bar{I}_\epsilon) - 3 \quad (77)$$

Lorsqu'il y a peu de variation de volume, ce qui un cas courant pour les élastomères,  $A$  tend vers de grandes valeurs pour les fortes elongations. Dans cette situation, l'évolution du potentiel est linéaire en  $A$ . L'idée est de modifier cette évolution pour la rendre exponentielle.

$$\sqrt{g}\omega = \sqrt{g_0} \left( CA + A \left( \frac{A}{a} \right)^{2r} + \frac{V K}{2} \ln^2(V) \right) \quad (78)$$

Dans le cas où  $A$  est plus petit que  $a$ , si l'on adopte un coefficient  $r$  relativement important, le terme  $A \left( \frac{A}{a} \right)^{2r}$  doit être négligeable par rapport à la partie linéaire. Par contre on doit observer l'évolution inverse, dans le cas où  $A$  est supérieur à  $a$ , la partie exponentielle devenant prédominante. Le facteur  $a$  joue le rôle de valeur de coupure, et le paramètre  $r$  permet de faire varier la courbure de l'évolution.

#### 5.4 Calcul des variations premières et secondes du potentiel de TRELOAR avec variation relative de volume

A partir du potentiel décrit par la relation (76), on obtient pour les dérivées premières :

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\omega\sqrt{g})}{\partial I_\epsilon} &= \sqrt{g_0}CV^{4/3}(-4 + \frac{8}{3}I_\epsilon) \\ \frac{\partial(\omega\sqrt{g})}{\partial \bar{I}\bar{I}_\epsilon} &= -4\sqrt{g_0}CV^{4/3} \\ \frac{\partial(\omega\sqrt{g})}{\partial V} &= \frac{4(\sqrt{g_0}CV^{1/3})}{3} + \frac{K}{2}\ln^2(V) + K\ln(V) \end{aligned} \quad (79)$$

et pour les dérivées secondes :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2(\omega\sqrt{g})}{\partial^2 I_\epsilon} &= \frac{8\sqrt{g_0}CV^{4/3}I_\epsilon}{3} \\ \frac{\partial^2(\omega\sqrt{g})}{\partial I_\epsilon \partial \bar{I}\bar{I}_\epsilon} &= 0 \\ \frac{\partial^2(\omega\sqrt{g})}{\partial I_\epsilon \partial V} &= \frac{4\sqrt{g_0}CV^{1/3}(-4 + \frac{8}{3}I_\epsilon)}{3} \\ \frac{\partial^2(\omega\sqrt{g})}{\partial^2 \bar{I}\bar{I}_\epsilon} &= 0 \\ \frac{\partial^2(\omega\sqrt{g})}{\partial \bar{I}\bar{I}_\epsilon \partial V} &= \frac{-16\sqrt{g_0}CV^{1/3}}{3} \\ \frac{\partial^2(\omega\sqrt{g})}{\partial^2 V} &= \frac{4\sqrt{g_0}CV^{-2/3}}{9} + \frac{K}{V}(\ln(V) + 1) \end{aligned} \quad (80)$$

On remarque, que toutes ces expressions, y compris celle du potentiel, peuvent être évaluées, quelque soit la valeur numérique des invariants utilisés, sauf  $V=0$ . qui représente un cas non physique.

## 5.5 Calcul des variations premières et secondes du nouveau potentiel

Les dérivées premières sont calculées à partir des expressions (77) et (78).

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\omega\sqrt{g})}{\partial I_\epsilon} &= \frac{\partial(\omega\sqrt{g})}{\partial A} \frac{\partial A}{\partial I_\epsilon} = 4\sqrt{g_0} \left( C + (2r+1) \left( \frac{A}{a} \right)^{2r} \right) V^{4/3} \left( -1 + \frac{2}{3} I_\epsilon \right) \\ \frac{\partial(\omega\sqrt{g})}{\partial \bar{I}_\epsilon} &= \frac{\partial(\omega\sqrt{g})}{\partial A} \frac{\partial A}{\partial \bar{I}_\epsilon} = -4\sqrt{g_0} \left( C + (2r+1) \left( \frac{A}{a} \right)^{2r} \right) V^{4/3} \\ \frac{\partial(\omega\sqrt{g})}{\partial V} &= \frac{\partial(\omega\sqrt{g})}{\partial A} \frac{\partial A}{\partial V} + \sqrt{g_0} \left( \frac{K}{2} \ln^2(V) + K \ln(V) \right) \\ &= \frac{4}{3} \sqrt{g_0} \left( C + (2r+1) \left( \frac{A}{a} \right)^{2r} \right) V^{1/3} \left( (3 - 4I_\epsilon + \frac{4}{3} I_\epsilon^2 - 4\bar{I}_\epsilon) - 3 \right) + \sqrt{g_0} \left( \frac{K}{2} \ln^2(V) + K \ln(V) \right) \end{aligned}$$

et pour les dérivées secondes toujours en utilisant la dérivée intermédiaire par rapport à A :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2(\omega\sqrt{g})}{\partial^2 I_\epsilon} &= \frac{\partial}{\partial A} \left( \frac{\partial(\omega\sqrt{g})}{\partial I_\epsilon} \right) \frac{\partial A}{\partial I_\epsilon} = 16\sqrt{g_0}(2r+1)2r \left( \frac{A}{a} \right)^{2r-1} V^{8/3} \left( -1 + \frac{2}{3}I_\epsilon \right)^2 \\
\frac{\partial^2(\omega\sqrt{g})}{\partial I_\epsilon \partial \bar{I}_\epsilon} &= \frac{\partial}{\partial A} \left( \frac{\partial(\omega\sqrt{g})}{\partial I_\epsilon} \right) \frac{\partial A}{\partial \bar{I}_\epsilon} = -16\sqrt{g_0}(2r+1)2r \left( \frac{A}{a} \right)^{2r-1} V^{8/3} \left( -1 + \frac{2}{3}I_\epsilon \right) \\
\frac{\partial^2(\omega\sqrt{g})}{\partial I_\epsilon \partial V} &= \frac{\partial}{\partial A} \left( \frac{\partial(\omega\sqrt{g})}{\partial I_\epsilon} \right) \frac{\partial A}{\partial V} + \frac{16}{3}\sqrt{g_0} \left( C + (2r+1) \left( \frac{A}{a} \right)^{2r} \right) V^{1/3} \left( -1 + \frac{2}{3}I_\epsilon \right) \\
&= \frac{16}{3}\sqrt{g_0} \left( -1 + \frac{2}{3}I_\epsilon \right) \left( (2r+1)2r \left( \frac{A}{a} \right)^{2r-1} V^{5/3} (3 - 4I_\epsilon + \frac{4}{3}I_\epsilon^2 - 4\bar{I}_\epsilon) + \left( C + (2r+1) \left( \frac{A}{a} \right)^{2r} \right) \right) \\
\frac{\partial^2(\omega\sqrt{g})}{\partial^2 \bar{I}_\epsilon} &= \frac{\partial}{\partial A} \left( \frac{\partial(\omega\sqrt{g})}{\partial \bar{I}_\epsilon} \right) \frac{\partial A}{\partial \bar{I}_\epsilon} = 16\sqrt{g_0}(2r+1)2r \left( \frac{A}{a} \right)^{2r-1} V^{8/3} \\
\frac{\partial^2(\omega\sqrt{g})}{\partial \bar{I}_\epsilon \partial V} &= \frac{\partial}{\partial A} \left( \frac{\partial(\omega\sqrt{g})}{\partial \bar{I}_\epsilon} \right) \frac{\partial A}{\partial V} - \frac{16}{3}\sqrt{g_0} \left( C + (2r+1) \left( \frac{A}{a} \right)^{2r} \right) V^{1/3} \\
&= -\frac{16}{3}\sqrt{g_0}(2r+1)2r \left( \frac{A}{a} \right)^{2r-1} V^{5/3} (3 - 4I_\epsilon + \frac{4}{3}I_\epsilon^2 - 4\bar{I}_\epsilon) - \frac{16}{3}\sqrt{g_0} \left( C + (2r+1) \left( \frac{A}{a} \right)^{2r} \right) \\
\frac{\partial^2(\omega\sqrt{g})}{\partial^2 V} &= \frac{\partial}{\partial A} \left( \frac{\partial(\omega\sqrt{g})}{\partial V} \right) \frac{\partial A}{\partial V} + \frac{4}{9}\sqrt{g_0} \left( C + (2r+1) \left( \frac{A}{a} \right)^{2r} \right) V^{-2/3} \left( (3 - 4I_\epsilon + \frac{4}{3}I_\epsilon^2 - 4\bar{I}_\epsilon) - 3 \right) + \\
&\quad \sqrt{g_0} \left( \frac{K}{V} \ln(V) + \frac{K}{V} \right) \\
&= \frac{4}{3}\sqrt{g_0}(2r+1)2r \left( \frac{A}{a} \right)^{2r-1} V^{1/3} \left( (3 - 4I_\epsilon + \frac{4}{3}I_\epsilon^2 - 4\bar{I}_\epsilon) - 3 \right) + \\
&\quad \frac{4}{9}\sqrt{g_0} \left( C + (2r+1) \left( \frac{A}{a} \right)^{2r} \right) V^{-2/3} \left( (3 - 4I_\epsilon + \frac{4}{3}I_\epsilon^2 - 4\bar{I}_\epsilon) - 3 \right) + \sqrt{g_0} \left( \frac{K}{V} \ln(V) + \frac{K}{V} \right)
\end{aligned}$$

Cinquième partie

# Présentation actuelle des potentiels AMF

## 6 Exemples de potentiels dédiés aux alliages à mémoire de forme (AMF)

Pour modéliser les comportements superélastique et ferroélastique des AMF, Denis Favier, Pierre-Yves Manach, puis Laurent Orgéas ont proposé des formes de potentiel particulières. Ces potentiels sont tous exprimés selon :

$$\omega = \omega(V, Q_\epsilon, \varphi_\epsilon) \quad (83)$$

Comme le montre la relation précédente, les potentiels  $\omega$  sont fonctions d'un jeu de trois invariants différents des invariants de base : la variation volumique relative  $V$ , l'intensité du tenseur déviateur des déformation  $Q_\epsilon$ , et la phase du tenseur des déformation  $\varphi_\epsilon$ . Ces deux derniers invariants sont définis par les relations :

$$\begin{aligned} Q_\epsilon &= (2\bar{I}\bar{I}_\epsilon)^{1/2} \\ \cos(3\varphi_\epsilon) &= 3\sqrt{6}\frac{\bar{I}\bar{I}\bar{I}_\epsilon}{Q_\epsilon^3} = 3\sqrt{6}\frac{\bar{I}\bar{I}\bar{I}_\epsilon}{(2\bar{I}\bar{I}_\epsilon)^{3/2}} \end{aligned} \quad (84)$$

**Remarque :** Initialement les potentiels proposés s'appuyaient sur la mesure d'ALMANSI. De nouveaux développements sont introduits dans ce document pour prendre en compte également le cas de la mesure d'HENCKY qui permet alors un découpage additif du potentiel entre variation de volume et variation de forme quelque soit l'intensité de la déformation, ce qui n'est pas le cas avec la mesure d'ALMANSI.

Dans le cas de la mesure d'ALMANSI nous avons la relation :

$$\bar{I}\bar{I}\bar{I}_\epsilon = -\frac{1}{8V^2} + \frac{1-2I_\epsilon}{8} - \frac{\bar{I}\bar{I}_\epsilon}{2} + \frac{I_\epsilon\bar{I}\bar{I}_\epsilon}{3} + \frac{I_\epsilon^2}{6} - \frac{1}{27}I_\epsilon^3 \quad (85)$$

Pour mémoire, quelque soit la mesure de déformation :

$$\begin{aligned} \bar{I}\bar{I}_\epsilon &= \frac{1}{2}\bar{e}_j^i\bar{e}_i^j \\ \bar{I}\bar{I}\bar{I}_\epsilon &= \frac{1}{3}\bar{e}_j^i\bar{e}_k^j\bar{e}_i^k \\ V &= \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{g_0}} \end{aligned} \quad (86)$$

Ainsi deux types d'invariants intermédiaires sont utilisés.

- Soit le potentiel est calculé à partir des invariants de la mesure de déformation d'ALMANSI (cas historique). Les invariants intermédiaires retenues sont :  $V, \bar{I}_\epsilon, \bar{I}\bar{I}_\epsilon$
- Soit le potentiel est calculé à partir des invariants de la mesure logarithmique  $\mathbf{e}$  = mesure de HENCKY. Les invariants intermédiaires retenues sont alors :  $I_\epsilon, \bar{I}\bar{I}_\epsilon, \bar{I}\bar{I}\bar{I}_\epsilon$

## 6.1 Calcul des variations premières du potentiel, expressions générale

### 6.1.1 Cas de la mesure d'ALMANSI

L'idée est d'utilisée le jeux de variables intermédiaires :

En partant de :  $I_\epsilon, \partial\bar{I}_\epsilon, V$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial Q_\epsilon}{\partial \bar{I}_\epsilon} &= \frac{1}{(2\bar{I}_\epsilon)^{1/2}} \\
\frac{\partial \cos(3\varphi_\epsilon)}{\partial V} &= \frac{3\sqrt{6}}{4(2\bar{I}_\epsilon)^{3/2} V^3} \\
\frac{\partial \cos(3\varphi_\epsilon)}{\partial I_\epsilon} &= \frac{3\sqrt{6}}{(2\bar{I}_\epsilon)^{3/2}} \left( -\frac{1}{4} + \frac{\bar{I}_\epsilon}{3} + \frac{1}{3}I_\epsilon - \frac{1}{9}I_\epsilon^2 \right) \\
\frac{\partial \cos(3\varphi_\epsilon)}{\partial \bar{I}_\epsilon} &= -\frac{9\sqrt{6}}{(2\bar{I}_\epsilon)^{5/2}} \bar{I}_\epsilon I_\epsilon + \frac{3\sqrt{6}}{(2\bar{I}_\epsilon)^{3/2}} \left( \frac{I_\epsilon}{3} - \frac{1}{2} \right)
\end{aligned} \tag{87}$$

Il vient ensuite :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial (\omega\sqrt{g})}{\partial V} &= \sqrt{g_0} \left( V \left( \frac{\partial \omega}{\partial V} + \frac{\partial \omega}{\partial \cos(3\varphi_\epsilon)} \frac{\partial \cos(3\varphi_\epsilon)}{\partial V} \right) + \omega \right) \\
\frac{\partial (\omega\sqrt{g})}{\partial I_\epsilon} &= \sqrt{g_0} V \left( \frac{\partial \omega}{\partial \cos(3\varphi_\epsilon)} \frac{\partial \cos(3\varphi_\epsilon)}{\partial I_\epsilon} \right) \\
\frac{\partial (\omega\sqrt{g})}{\partial \bar{I}_\epsilon} &= \sqrt{g_0} V \left( \frac{\partial \omega}{\partial Q_\epsilon} \frac{\partial Q_\epsilon}{\partial \bar{I}_\epsilon} + \frac{\partial \omega}{\partial \cos(3\varphi_\epsilon)} \frac{\partial \cos(3\varphi_\epsilon)}{\partial \bar{I}_\epsilon} \right)
\end{aligned} \tag{88}$$

### 6.1.2 Cas de la mesure de HENCKY

L'idée est d'utilisée le jeux de variables intermédiaires :  $I_e, \bar{I}_e, \bar{I}\bar{I}_e$

Dans les expressions qui suivent on ne reporte que les termes non nuls.

$V$  ne dépend que de la trace selon  $\ln(V) = I_e$  :

$$\frac{\partial V}{\partial I_e} = \frac{\partial \exp(I_e)}{\partial I_e} = \exp(I_e) = V \tag{89}$$

$Q_e$  ne dépend que de  $\bar{I}_e$  ce qui conduit à une expression identique au cas de la mesure d'ALMANSI :

$$\frac{\partial Q_e}{\partial \bar{I}_e} = \frac{1}{(2\bar{I}_e)^{1/2}} \tag{90}$$

$\cos(3\varphi_e) = 3\sqrt{6} \frac{\bar{I}\bar{I}_e}{(2\bar{I}_e)^{3/2}}$  dépend des deux invariants  $\bar{I}_e$  et  $\bar{I}\bar{I}_e$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \cos(3\varphi_e)}{\partial \bar{I}I_{\bar{e}}} &= -\frac{9\sqrt{6}}{(2\bar{I}I_{\bar{e}})^{5/2}} \bar{I}I_{\bar{e}} \\
\frac{\partial \cos(3\varphi_e)}{\partial \bar{I}\bar{I}_{\bar{e}}} &= \frac{3\sqrt{6}}{(2\bar{I}I_{\bar{e}})^{3/2}}
\end{aligned} \tag{91}$$

Il vient ensuite :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial (\omega\sqrt{g})}{\partial I_e} &= \sqrt{g_0} \left( V^2 \left( \frac{\partial \omega}{\partial V} \right) + V \omega \right) \\
\frac{\partial (\omega\sqrt{g})}{\partial \bar{I}I_{\bar{e}}} &= \sqrt{g_0} V \left( \frac{\partial \omega}{\partial Q_e} \frac{\partial Q_e}{\partial \bar{I}I_{\bar{e}}} + \frac{\partial \omega}{\partial \cos(3\varphi_e)} \frac{\partial \cos(3\varphi_e)}{\partial \bar{I}I_{\bar{e}}} \right) \\
\frac{\partial (\omega\sqrt{g})}{\partial \bar{I}\bar{I}_{\bar{e}}} &= \sqrt{g_0} V \left( \frac{\partial \omega}{\partial \cos(3\varphi_e)} \frac{\partial \cos(3\varphi_e)}{\partial \bar{I}\bar{I}_{\bar{e}}} \right)
\end{aligned} \tag{92}$$

## 6.2 Calcul des variations secondes du potentiel, expressions générale

### 6.2.1 Cas de la mesure d'ALMANSI

En partant des résultats du paragraphe précédent, et d'une manière similaire on a :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 Q_e}{\partial \bar{I}I_{\bar{e}}^2} &= -\frac{1}{(2\bar{I}I_{\bar{e}})^{3/2}} \\
\frac{\partial^2 \cos(3\varphi_e)}{\partial V^2} &= -\frac{9\sqrt{6}}{4(2\bar{I}I_{\bar{e}})^{3/2} V^4} \\
\frac{\partial^2 \cos(3\varphi_e)}{\partial I_e^2} &= \frac{3\sqrt{6}}{(2\bar{I}I_{\bar{e}})^{3/2}} \left( \frac{1}{3} - \frac{2}{9} I_e \right) \\
\frac{\partial^2 \cos(3\varphi_e)}{\partial \bar{I}I_{\bar{e}}^2} &= \frac{45\sqrt{6}}{(2\bar{I}I_{\bar{e}})^{7/2}} \bar{I}I_{\bar{e}} - \frac{18\sqrt{6}}{(2\bar{I}I_{\bar{e}})^{5/2}} \left( \frac{I_e}{3} - \frac{1}{2} \right) \\
\frac{\partial^2 \cos(3\varphi_e)}{\partial V \partial \bar{I}I_{\bar{e}}} &= -\frac{9\sqrt{6}}{4(2\bar{I}I_{\bar{e}})^{5/2} V^3} \\
\frac{\partial^2 \cos(3\varphi_e)}{\partial I_e \partial \bar{I}I_{\bar{e}}} &= \frac{\sqrt{6}}{(2\bar{I}I_{\bar{e}})^{3/2}} - \frac{9\sqrt{6}}{(2\bar{I}I_{\bar{e}})^{5/2}} \left( \frac{-1}{4} + \frac{\bar{I}I_{\bar{e}}}{3} + \frac{1}{3} I_e - \frac{1}{9} I_e^2 \right)
\end{aligned} \tag{93}$$

Il vient ensuite d'une manière générale :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 (\omega\sqrt{g})}{\partial V^2} &= \sqrt{g_0} \left[ 2 \left( \frac{\partial \omega}{\partial \cos(3\varphi_\epsilon)} + V \frac{\partial^2 \omega}{\partial V \partial \cos(3\varphi_\epsilon)} \right) \frac{\partial \cos(3\varphi_\epsilon)}{\partial V} \right. \\
&\quad + 2 \frac{\partial \omega}{\partial V} + V \frac{\partial^2 \omega}{\partial V^2} + V \frac{\partial^2 \omega}{\partial \cos^2(3\varphi_\epsilon)} \left( \frac{\partial \cos(3\varphi_\epsilon)}{\partial V} \right)^2 \\
&\quad \left. + V \frac{\partial \omega}{\partial \cos(3\varphi_\epsilon)} \frac{\partial^2 \cos(3\varphi_\epsilon)}{\partial V^2} \right] \\
\frac{\partial^2 (\omega\sqrt{g})}{\partial I_\epsilon^2} &= \sqrt{g_0} V \left[ \frac{\partial^2 \omega}{\partial \cos^2(3\varphi_\epsilon)} \left( \frac{\partial \cos(3\varphi_\epsilon)}{\partial I_\epsilon} \right)^2 + \frac{\partial \omega}{\partial \cos(3\varphi_\epsilon)} \frac{\partial^2 \cos(3\varphi_\epsilon)}{\partial I_\epsilon^2} \right] \\
\frac{\partial^2 (\omega\sqrt{g})}{\partial \bar{I}_\epsilon^2} &= \sqrt{g_0} V \left[ \frac{\partial^2 \omega}{\partial Q_\epsilon^2} \left( \frac{\partial Q_\epsilon}{\partial \bar{I}_\epsilon} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 \omega}{\partial \cos(3\varphi_\epsilon) \partial Q_\epsilon} \frac{\partial Q_\epsilon}{\partial \bar{I}_\epsilon} \frac{\partial \cos(3\varphi_\epsilon)}{\partial \bar{I}_\epsilon} \right. \\
&\quad + \frac{\partial^2 \omega}{\partial \cos^2(3\varphi_\epsilon)} \left( \frac{\partial \cos(3\varphi_\epsilon)}{\partial \bar{I}_\epsilon} \right)^2 \\
&\quad \left. + \frac{\partial \omega}{\partial Q_\epsilon} \frac{\partial^2 Q_\epsilon}{\partial \bar{I}_\epsilon^2} + \frac{\partial \omega}{\partial \cos(3\varphi_\epsilon)} \frac{\partial^2 \cos(3\varphi_\epsilon)}{\partial \bar{I}_\epsilon^2} \right] \tag{94}
\end{aligned}$$

et aussi :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 (\omega\sqrt{g})}{\partial V \partial I_\epsilon} &= \sqrt{g_0} \left[ \left( \frac{\partial \omega}{\partial \cos(3\varphi_\epsilon)} + V \frac{\partial^2 \omega}{\partial V \partial \cos(3\varphi_\epsilon)} \right) \frac{\partial \cos(3\varphi_\epsilon)}{\partial I_\epsilon} \right. \\
&\quad \left. + V \frac{\partial^2 \omega}{\partial \cos^2(3\varphi_\epsilon)} \frac{\partial \cos(3\varphi_\epsilon)}{\partial V} \frac{\partial \cos(3\varphi_\epsilon)}{\partial I_\epsilon} \right] \\
\frac{\partial^2 (\omega\sqrt{g})}{\partial V \partial \bar{I}_\epsilon} &= \sqrt{g_0} \left[ \left( \frac{\partial \omega}{\partial Q_\epsilon} + V \frac{\partial^2 \omega}{\partial V \partial Q_\epsilon} \right) \frac{\partial Q_\epsilon}{\partial \bar{I}_\epsilon} \right. \\
&\quad + \left( \frac{\partial \omega}{\partial \cos(3\varphi_\epsilon)} + V \frac{\partial^2 \omega}{\partial V \partial \cos(3\varphi_\epsilon)} \right) \frac{\partial \cos(3\varphi_\epsilon)}{\partial \bar{I}_\epsilon} \\
&\quad + V \frac{\partial^2 \omega}{\partial \cos(3\varphi_\epsilon) \partial Q_\epsilon} \frac{\partial \cos(3\varphi_\epsilon)}{\partial V} \frac{\partial Q_\epsilon}{\partial \bar{I}_\epsilon} \\
&\quad \left. + V \frac{\partial^2 \omega}{\partial \cos^2(3\varphi_\epsilon)} \frac{\partial \cos(3\varphi_\epsilon)}{\partial V} \frac{\partial \cos(3\varphi_\epsilon)}{\partial \bar{I}_\epsilon} + V \frac{\partial \omega}{\partial \cos(3\varphi_\epsilon)} \frac{\partial^2 \cos(3\varphi_\epsilon)}{\partial V \partial \bar{I}_\epsilon} \right] \\
\frac{\partial^2 (\omega\sqrt{g})}{\partial I_\epsilon \partial \bar{I}_\epsilon} &= \sqrt{g_0} V \left[ \frac{\partial^2 \omega}{\partial \cos(3\varphi_\epsilon) \partial Q_\epsilon} \frac{\partial \cos(3\varphi_\epsilon)}{\partial I_\epsilon} \frac{\partial Q_\epsilon}{\partial \bar{I}_\epsilon} \right. \\
&\quad \left. + \frac{\partial^2 \omega}{\partial \cos^2(3\varphi_\epsilon)} \frac{\partial \cos(3\varphi_\epsilon)}{\partial I_\epsilon} \frac{\partial \cos(3\varphi_\epsilon)}{\partial \bar{I}_\epsilon} + \frac{\partial \omega}{\partial \cos(3\varphi_\epsilon)} \frac{\partial^2 \cos(3\varphi_\epsilon)}{\partial I_\epsilon \partial \bar{I}_\epsilon} \right] \tag{95}
\end{aligned}$$

### 6.2.2 Cas de la mesure de HENCKY

On ne reporte que les termes non nuls.

$$\frac{\partial^2 V}{\partial I_e^2} = \frac{\partial \exp(I_e)}{\partial I_e} = \exp(I_e) = V \tag{96}$$

$Q_e$  ne dépend que de  $\bar{I}\bar{I}_{\bar{e}}$  ce qui conduit à une expression identique au cas de la mesure d'ALMANSI :

$$\frac{\partial^2 Q_e}{\partial \bar{I}\bar{I}_{\bar{e}}^2} = -\frac{1}{(2\bar{I}\bar{I}_{\bar{e}})^{3/2}} \quad (97)$$

$\cos(3\varphi_e)$  dépend des deux invariants  $\bar{I}\bar{I}_{\bar{e}}$  et  $I\bar{I}\bar{I}_{\bar{e}}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \cos(3\varphi_e)}{\partial \bar{I}\bar{I}_{\bar{e}}^2} &= \frac{45 \sqrt{6}}{(2\bar{I}\bar{I}_{\bar{e}})^{7/2}} I\bar{I}\bar{I}_{\bar{e}} \\ \frac{\partial^2 \cos(3\varphi_e)}{\partial \bar{I}\bar{I}_{\bar{e}} \partial I\bar{I}\bar{I}_{\bar{e}}} &= -\frac{9\sqrt{6}}{(2\bar{I}\bar{I}_{\bar{e}})^{5/2}} \end{aligned} \quad (98)$$

Il vient ensuite d'une manière générale :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 (\omega\sqrt{g})}{\partial I_e^2} &= \sqrt{g_0} V \left[ \omega + 3 V \frac{\partial \omega}{\partial V} + V^2 \frac{\partial^2 \omega}{\partial V^2} \right] \\ \frac{\partial^2 (\omega\sqrt{g})}{\partial \bar{I}\bar{I}_{\bar{e}}^2} &= \sqrt{g_0} V \left[ \frac{\partial^2 \omega}{\partial Q_e^2} \left( \frac{\partial Q_e}{\partial \bar{I}\bar{I}_{\bar{e}}} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 \omega}{\partial \cos(3\varphi_e) \partial Q_e} \frac{\partial Q_e}{\partial \bar{I}\bar{I}_{\bar{e}}} \frac{\partial \cos(3\varphi_e)}{\partial \bar{I}\bar{I}_{\bar{e}}} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial^2 \omega}{\partial \cos^2(3\varphi_e)} \left( \frac{\partial \cos(3\varphi_e)}{\partial \bar{I}\bar{I}_{\bar{e}}} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial \omega}{\partial Q_e} \frac{\partial^2 Q_e}{\partial \bar{I}\bar{I}_{\bar{e}}^2} + \frac{\partial \omega}{\partial \cos(3\varphi_e)} \frac{\partial^2 \cos(3\varphi_e)}{\partial \bar{I}\bar{I}_{\bar{e}}^2} \right] \\ \frac{\partial^2 (\omega\sqrt{g})}{\partial I\bar{I}\bar{I}_{\bar{e}}^2} &= \sqrt{g_0} V \left[ \frac{\partial^2 \omega}{\partial \cos^2(3\varphi_e)} \left( \frac{\partial \cos(3\varphi_e)}{\partial I\bar{I}\bar{I}_{\bar{e}}} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (99)$$

et aussi :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 (\omega\sqrt{g})}{\partial I_e \partial \bar{I}\bar{I}_{\bar{e}}} &= \sqrt{g_0} V \left[ \left( \frac{\partial \omega}{\partial \cos(3\varphi_e)} + V \frac{\partial^2 \omega}{\partial V \partial \cos(3\varphi_e)} \right) \frac{\partial \cos(3\varphi_e)}{\partial \bar{I}\bar{I}_{\bar{e}}} \right. \\ &\quad \left. + \left( V \frac{\partial^2 \omega}{\partial V \partial Q_e} + \frac{\partial \omega}{\partial Q_e} \right) \frac{\partial Q_e}{\partial \bar{I}\bar{I}_{\bar{e}}} \right] \\ \frac{\partial^2 (\omega\sqrt{g})}{\partial I_e \partial I\bar{I}\bar{I}_{\bar{e}}} &= \sqrt{g_0} V \left[ \left( \frac{\partial \omega}{\partial \cos(3\varphi_e)} + V \frac{\partial^2 \omega}{\partial V \partial \cos(3\varphi_e)} \right) \frac{\partial \cos(3\varphi_e)}{\partial I\bar{I}\bar{I}_{\bar{e}}} \right] \\ \frac{\partial^2 (\omega\sqrt{g})}{\partial \bar{I}\bar{I}_{\bar{e}} \partial I\bar{I}\bar{I}_{\bar{e}}} &= \sqrt{g_0} V \left[ \frac{\partial^2 \omega}{\partial \cos(3\varphi_e) \partial Q_e} \frac{\partial \cos(3\varphi_e)}{\partial I\bar{I}\bar{I}_{\bar{e}}} \frac{\partial Q_e}{\partial \bar{I}\bar{I}_{\bar{e}}} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial^2 \omega}{\partial \cos^2(3\varphi_e)} \frac{\partial \cos(3\varphi_e)}{\partial \bar{I}\bar{I}_{\bar{e}}} \frac{\partial \cos(3\varphi_e)}{\partial I\bar{I}\bar{I}_{\bar{e}}} + \frac{\partial \omega}{\partial \cos(3\varphi_e)} \frac{\partial^2 \cos(3\varphi_e)}{\partial I\bar{I}\bar{I}_{\bar{e}} \partial \bar{I}\bar{I}_{\bar{e}}} \right] \quad (100) \end{aligned}$$

### 6.3 Cas particuliers pour l'implantation numérique

La suite s'appuie sur la mesure HENCKY, mais les conclusions sont assez générales.

Lorsque  $\bar{II}_{\bar{e}}$  tends vers 0, cela signifie que le tenseur tends vers une forme sphérique. D'un point de vue numérique il y a un risque d'erreur numérique, notamment lors des divisions et calcul de puissance non entière et négative. Ce paragraphe est donc relatif à la compréhension des phénomènes et à une proposition de traitement.

Soit la formule de calcul du  $\cos(3\varphi_e)$  qui montre une singularité potentielle. Pour mieux étudier ce cas on considère le déviateur de déformation suivant exprimée dans son repère principal :

$$[\bar{e}] = \begin{bmatrix} \delta_1 + \delta_2 & 0 & 0 \\ 0 & -\delta_1 & 0 \\ 0 & 0 & -\delta_2 \end{bmatrix} \quad (101)$$

Ce cas représente ainsi tous les cas possibles. Lorsque les  $\delta_i$  tendent vers 0, on tend vers un tenseur sphérique. De plus on exprime  $\delta_2$  en fonction de  $\delta_1$  avec la relation :  $\delta_2 = \alpha\delta_1$  On a :

$$\bar{II}_{\bar{e}} = \delta_1^2 + \delta_1 \times \delta_2 + \delta_2^2 = \delta_1^2 (1 + \alpha + \alpha^2) \quad (102)$$

et

$$III_{\bar{e}} = \delta_1^2 \times \delta_2 + \delta_2^2 \times \delta_1 = \delta_1^3 \times \alpha(1 + \alpha) \quad (103)$$

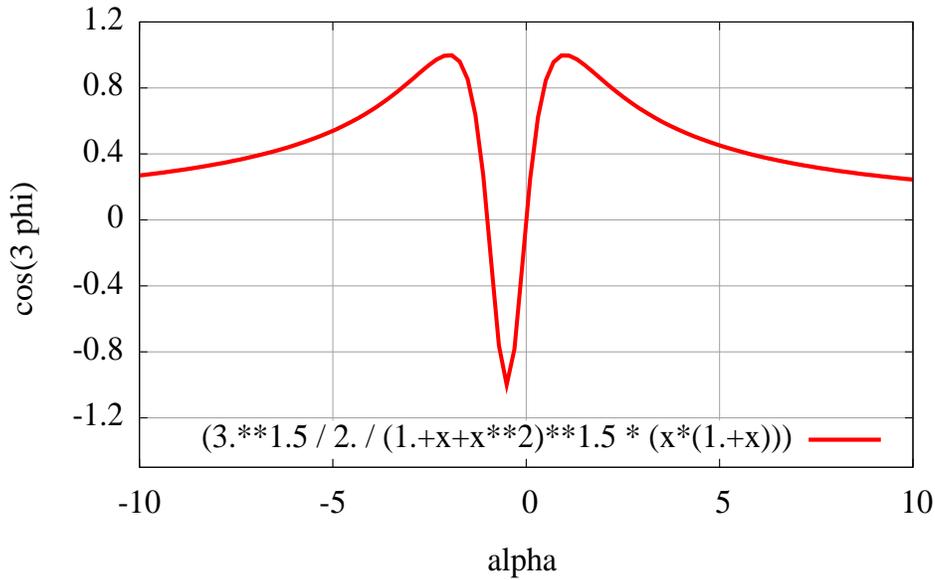


FIGURE 1 – Evolution de  $\cos(3\varphi_e)$  en fonction de  $\alpha$

D'où :

$$\cos(3\varphi_e) = \frac{3^{3/2}}{2} \frac{\alpha(1 + \alpha)}{(1 + \alpha + \alpha^2)^{3/2}} \quad (104)$$

On observe que la valeur de la fonction est indépendante de  $\delta_1$ , elle ne dépend que du rapport  $\alpha$ . La figure 1 donne son évolution en fonction de  $\alpha$  : la valeur reste bien bornée entre 1 et -1.

Lorsque les valeurs propres sont très petites, elles risquent d'intégrer une erreur de calcul importante ce qui peut conduire à des résultats faussés. De plus on observe dans les dérivées successives précédentes des termes de type  $(2 \bar{I}_e)^b$  avec  $b = -3/2, -5/2, -7/2$ .

Une première solution est de définir un seuil en dessous duquel, de manière arbitraire on considère que le tenseur est sphérique. Ceci correspond à la première implantation avec la mesure de déformation d'Almansi. Cette méthode pose plusieurs problèmes : quel niveau de seuil, pb de discontinuité dans les fonctions, pb de suppression de la raideur de cisaillement lorsque le tenseur est sphérique ...

Pour ces raisons, on imagine une autre solution qui consiste à régulariser les fonctions sous la forme de :  $1 / ((2 \bar{I}_e + \delta)^3 / 2)$ ,  $\delta$  étant un nombre arbitraire petit, qui peut être ajusté en fonction du nombre de chiffre significatif possible. Compte tenu d fait que  $d((2 \bar{I}_e + \delta)^3 / 2) = d(2 \bar{I}_e)^3 / 2$ , il est possible de répercuter simplement cette modification sur toutes les formules vues précédemment.

Dans le cas de  $\cos(3\varphi_e)$ , lorsque  $\bar{I}_e$  devient très petit, comme la fonction  $(1 + \alpha + \alpha^2)$  est toujours positive et possède un seul minimum pour  $\alpha = -0.5$  à savoir  $(1 - 0.5 + 0.25) = 0.75$ , cela signifie qu'obligatoirement  $\delta_1$  tend vers 0, d'où  $\bar{I}_e$  tend également vers 0.

Dans le cas de la régulation proposée,  $\cos(3\varphi_e)$  tendra systématiquement vers 0, quelque soit  $\alpha$ , donc vers un état similaire à de la traction, sachant que l'amplitude du déviateur de déformation tend vers 0.

Les fonctions proposées dans ce travail pour tenir compte de l'angle de Lode n'interviennent que sur le calcul de la partie déviatorique des contraintes. Lorsque l'intensité du déviateur des déformations tendra vers 0, la partie déviatorique des contraintes tend vers 0, et le fait que  $\cos(3\varphi_e)$  tends systématiquement vers 0 ne doit pas constituer un problème sur la précision du calcul de la contrainte. Par contre la sensibilité des contraintes aux déformations déviatoriques sera calculée pour une direction ( $\varphi = 0$ ) et une intensité ( $Q_e = \sqrt{\delta}$ ) limite toujours identiques. Cette sensibilité intervient pour le calcul de la raideur. Le point important est qu'elle soit non nulle et cohérente avec le comportement modélisé, ce qui sera le cas si  $\delta$  est suffisamment petit au regard des variations locales de la fonction potentielle.

L'ensemble des formules à problèmes potentiels, sous formes modifiées est alors :

$$\begin{aligned}
\cos(3\varphi_e) &= 3\sqrt{6} \frac{I\bar{I}\bar{e}}{((2\bar{I}\bar{e} + \delta)^{3/2})} \\
\frac{\partial Q_e}{\partial I\bar{I}\bar{e}} &= \frac{1}{(2\bar{I}\bar{e} + \delta)^{1/2}} \\
\frac{\partial \cos(3\varphi_e)}{\partial I\bar{I}\bar{e}} &= -\frac{9\sqrt{6}}{(2\bar{I}\bar{e} + \delta)^{5/2}} I\bar{I}\bar{e} \\
\frac{\partial \cos(3\varphi_e)}{\partial I\bar{I}\bar{e}^2} &= \frac{3\sqrt{6}}{(2\bar{I}\bar{e} + \delta)^{3/2}} \\
\frac{\partial^2 Q_e}{\partial I\bar{I}\bar{e}^2} &= -\frac{1}{(2\bar{I}\bar{e} + \delta)^{3/2}} \\
\frac{\partial^2 \cos(3\varphi_e)}{\partial I\bar{I}\bar{e}^2} &= \frac{45\sqrt{6}}{(2\bar{I}\bar{e} + \delta)^{7/2}} I\bar{I}\bar{e} \\
\frac{\partial^2 \cos(3\varphi_e)}{\partial I\bar{I}\bar{e} \partial I\bar{I}\bar{e}^2} &= -\frac{9\sqrt{6}}{(2\bar{I}\bar{e} + \delta)^{5/2}}
\end{aligned} \tag{105}$$

## 6.4 Potentiels dépendant de $V$ uniquement

### 6.4.1 Exemple : potentiel $\omega_1$

Ce potentiel a été suggéré dans la thèse de Denis Favier :

$$\omega_1 = \frac{K_{rev}}{6} \ln^2(V) \tag{106}$$

Le seul paramètre de la loi est  $K_{rev}$ . Les seules dérivées premières et secondes non nulles de  $\omega_1$  sont :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \omega_1}{\partial V} &= \frac{K_{rev}}{3} \frac{\ln V}{V} \\
\frac{\partial^2 \omega_1}{\partial V^2} &= \frac{K_{rev}}{3} \frac{(1 - \ln V)}{V^2}
\end{aligned} \tag{107}$$

En utilisant la formule (18) il est intéressant de déterminer le module de compressibilité pour de faibles variations de volume. On note  $V \approx (1 + 3e)$  avec  $e = \varepsilon_1^1 = \varepsilon_2^2 = \varepsilon_3^3$  en considérant que la cinématique conduit à une déformation uniquement sphérique :

$$\begin{aligned}
-p &= \left( V \frac{\partial w}{\partial V} + w \right) = \frac{K_{rev} \ln(V)}{3} \left( V \frac{\ln(V)}{2} + 1 \right) \\
&\approx K_{rev} e = \frac{K_{rev}}{3} \mathbf{I}_\varepsilon
\end{aligned} \tag{108}$$

Rappelons que dans le cas d'une loi de Hooke en petite transformation nous avons :

$$-p = \frac{E}{3(1 - 2\nu)} \mathbf{I}_\varepsilon \tag{109}$$

Ainsi par exemple à l'origine des déformations,  $K_{rev}$  joue le rôle de  $\frac{E}{(1-2\nu)}$ .

D'une manière générale, le module de compressibilité sécant par rapport à la variation relative de volume  $\log(V)$

$$K_s = \frac{K_{rev}}{3} \left( \frac{\ln(V)}{2} + 1 \right) \quad (110)$$

#### 6.4.2 Exemple : potentiel $\omega_2$

Ce potentiel a été également suggéré dans la thèse de Denis Favier :

$$\omega_2 = \frac{K_{rev}}{3} (\ln(V) - 1) \quad (111)$$

Le seul paramètre de la loi est encore  $K_{rev}$ . Les seules dérivées premières et secondes non nulles de  $\omega_2$  sont :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega_2}{\partial V} &= \frac{K_{rev}}{3} \frac{1}{V} \\ \frac{\partial^2 \omega_2}{\partial V^2} &= -\frac{K_{rev}}{3} \frac{1}{V^2} \end{aligned} \quad (112)$$

### 6.5 Potentiels dépendant de $V$ et de $Q_\epsilon$

#### 6.5.1 Exemple : potentiel $\omega_3$

Ce potentiel a initialement été proposé par Denis Favier pour modéliser le comportement superélastique et ferroélastique des AMF. Il a également été utilisé dans la thèse de Pierre-Yves Manach dans le cas d'AMF NiTi. Son expression originale :

$$\omega_3 = \frac{K_{rev}}{6} \ln^2(V) + \frac{Q_{\sigma_{rev}}^2}{2\mu_{1rev}} \ln \left( \cosh \left( \frac{2\mu_{1rev} Q_\epsilon}{Q_{\sigma_{rev}}} \right) \right) + \mu_{2rev} Q_\epsilon^2 \quad (113)$$

Les paramètres de la loi sont :  $K_{rev}$ ,  $Q_{\sigma_{rev}}$ ,  $\mu_{1rev}$ ,  $\mu_{2rev}$ .

**Remarque** Pour la signification du module de compressibilité, on se reportera au premier potentiel (6.4.1).

Les dérivées premières non nulles de  $\omega_3$  sont :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega_3}{\partial V} &= \frac{\partial \omega_1}{\partial V} \\ \frac{\partial \omega_3}{\partial Q_\epsilon} &= Q_{\sigma_{rev}} \tanh \left( \frac{2\mu_{1rev} Q_\epsilon}{Q_{\sigma_{rev}}} \right) + 2\mu_{2rev} Q_\epsilon \end{aligned} \quad (114)$$

Les dérivées secondes non nulles de  $\omega_3$  s'écrivent quant à elles sous la forme :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \omega_3}{\partial V^2} &= \frac{\partial^2 \omega_1}{\partial V^2} \\ \frac{\partial^2 \omega_3}{\partial Q_\epsilon^2} &= 2\mu_{1rev} \left( 1 - \tanh^2 \left( \frac{2\mu_{1rev} Q_\epsilon}{Q_{\sigma_{rev}}} \right) \right) + 2\mu_{2rev} \end{aligned} \quad (115)$$

### 6.5.2 Exemple : potentiel $\omega_4$

Ce potentiel a été proposé par Laurent Orgéas sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}
\omega_4 = & \frac{K_{rev}}{6} \ln^2(V) + Q_{\sigma_{rev}} Q_\epsilon + \mu_{2rev} Q_\epsilon^2 \\
& + \frac{\mu_{1rev}}{2} \left[ Q_\epsilon (Q_\epsilon + 2Q_{\epsilon c}) - (Q_\epsilon + Q_{\epsilon c}) (\alpha_{1rev}^2 + (Q_\epsilon + Q_{\epsilon c})^2)^{1/2} + Q_{\epsilon c} (\alpha_{1rev}^2 + Q_{\epsilon c}^2)^{1/2} \right. \\
& \left. - \alpha_{1rev}^2 \left( \ln \left( Q_\epsilon + Q_{\epsilon c} + (\alpha_{1rev}^2 + (Q_\epsilon + Q_{\epsilon c})^2)^{1/2} \right) - \ln \left( Q_{\epsilon c} + (\alpha_{1rev}^2 + Q_{\epsilon c}^2)^{1/2} \right) \right) \right] \\
& + \frac{\mu_{3rev}}{2} \left[ Q_\epsilon \left( Q_\epsilon - 2 (Q_{\epsilon_{rev}}^2 + \alpha_{3rev}^2)^{1/2} \right) \right. \\
& + \alpha_{3rev}^2 \left( \ln \left( Q_\epsilon - Q_{\epsilon_{rev}} + (\alpha_{3rev}^2 + (Q_\epsilon - Q_{\epsilon_{rev}})^2)^{1/2} \right) - \ln \left( -Q_{\epsilon_{rev}} + (\alpha_{3rev}^2 + Q_{\epsilon_{rev}}^2)^{1/2} \right) \right) \\
& \left. + (Q_\epsilon - Q_{\epsilon_{rev}}) (\alpha_{3rev}^2 + (Q_\epsilon - Q_{\epsilon_{rev}})^2)^{1/2} + Q_{\epsilon_{rev}} (\alpha_{3rev}^2 + Q_{\epsilon_{rev}}^2)^{1/2} \right] \quad (116)
\end{aligned}$$

avec :

$$Q_{\epsilon c} = \frac{(\mu_{1rev} \alpha_{1rev})^2 - Q_{\sigma_{rev}}^2}{2\mu_{1rev} Q_{\sigma_{rev}}} \quad (117)$$

Les paramètres de la loi sont :  $K_{rev}$ ,  $Q_{\sigma_{rev}}$ ,  $\mu_{1rev}$ ,  $\mu_{2rev}$ ,  $\mu_{3rev}$ ,  $\alpha_{1rev}$ ,  $\alpha_{3rev}$  et  $Q_{\epsilon_{rev}}$ .

L'écriture du potentiel se simplifie en retenant les variables intermédiaires suivantes :

$$\begin{aligned}
S_1 &= (\alpha_{1rev}^2 + Q_{\epsilon c}^2)^{1/2} \\
S_2 &= (\alpha_{1rev}^2 + (Q_\epsilon + Q_{\epsilon c})^2)^{1/2} \\
S_3 &= (\alpha_{3rev}^2 + (Q_\epsilon - Q_{\epsilon_{rev}})^2)^{1/2} \\
S_4 &= (\alpha_{3rev}^2 + Q_{\epsilon_{rev}}^2)^{1/2} \quad (118)
\end{aligned}$$

ce qui conduit à :

$$\begin{aligned}
\omega_4 = & \frac{K_{rev}}{6} \ln^2(V) + Q_{\sigma_{rev}} Q_\epsilon + \mu_{2rev} Q_\epsilon^2 \\
& + \frac{\mu_{1rev}}{2} \left[ Q_\epsilon^2 + 2Q_\epsilon \cdot Q_{\epsilon c} - (Q_\epsilon + Q_{\epsilon c}) \cdot S_2 + Q_{\epsilon c} \cdot S_1 \right. \\
& \left. - \alpha_{1rev}^2 \{ \ln(Q_\epsilon + Q_{\epsilon c} + S_2) - \ln(Q_{\epsilon c} + S_1) \} \right] \\
& + \frac{\mu_{3rev}}{2} \left[ Q_\epsilon (Q_\epsilon - 2 \cdot S_4) \right. \\
& + \alpha_{3rev}^2 \{ \ln(Q_\epsilon - Q_{\epsilon_{rev}} + S_3) - \ln(-Q_{\epsilon_{rev}} + S_4) \} \\
& \left. + (Q_\epsilon - Q_{\epsilon_{rev}}) \cdot S_3 + Q_{\epsilon_{rev}} \cdot S_4 \right] \quad (119)
\end{aligned}$$

**Remarque** Pour la signification du module de compressibilité, on se reportera au premier potentiel (6.4.1).

Avant le calcul des dérivées du potentiel, on définit celles des grandeurs intermédiaires. Tout d'abord les dérivées premières.

$$\begin{aligned}\frac{\partial S_2}{\partial Q_\epsilon} &= \frac{(Q_\epsilon + Q_{ec})}{S_2} \\ \frac{\partial S_3}{\partial Q_\epsilon} &= \frac{(Q_\epsilon - Q_e)}{S_3}\end{aligned}\quad (120)$$

Puis les dérivées secondes.

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 S_2}{\partial Q_\epsilon^2} &= \frac{1}{S_2} - \frac{(Q_\epsilon + Q_{ec})^2}{S_2^3} \\ \frac{\partial^2 S_3}{\partial Q_\epsilon^2} &= \frac{1}{S_3} - \frac{(Q_\epsilon - Q_e)^2}{S_3^3}\end{aligned}\quad (121)$$

Les dérivées premières non nulles de  $\omega$  se calculent à partir des grandeurs précédentes.

$$\begin{aligned}\frac{\partial \omega_4}{\partial V} &= \frac{K}{3} \frac{\text{Log}(V)}{V} \\ \frac{\partial \omega_4}{\partial Q_\epsilon} &= Q_{\sigma_{rev}} + 2\mu_{2rev}Q_\epsilon \\ &+ 0.5 \mu_{1rev} \left\{ (Q_\epsilon + Q_{ec}) \left( 2 - \frac{\partial S_2}{\partial Q_\epsilon} \right) - S_2 \right. \\ &\quad \left. - \alpha_{1rev}^2 \left( \left( 1 + \frac{\partial S_2}{\partial Q_\epsilon} \right) / (Q_\epsilon + Q_e + S_2) \right) \right\} \\ &+ 0.5 \mu_{3rev} \left\{ 2 (Q_\epsilon - S_4) + S_3 + (Q_\epsilon - Q_e) \frac{\partial S_3}{\partial Q_\epsilon} \right. \\ &\quad \left. + \alpha_{3rev}^2 \left( \left( 1 + \frac{\partial S_3}{\partial Q_\epsilon} \right) / (Q_\epsilon - Q_e + S_3) \right) \right\}\end{aligned}\quad (122)$$

Les dérivées secondes non nulles s'écrivent quant à elles sous la forme :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \omega_4}{\partial V^2} &= \frac{K}{3} \frac{(1. - \text{Log}(V))}{V^2} \\
\frac{\partial^2 \omega_4}{\partial Q_\epsilon^2} &= 2\mu_{2rev} \\
&+ 0.5 \mu_{1rev} \left\{ 2 \left( 1. - \frac{\partial^2 S_2}{\partial Q_\epsilon^2} \right) - (Q_\epsilon + Q_{ec}) \frac{\partial^2 S_2}{\partial Q_\epsilon^2} \right. \\
&\quad \left. - \alpha_{1rev}^2 \left( \frac{\partial^2 S_2}{\partial Q_\epsilon^2} / (Q_\epsilon + Q_e + S_2) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \left( \left( 1 + \frac{\partial S_2}{\partial Q_\epsilon} \right) / (Q_\epsilon + Q_e + S_2) \right)^2 \right) \right\} \\
&+ 0.5 \mu_{3rev} \left\{ 2 + \frac{\partial S_3}{\partial Q_\epsilon} + (Q_\epsilon - Q_e) \frac{\partial^2 S_3}{\partial Q_\epsilon^2} \right. \\
&\quad \left. + \alpha_{3rev}^2 \left( \frac{\partial^2 S_3}{\partial Q_\epsilon^2} / (Q_\epsilon - Q_e + S_3) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \left( \left( 1 + \frac{\partial S_3}{\partial Q_\epsilon} \right) / (Q_\epsilon - Q_e + S_3) \right)^2 \right) \right\} \quad (123)
\end{aligned}$$

## 6.6 Potentiels dépendant de $V$ , $Q_\epsilon$ et $\varphi_\epsilon$

D'une manière générale, pour chaque paramètre matériau  $\chi_i$  ( $\chi_i$  pouvant par exemple être  $Q_{\sigma_{rev}}$  dans le cas du potentiel  $\omega_3$  et  $\omega_4$ ), Denis Favier suggère d'envisager une dépendance qui sous la forme :

$$\chi_i = \frac{\chi_{0i}}{(1 + \gamma_{\chi_i} \cos(3\varphi_\epsilon))^{n_{\chi_i}}} \quad (124)$$

Cette nouvelle forme induit de nouveaux paramètres, *i.e.*  $\chi_{0i}$ ,  $\gamma_{\chi_i}$  et  $n_{\chi_i}$ .

### 6.6.1 Calcul des variations premières et secondes des paramètres $\chi_i$

Au vu de l'expression précédente, les dérivées non nulles de  $\chi_i$  sont :

$$\frac{\partial \chi_i}{\partial \cos(3\varphi_\epsilon)} = \frac{-n_{\chi_i} \chi_{0i} \gamma_{\chi_i}}{(1 + \gamma_{\chi_i} \cos(3\varphi_\epsilon))^{n_{\chi_i} + 1}} \quad (125)$$

et :

$$\frac{\partial^2 \chi_i}{\partial (\cos(3\varphi_\epsilon))^2} = \frac{n_{\chi_i} (n_{\chi_i} + 1) \chi_{0i} \gamma_{\chi_i}^2}{(1 + \gamma_{\chi_i} \cos(3\varphi_\epsilon))^{n_{\chi_i} + 2}} \quad (126)$$

### 6.6.2 Exemple : potentiel $\omega_5$

Ce potentiel correspond à une modification du potentiel  $\omega_3$ . Ainsi,  $\omega_5$  est obtenu en faisant varier les paramètres  $Q_{\sigma_{rev}}$  et  $\mu_{2rev}$  de  $\omega_3$  avec la la phase  $\varphi_\epsilon$  :

$$\begin{aligned} Q_{\sigma_{rev}} &= \frac{Q_{\sigma_{0rev}}}{(1 + \gamma_{Q_{\sigma_{rev}}} \cos(3\varphi_\epsilon))^{n_{Q_{\sigma_{rev}}}}} \\ \mu_{2rev} &= \frac{\mu_{02rev}}{(1 + \gamma_{\mu_{2rev}} \cos(3\varphi_\epsilon))^{n_{\mu_{2rev}}}} \end{aligned} \quad (127)$$

En ce faisant, on est capable de modéliser en particulier la dissymétrie traction-compression observée lors de la déformation superélastique des AMF. Pour calculer les dérivées de  $\omega_5$ , on forme d'abord :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega_5}{\partial Q_{\sigma_{rev}}} &= \frac{Q_{\sigma_{rev}}}{\mu_{1rev}} \ln \left( \cosh \left( \frac{2\mu_{1rev} Q_\epsilon}{Q_{\sigma_{rev}}} \right) \right) - Q_\epsilon \tanh \left( \frac{2\mu_{1rev} Q_\epsilon}{Q_{\sigma_{rev}}} \right) \\ \frac{\partial \omega_5}{\partial \mu_{2rev}} &= Q_\epsilon^2 \end{aligned} \quad (128)$$

Puis :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \omega_5}{\partial Q_{\sigma_{rev}}^2} &= \frac{1}{\mu_{1rev}} \ln \left( \cosh \left( \frac{2\mu_{1rev} Q_\epsilon}{Q_{\sigma_{rev}}} \right) \right) - \frac{2Q_\epsilon}{Q_{\sigma_{rev}}} \tanh \left( \frac{2\mu_{1rev} Q_\epsilon}{Q_{\sigma_{rev}}} \right) \\ &\quad + \frac{2\mu_{1rev} Q_\epsilon^2}{Q_{\sigma_{rev}}^2} \left( 1 - \tanh^2 \left( \frac{2\mu_{1rev} Q_\epsilon}{Q_{\sigma_{rev}}} \right) \right) \\ \frac{\partial^2 \omega_5}{\partial Q_{\sigma_{rev}} \partial Q_\epsilon} &= 2Q_\epsilon \tanh \left( \frac{2\mu_{1rev} Q_\epsilon}{Q_{\sigma_{rev}}} \right) - \frac{2\mu_{1rev} Q_\epsilon}{Q_{\sigma_{rev}}} \left( 1 - \tanh \left( \frac{2\mu_{1rev} Q_\epsilon}{Q_{\sigma_{rev}}} \right) \right) \\ \frac{\partial^2 \omega_5}{\partial \mu_{2rev} \partial Q_\epsilon} &= 2Q_\epsilon \end{aligned} \quad (129)$$

Ainsi, les dérivées premières non nulles de  $\omega_5$  sont alors :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega_5}{\partial V} &= \frac{\partial \omega_1}{\partial V} \\ \frac{\partial \omega_5}{\partial Q_\epsilon} &= \frac{\partial \omega_3}{\partial Q_\epsilon} \\ \frac{\partial \omega_5}{\partial \cos(3\varphi_\epsilon)} &= \frac{\partial \omega_5}{\partial \mu_{2rev}} \frac{\partial \mu_{2rev}}{\partial \cos(3\varphi_\epsilon)} + \frac{\partial \omega_5}{\partial Q_{\sigma_{rev}}} \frac{\partial Q_{\sigma_{rev}}}{\partial \cos(3\varphi_\epsilon)} \end{aligned} \quad (130)$$

Les dérivées secondes non nulles de  $\omega_3$  s'écrivent quant à elles sous la forme :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \omega_5}{\partial V^2} &= \frac{\partial^2 \omega_1}{\partial V^2} \\ \frac{\partial^2 \omega_5}{\partial Q_\epsilon^2} &= \frac{\partial^2 \omega_3}{\partial Q_\epsilon^2} \\ \frac{\partial^2 \omega_5}{\partial \cos^2(3\varphi_\epsilon)} &= \frac{\partial^2 \omega_5}{\partial Q_{\sigma_{rev}}^2} \left( \frac{\partial Q_{\sigma_{rev}}}{\partial \cos(3\varphi_\epsilon)} \right)^2 + \frac{\partial \omega_5}{\partial \mu_{2rev}} \frac{\partial^2 \mu_{2rev}}{\partial \cos^2(3\varphi_\epsilon)} + \frac{\partial \omega_5}{\partial Q_{\sigma_{rev}}} \frac{\partial^2 Q_{\sigma_{rev}}}{\partial \cos^2(3\varphi_\epsilon)} \\ \frac{\partial^2 \omega_5}{\partial Q_\epsilon \partial \cos(3\varphi_\epsilon)} &= \frac{\partial^2 \omega_5}{\partial Q_{\sigma_{rev}} \partial Q_\epsilon} \frac{\partial Q_{\sigma_{rev}}}{\partial \cos(3\varphi_\epsilon)} + \frac{\partial^2 \omega_5}{\partial \mu_{2rev} \partial Q_\epsilon} \frac{\partial \mu_{2rev}}{\partial \cos(3\varphi_\epsilon)} \end{aligned} \quad (131)$$

les dérivées premières et secondes de  $Q_{\sigma rev}$  et de  $\mu_{2rev}$  par rapport à  $\cos(3\varphi_\epsilon)$  étant calculées selon des expressions similaires à (125) et (126).

### 6.6.3 Exemple : potentiel $\omega_6$

On s'intéresse ici uniquement aux termes supplémentaires introduits par la dépendance à la phase. Pour les autres termes on se reportera au paragraphe (6.5.2).

Ce potentiel correspond à une modification du potentiel  $\omega_4$ . Ainsi,  $\omega_6$  est obtenu en faisant varier les paramètres  $Q_{\sigma rev}$ ,  $Q_{\epsilon rev}$ ,  $\mu_{2rev}$  et  $\mu_{3rev}$  de  $\omega_4$  avec la phase  $\varphi_\epsilon$  :

$$\begin{aligned} Q_{\sigma rev} &= \frac{Q_{\sigma 0 rev}}{(1 + \gamma_{Q_{\sigma rev}} \cos(3\varphi_\epsilon))^{n_{Q_{\sigma rev}}}} \\ Q_{\epsilon rev} &= \frac{Q_{\epsilon 0 rev}}{(1 + \gamma_{Q_{\epsilon rev}} \cos(3\varphi_\epsilon))^{n_{Q_{\epsilon rev}}}} \\ \mu_{2rev} &= \frac{\mu_{02rev}}{(1 + \gamma_{\mu_{2rev}} \cos(3\varphi_\epsilon))^{n_{\mu_{2rev}}}} \\ \mu_{3rev} &= \frac{\mu_{03rev}}{(1 + \gamma_{\mu_{3rev}} \cos(3\varphi_\epsilon))^{n_{\mu_{3rev}}}} \end{aligned} \quad (132)$$

De manière à simplifier la présentation et les calculs on retient les notations suivantes :

$$\begin{aligned} E &= \omega_6 \\ \mu_2 &= \mu_{2rev} \\ \mu_3 &= \mu_{3rev} \\ Q_s &= Q_{\sigma rev} \\ Q_e &= Q_{\epsilon rev} \end{aligned} \quad (133)$$

et les variables intermédiaires :

$$\begin{aligned} Q_{ec}(Q_s) &= \frac{((\mu_1 \alpha_1)^2 - Q_s^2)}{2 \mu_1 Q_s} \\ S_1(Q_s) &= (\alpha_1^2 + Q_{ec}^2)^{0.5} \\ S_2(Q_s, Q_e) &= (\alpha_1^2 + (Q_e + Q_{ec})^2)^{0.5} \\ S_3(Q_e, Q_e) &= (\alpha_3^2 + (Q_e - Q_e)^2)^{0.5} \\ S_4(Q_e) &= (\alpha_3^2 + Q_e^2)^{0.5} \end{aligned} \quad (134)$$

Notons que  $Q_s$  et  $Q_e$  dépendent de la phase.

Avec ces nouvelles notations, le potentiel se simplifie.

$$\begin{aligned} E &= \frac{K}{6} \text{Log}^2(V) + Q_s Q_e + \mu_2 Q_e^2 \\ &+ \frac{\mu_1}{2} [Q_e^2 + 2 Q_e Q_{ec} - (Q_e + Q_{ec}) \cdot S_2 + Q_{ec} S_1 \\ &\quad - \alpha_1^2 \{ \text{Log}(|Q_e + Q_{ec} + S_2|) - \text{Log}(|Q_{ec} + S_1|) \}] \\ &+ \frac{\mu_3}{2} [Q_e^2 - 2 Q_e \cdot S_4 + (Q_e - Q_e) S_3 + Q_e S_4 \\ &\quad + \alpha_3^2 \{ \text{Log}(|Q_e - Q_e + S_3|) - \text{Log}(|-Q_e + S_4|) \}] \end{aligned} \quad (135)$$

Avant le calcul des dérivées du potentiel, on définit celles des grandeurs intermédiaires. Tout d'abord les dérivées premières.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial Q_{ec}}{\partial Q_s} &= -\frac{(Q_s^2 + (\mu_1 \alpha_1)^2)}{2 \mu_1 Q_s^2} \\
\frac{\partial S_1}{\partial Q_s} &= \frac{Q_{ec}}{S_1} \frac{\partial Q_{ec}}{\partial Q_s} \\
\frac{\partial S_2}{\partial Q_s} &= \frac{(Q_\epsilon + Q_{ec})}{S_2} \frac{\partial Q_{ec}}{\partial Q_s} \\
\frac{\partial S_2}{\partial Q_\epsilon} &= \frac{(Q_\epsilon + Q_{ec})}{S_2} \\
\frac{\partial S_3}{\partial Q_e} &= -\frac{(Q_\epsilon - Q_e)}{S_3} \\
\frac{\partial S_3}{\partial Q_\epsilon} &= \frac{(Q_\epsilon - Q_e)}{S_3} \\
\frac{\partial S_4}{\partial Q_e} &= \frac{Q_e}{S_4}
\end{aligned} \tag{136}$$

Puis les dérivées secondes.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 Q_{ec}}{\partial Q_s^2} &= \frac{\mu_1 \alpha_1^2}{Q_s^3} \\
\frac{\partial^2 S_1}{\partial Q_s^2} &= \left[ \left( \frac{\partial Q_{ec}}{\partial Q_s} \right)^2 + Q_{ec} \frac{\partial^2 Q_{ec}}{\partial Q_s^2} \right] / S_1 - \left( Q_{ec} \frac{\partial Q_{ec}}{\partial Q_s} \right)^2 / S_1^3 \\
\frac{\partial^2 S_2}{\partial Q_s^2} &= \left[ \left( \frac{Q_{ec}}{\partial Q_s} \right)^2 + (Q_\epsilon + Q_{ec}) \frac{\partial^2 Q_{ec}}{\partial Q_s^2} \right] / S_2 - \left[ (Q_\epsilon + Q_{ec}) \frac{\partial Q_{ec}}{\partial Q_s} \right]^2 / S_2^3 \\
\frac{\partial^2 S_2}{\partial Q_s \partial Q_\epsilon} &= \frac{\partial Q_{ec}}{\partial Q_s} / S_2 - (Q_\epsilon + Q_{ec}) \frac{\partial S_2}{\partial Q_s} / S_2^2 \\
\frac{\partial^2 S_2}{\partial Q_\epsilon^2} &= \frac{1}{S_2} - \frac{(Q_\epsilon + Q_{ec})^2}{S_2^3} \\
\frac{\partial^2 S_3}{\partial Q_e^2} &= \frac{1}{S_3} - \frac{(Q_\epsilon - Q_e)^2}{S_3^3} \\
\frac{\partial^2 S_3}{\partial Q_\epsilon^2} &= \frac{1}{S_3} - \frac{(Q_\epsilon - Q_e)^2}{S_3^3} \\
\frac{\partial^2 S_3}{\partial Q_e \partial Q_\epsilon} &= -\frac{1}{S_3} - (Q_\epsilon - Q_e) \frac{\partial S_3}{\partial Q_e} / S_3^2 \\
\frac{\partial^2 S_4}{\partial Q_e^2} &= \frac{1}{S_4} - \frac{Q_e^2}{S_4^3}
\end{aligned} \tag{137}$$

Il nous faut également les dérivées par rapport à la phase.

$$\begin{aligned}\frac{\partial Q_s}{\partial \cos(3\varphi_\epsilon)} &= -\frac{n_s Q_{0s} \gamma_s}{(1 + \gamma_s \cos(3\varphi_\epsilon))^{n_s+1}} \\ \frac{\partial^2 Q_s}{\partial \cos(3\varphi_\epsilon)^2} &= -\frac{(n_s + 1) \gamma_s}{(1 + \gamma_s \cos(3\varphi_\epsilon))} \frac{\partial Q_s}{\partial \cos(3\varphi_\epsilon)}\end{aligned}\quad (138)$$

De même nous avons des expressions équivalentes pour  $Q_e$ ,  $\mu_2$ ,  $\mu_3$  avec respectivement les coefficients :  $Q_{0e}$ ,  $\gamma_e$ ,  $n_e$ ,  $\mu_{20}$ ,  $\gamma_{\mu_2}$ ,  $n_{\mu_2}$ ,  $\mu_{30}$ ,  $\gamma_{\mu_3}$ ,  $n_{\mu_3}$ .

Nous pouvons maintenant calculer les dérivées premières non nulles du potentiel par rapport aux grandeurs de base qui dépendent de la phase, ensuite, la dérivée par rapport à la phase s'obtiendra par dérivation composée (142) .

$$\begin{aligned}\frac{\partial E}{\partial Q_s} &= Q_\epsilon + \frac{\mu_1}{2} \left[ \frac{\partial Q_{ec}}{\partial Q_s} (2 Q_\epsilon - S_2 + S_1) - (Q_\epsilon + Q_{ec}) \frac{\partial S_2}{\partial Q_s} + Q_{ec} \cdot \frac{\partial S_1}{\partial Q_s} \right. \\ &\quad \left. - \alpha_1^2 \left\{ \left( \frac{\partial Q_{ec}}{\partial Q_s} + \frac{\partial S_2}{\partial Q_s} \right) / (Q_\epsilon + Q_{ec} + S_2) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \left( \frac{\partial Q_{ec}}{\partial Q_s} + \frac{\partial S_1}{\partial Q_s} \right) / (Q_{ec} + S_1) \right\} \right]\end{aligned}\quad (139)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial E}{\partial Q_e} &= \frac{\mu_3}{2} \left[ \frac{\partial S_4}{\partial Q_e} (-2 Q_\epsilon + Q_e) + (Q_\epsilon - Q_e) \frac{\partial S_3}{\partial Q_e} - S_3 + S_4 \right. \\ &\quad \left. + \alpha_3^2 \left\{ \left( -1 + \frac{\partial S_3}{\partial Q_e} \right) / (Q_\epsilon - Q_e + S_3) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \left( -1 + \frac{\partial S_4}{\partial Q_e} \right) / (-Q_e + S_4) \right\} \right]\end{aligned}\quad (140)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial E}{\partial \mu_2} &= Q_\epsilon^2 \\ \frac{\partial E}{\partial \mu_3} &= \frac{1}{2} [Q_\epsilon^2 - 2 Q_\epsilon \cdot S_4 + (Q_\epsilon - Q_e) S_3 + Q_e S_4 \\ &\quad + \alpha_3^2 \{ \text{Log}(|Q_\epsilon - Q_e + S_3|) - \text{Log}(|-Q_e + S_4|) \}]\end{aligned}\quad (141)$$

Ce qui nous permet par combinaison d'obtenir la dérivée première en fonction de la phase.

$$\frac{\partial E}{\partial \cos(3\varphi_\epsilon)} = \frac{\partial E}{\partial Q_s} \frac{\partial Q_s}{\partial \cos(3\varphi_\epsilon)} + \frac{\partial E}{\partial Q_e} \frac{\partial Q_e}{\partial \cos(3\varphi_\epsilon)} + \frac{\partial E}{\partial \mu_2} \frac{\partial \mu_2}{\partial \cos(3\varphi_\epsilon)} + \frac{\partial E}{\partial \mu_3} \frac{\partial \mu_3}{\partial \cos(3\varphi_\epsilon)} \quad (142)$$

Le calcul des dérivées secondes et mixte par rapport à la phase suit la même logique. Tout d'abord les dérivées secondes non nulles du potentiel par rapport aux grandeurs de

base dépendant de la phase, sont évaluées.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 E}{\partial Q_s^2} = & \frac{\mu_1}{2} \left[ \frac{\partial^2 Q_{ec}}{\partial Q_s^2} (2 Q_\epsilon - S_2 + S_1) - 2 Q_\epsilon \frac{\partial Q_{ec}}{\partial Q_s} \frac{\partial S_2}{\partial Q_s} + 2 Q_\epsilon \frac{\partial Q_{ec}}{\partial Q_s} \frac{\partial S_1}{\partial Q_s} \right. \\
& - (Q_\epsilon + Q_{ec}) \frac{\partial^2 S_2}{\partial Q_s^2} + Q_{ec} \cdot \frac{\partial^2 S_1}{\partial Q_s^2} \\
& - \alpha_1^2 \left\{ \left( \frac{\partial^2 Q_{ec}}{\partial Q_s^2} + \frac{\partial^2 S_2}{\partial Q_s^2} \right) / (Q_\epsilon + Q_{ec} + S_2) \right. \\
& - \left( \frac{\partial Q_{ec}}{\partial Q_s} + \frac{\partial S_2}{\partial Q_s} \right)^2 / (Q_\epsilon + Q_{ec} + S_2)^2 \\
& - \left( \frac{\partial^2 Q_{ec}}{\partial Q_s^2} + \frac{\partial^2 S_1}{\partial Q_s^2} \right) / (Q_{ec} + S_1) \\
& \left. \left. + \left( \frac{\partial Q_{ec}}{\partial Q_s} + \frac{\partial S_1}{\partial Q_s} \right)^2 / (Q_{ec} + S_1)^2 \right\} \right] \quad (143)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 E}{\partial Q_e^2} = & \frac{\mu_3}{2} \left[ \frac{\partial^2 S_4}{\partial Q_e^2} (-2 Q_\epsilon + Q_e) + (Q_\epsilon - Q_e) \frac{\partial^2 S_3}{\partial Q_e^2} - 2 \cdot \frac{\partial S_3}{\partial Q_e} + 2 \cdot \frac{\partial S_4}{\partial Q_e} \right. \\
& + \alpha_3^2 \left\{ \frac{\partial^2 S_3}{\partial Q_e^2} / (Q_\epsilon - Q_e + S_3) - \left( -1 + \frac{\partial S_3}{\partial Q_e} \right)^2 / (Q_\epsilon - Q_e + S_3)^2 \right. \\
& \left. \left. - \frac{\partial^2 S_4}{\partial Q_e^2} / (-Q_e + S_4) + \left( -1 + \frac{\partial S_4}{\partial Q_e} \right)^2 / (-Q_e + S_4)^2 \right\} \right] \quad (144)
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial \mu_3 \partial Q_e} = \frac{1}{\mu_3} \frac{\partial E}{\partial Q_e} \quad (145)$$

Ces expressions permettent alors d'obtenir les dérivées secondes non nulles du potentiel par rapport à la phase.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 E}{\partial \cos^2(3\varphi_\epsilon)} &= \frac{\partial^2 E}{\partial Q_s^2} \left( \frac{\partial Q_s}{\partial \cos(3\varphi_\epsilon)} \right)^2 + \frac{\partial E}{\partial Q_s} \frac{\partial^2 Q_s}{\partial \cos^2(3\varphi_\epsilon)} \\
&+ \frac{\partial^2 E}{\partial Q_e^2} \left( \frac{\partial Q_e}{\partial \cos(3\varphi_\epsilon)} \right)^2 + \frac{\partial E}{\partial Q_e} \frac{\partial^2 Q_e}{\partial \cos^2(3\varphi_\epsilon)} \\
&+ \frac{\partial E}{\partial \mu_2} \frac{\partial^2 \mu_2}{\partial \cos^2(3\varphi_\epsilon)} \\
&+ \frac{\partial E}{\partial \mu_3} \frac{\partial^2 \mu_3}{\partial \cos^2(3\varphi_\epsilon)} \\
&+ \frac{\partial^2 E}{\partial Q_e \partial \mu_3} \frac{\partial \mu_3}{\partial \cos(3\varphi_\epsilon)} \frac{\partial Q_e}{\partial \cos(3\varphi_\epsilon)} \\
\frac{\partial^2 E}{\partial Q_\epsilon \partial \cos(3\varphi_\epsilon)} &= \frac{\partial^2 E}{\partial Q_\epsilon \partial Q_s} \frac{\partial Q_s}{\partial \cos(3\varphi_\epsilon)} + \frac{\partial^2 E}{\partial Q_\epsilon \partial Q_e} \frac{\partial Q_e}{\partial \cos(3\varphi_\epsilon)} \\
&+ \frac{\partial^2 E}{\partial Q_\epsilon \partial \mu_2} \frac{\partial \mu_2}{\partial \cos(3\varphi_\epsilon)} + \frac{\partial^2 E}{\partial Q_\epsilon \partial \mu_3} \frac{\partial \mu_3}{\partial \cos(3\varphi_\epsilon)} \tag{146}
\end{aligned}$$

#### 6.6.4 Exemple : potentiel $\omega_7$

Il s'agit du même potentiel qu'au paragraphe (6.5.2, mais avec une dépendance à la phase du terme  $\mu_{1rev}$ . Ce terme intervient dans plusieurs expressions de manière un peu complexe, il est donc préférable de reprendre une majorité des expressions du paragraphe 6.6.3 pour plus de clarté.

Le potentiel correspond à une modification du potentiel  $\omega_4$ . Ainsi,  $\omega_7$  est obtenu en faisant varier les paramètres  $Q_{\sigma rev}$ ,  $Q_{\epsilon rev}$ ,  $\mu_{2rev}$  et  $\mu_{3rev}$  de  $\omega_4$  avec la la phase  $\varphi_\epsilon$  :

$$\begin{aligned}
Q_{\sigma rev} &= \frac{Q_{\sigma 0 rev}}{(1 + \gamma_{Q_{\sigma rev}} \cos(3\varphi_\epsilon))^{n_{Q_{\sigma rev}}}} \\
Q_{\epsilon rev} &= \frac{Q_{\epsilon 0 rev}}{(1 + \gamma_{Q_{\epsilon rev}} \cos(3\varphi_\epsilon))^{n_{Q_{\epsilon rev}}}} \\
\mu_{1rev} &= \frac{\mu_{01 rev}}{(1 + \gamma_{\mu_{1rev}} \cos(3\varphi_\epsilon))^{n_{\mu_{1rev}}}} \\
\mu_{2rev} &= \frac{\mu_{02 rev}}{(1 + \gamma_{\mu_{2rev}} \cos(3\varphi_\epsilon))^{n_{\mu_{2rev}}}} \\
\mu_{3rev} &= \frac{\mu_{03 rev}}{(1 + \gamma_{\mu_{3rev}} \cos(3\varphi_\epsilon))^{n_{\mu_{3rev}}}} \tag{147}
\end{aligned}$$

De manière à simplifier la présentation et les calculs on retient les notations suivantes :

$$\begin{aligned}
E &= \omega_7 \\
\mu_1 &= \mu_{1rev} \\
\mu_2 &= \mu_{2rev} \\
\mu_3 &= \mu_{3rev} \\
Q_s &= Q_{\sigma rev} \\
Q_e &= Q_{\epsilon rev} \tag{148}
\end{aligned}$$

et les variables intermédiaires :

$$\begin{aligned}
Q_{ec}(Q_s, \mu_1) &= \frac{((\mu_1 \alpha_1)^2 - Q_s^2)}{2 \mu_1 Q_s} \\
S_1(Q_s, \mu_1) &= (\alpha_1^2 + Q_{ec}^2)^{0.5} \\
S_2(Q_s, Q_\epsilon, \mu_1) &= (\alpha_1^2 + (Q_\epsilon + Q_{ec})^2)^{0.5} \\
S_3(Q_e, Q_\epsilon) &= (\alpha_3^2 + (Q_\epsilon - Q_e)^2)^{0.5} \\
S_4(Q_e) &= (\alpha_3^2 + Q_e^2)^{0.5}
\end{aligned} \tag{149}$$

Notons que  $Q_s$ ,  $Q_e$  et  $\mu_1$  dépendent de la phase.  
Avec ces nouvelles notations, le potentiel s'écrit.

$$\begin{aligned}
E &= \frac{K}{6} \text{Log}^2(V) + Q_s Q_\epsilon + \mu_2 Q_\epsilon^2 \\
&+ \frac{\mu_1}{2} [Q_\epsilon^2 + 2 Q_\epsilon Q_{ec} - (Q_\epsilon + Q_{ec}) \cdot S_2 + Q_{ec} S_1 \\
&\quad - \alpha_1^2 \{ \text{Log}(|Q_\epsilon + Q_{ec} + S_2|) - \text{Log}(|Q_{ec} + S_1|) \}] \\
&+ \frac{\mu_3}{2} [Q_\epsilon^2 - 2 Q_\epsilon \cdot S_4 + (Q_\epsilon - Q_e) S_3 + Q_e S_4 \\
&\quad + \alpha_3^2 \{ \text{Log}(|Q_\epsilon - Q_e + S_3|) - \text{Log}(|-Q_e + S_4|) \}]
\end{aligned} \tag{150}$$

Avant le calcul des dérivées du potentiel, on définit celles des grandeurs intermédiaires.  
Tout d'abord les dérivées premières.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial Q_{ec}}{\partial Q_s} &= -\frac{(Q_s^2 + (\mu_1 \alpha_1)^2)}{2 \mu_1 Q_s^2} \\
\frac{\partial Q_{ec}}{\partial \mu_1} &= \frac{(Q_s^2 + (\mu_1 \alpha_1)^2)}{2 \mu_1^2 Q_s} \\
\frac{\partial S_1}{\partial Q_s} &= \frac{Q_{ec}}{S_1} \frac{\partial Q_{ec}}{\partial Q_s} \\
\frac{\partial S_1}{\partial \mu_1} &= \frac{Q_{ec}}{S_1} \frac{\partial Q_{ec}}{\partial \mu_1} \\
\frac{\partial S_2}{\partial Q_s} &= \frac{(Q_\epsilon + Q_{ec})}{S_2} \frac{\partial Q_{ec}}{\partial Q_s} \\
\frac{\partial S_2}{\partial Q_\epsilon} &= \frac{(Q_\epsilon + Q_{ec})}{S_2} \\
\frac{\partial S_2}{\partial \mu_1} &= \frac{(Q_\epsilon + Q_{ec})}{S_2} \frac{\partial Q_{ec}}{\partial \mu_1} \\
\frac{\partial S_3}{\partial Q_e} &= -\frac{(Q_\epsilon - Q_e)}{S_3} \\
\frac{\partial S_3}{\partial Q_\epsilon} &= \frac{(Q_\epsilon - Q_e)}{S_3} \\
\frac{\partial S_4}{\partial Q_e} &= \frac{Q_e}{S_4}
\end{aligned} \tag{151}$$

Puis les dérivées secondes.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 Q_{ec}}{\partial Q_s^2} &= \frac{\mu_1 \alpha_1^2}{Q_s^3} \\
\frac{\partial^2 Q_{ec}}{\partial \mu_1^2} &= \frac{-Q_s}{\mu_1^3} \\
\frac{\partial^2 Q_{ec}}{\partial Q_s \partial \mu_1} &= -\frac{\alpha_1^2}{Q_s^2} + \frac{(Q_s^2 + (\mu_1 \alpha_1)^2)}{2 \mu_1^2 Q_s^2} \\
\frac{\partial^2 S_1}{\partial Q_s^2} &= \left[ \left( \frac{\partial Q_{ec}}{\partial Q_s} \right)^2 + Q_{ec} \frac{\partial^2 Q_{ec}}{\partial Q_s^2} \right] / S_1 - \left( Q_{ec} \frac{\partial Q_{ec}}{\partial Q_s} \right)^2 / S_1^3 \\
\frac{\partial^2 S_1}{\partial \mu_1^2} &= \left[ \left( \frac{\partial Q_{ec}}{\partial \mu_1} \right)^2 + Q_{ec} \frac{\partial^2 Q_{ec}}{\partial \mu_1^2} \right] / S_1 - \left( Q_{ec} \frac{\partial Q_{ec}}{\partial \mu_1} \right)^2 / S_1^3 \\
\frac{\partial^2 S_1}{\partial Q_s \partial \mu_1} &= \left[ \left( \frac{\partial Q_{ec}}{\partial \mu_1} \right) \left( \frac{\partial Q_{ec}}{\partial Q_s} \right) + Q_{ec} \left( \frac{\partial^2 Q_{ec}}{\partial \mu_1 \partial Q_s} \right) \right] / S_1 - \left( \frac{\partial Q_{ec}}{\partial \mu_1} \right) \left( \frac{\partial Q_{ec}}{\partial Q_s} \right) Q_{ec}^2 / S_1^3 \\
\frac{\partial^2 S_2}{\partial Q_s^2} &= \left[ \left( \frac{\partial Q_{ec}}{\partial Q_s} \right)^2 + (Q_\epsilon + Q_{ec}) \frac{\partial^2 Q_{ec}}{\partial Q_s^2} \right] / S_2 - \left[ (Q_\epsilon + Q_{ec}) \frac{\partial Q_{ec}}{\partial Q_s} \right]^2 / S_2^3 \\
\frac{\partial^2 S_2}{\partial Q_s \partial Q_\epsilon} &= \frac{1}{S_2} \frac{\partial Q_{ec}}{\partial Q_s} \left[ 1 - \frac{(Q_\epsilon + Q_{ec})^2}{S_2^2} \right] \\
\frac{\partial^2 S_2}{\partial Q_\epsilon^2} &= \left( 1 - \left( \frac{\partial S_2}{\partial Q_\epsilon} \right)^2 \right) / S_2 \\
\frac{\partial^2 S_2}{\partial \mu_1^2} &= \frac{1}{S_2} \left( \frac{\partial Q_{ec}}{\partial \mu_1} \right)^2 \left[ 1 - \frac{(Q_\epsilon + Q_{ec})^2}{S_2^2} \right] + \frac{(Q_\epsilon + Q_{ec})}{S_2} \frac{\partial^2 Q_{ec}}{\partial \mu_1^2} \\
\frac{\partial^2 S_2}{\partial Q_s \partial \mu_1} &= \frac{1}{S_2} \frac{\partial Q_{ec}}{\partial \mu_1} \frac{\partial Q_{ec}}{\partial Q_s} \left[ 1 - \frac{(Q_\epsilon + Q_{ec})^2}{S_2^2} \right] + \frac{(Q_\epsilon + Q_{ec})}{S_2} \frac{\partial^2 Q_{ec}}{\partial Q_s \partial \mu_1} \\
\frac{\partial^2 S_2}{\partial Q_\epsilon \partial \mu_1} &= \frac{1}{S_2} \frac{\partial Q_{ec}}{\partial \mu_1} \left[ 1 - \frac{(Q_\epsilon + Q_{ec})^2}{S_2^2} \right] \\
\frac{\partial^2 S_3}{\partial Q_e^2} &= \frac{1}{S_3} - \frac{(Q_\epsilon - Q_e)^2}{S_3^3} \\
\frac{\partial^2 S_3}{\partial Q_\epsilon^2} &= \left( 1 - \left( \frac{\partial S_3}{\partial Q_\epsilon} \right)^2 \right) / S_3 \\
\frac{\partial^2 S_3}{\partial Q_e \partial Q_\epsilon} &= -\frac{\partial^2 S_3}{\partial Q_e^2} \\
\frac{\partial^2 S_4}{\partial Q_e^2} &= \frac{1}{S_4} - \frac{Q_e^2}{S_4^3}
\end{aligned} \tag{152}$$

Il nous faut également les dérivées par rapport à la phase. On se reportera aux relations (139) que l'on appliquera également à  $\mu_1$  avec les paramètres  $\mu_{1_0}$  et  $\gamma_{\mu_1}$ .

Nous pouvons maintenant calculer les dérivées premières non nulles du potentiel par

rapport aux grandeurs de base qui dépendent de la phase, ensuite, la dérivée par rapport à la phase s'obtiendra par dérivation composée (155) .

En plus des expressions (139), (140), (141) il nous faut la dérivée par rapport à  $\mu_1$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial E}{\partial \mu_1} = & 0.5 [Q_\epsilon^2 + 2 Q_\epsilon Q_{ec} - (Q_\epsilon + Q_{ec}) \cdot S_2 + Q_{ec} S_1 \\
& - \alpha_1^2 \{ \text{Log}(|Q_\epsilon + Q_{ec} + S_2|) - \text{Log}(|Q_{ec} + S_1|) \}] \\
& + \frac{\mu_1}{2} \left[ 2 Q_\epsilon \frac{\partial Q_{ec}}{\partial \mu_1} - \frac{\partial Q_{ec}}{\partial \mu_1} S_2 - (Q_\epsilon + Q_{ec}) \frac{\partial S_2}{\partial \mu_1} + \frac{\partial Q_{ec}}{\partial \mu_1} S_1 + Q_{ec} \frac{\partial S_1}{\partial \mu_1} \right. \\
& - \alpha_1^2 \left( \frac{\text{Signe} \{ (Q_\epsilon + Q_{ec}) + S_2 \} \left( \frac{\partial Q_{ec}}{\partial \mu_1} + \frac{\partial S_2}{\partial \mu_1} \right)}{|(Q_\epsilon + Q_{ec}) + S_2|} \right. \\
& \left. \left. - \frac{\text{Signe} \{ Q_{ec} + S_1 \} \left( \frac{\partial Q_{ec}}{\partial \mu_1} + \frac{\partial S_1}{\partial \mu_1} \right)}{|Q_{ec} + S_1|} \right) \right]
\end{aligned} \tag{153}$$

Rappel des dérivées premières du potentiel (cf. 122 )

$$\begin{aligned}
\frac{\partial E}{\partial V} &= \frac{K}{3} \frac{\text{Log}(V)}{V} \\
\frac{\partial E}{\partial Q_\epsilon} &= Q_{\sigma_{rev}} + 2\mu_{2rev} Q_\epsilon \\
& + 0.5 \mu_{1rev} \left\{ (Q_\epsilon + Q_{ec}) \left( 2 - \frac{\partial S_2}{\partial Q_\epsilon} \right) - S_2 \right. \\
& \quad \left. - \alpha_{1rev}^2 \left( \left( 1 + \frac{\partial S_2}{\partial Q_\epsilon} \right) / (Q_\epsilon + Q_e + S_2) \right) \right\} \\
& + 0.5 \mu_{3rev} \left\{ 2 (Q_\epsilon - S_4) + S_3 + (Q_\epsilon - Q_e) \frac{\partial S_3}{\partial Q_\epsilon} \right. \\
& \quad \left. + \alpha_{3rev}^2 \left( \left( 1 + \frac{\partial S_3}{\partial Q_\epsilon} \right) / (Q_\epsilon - Q_e + S_3) \right) \right\}
\end{aligned} \tag{154}$$

Puis par combinaison, la dérivée première du potentiel en fonction de la phase.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial E}{\partial \cos(3\varphi_\epsilon)} &= \frac{\partial E}{\partial Q_s} \frac{\partial Q_s}{\partial \cos(3\varphi_\epsilon)} + \frac{\partial E}{\partial Q_e} \frac{\partial Q_e}{\partial \cos(3\varphi_\epsilon)} + \frac{\partial E}{\partial \mu_1} \frac{\partial \mu_1}{\partial \cos(3\varphi_\epsilon)} \\
& + \frac{\partial E}{\partial \mu_2} \frac{\partial \mu_2}{\partial \cos(3\varphi_\epsilon)} + \frac{\partial E}{\partial \mu_3} \frac{\partial \mu_3}{\partial \cos(3\varphi_\epsilon)}
\end{aligned} \tag{155}$$

Le calcul des dérivées secondes et mixte par rapport à la phase suit la même logique. Tout d'abord les dérivées secondes non nulles du potentiel par rapport aux grandeurs de base dépendant de la phase, sont évaluées.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 E}{\partial Q_s^2} = & \frac{\mu_1}{2} \left[ \frac{\partial^2 Q_{ec}}{\partial Q_s^2} (2 Q_\epsilon - S_2 + S_1) - 2 Q_\epsilon \frac{\partial Q_{ec}}{\partial Q_s} \frac{\partial S_2}{\partial Q_s} + 2 Q_\epsilon \frac{\partial Q_{ec}}{\partial Q_s} \frac{\partial S_1}{\partial Q_s} \right. \\
& - (Q_\epsilon + Q_{ec}) \frac{\partial^2 S_2}{\partial Q_s^2} + Q_{ec} \cdot \frac{\partial^2 S_1}{\partial Q_s^2} \\
& - \alpha_1^2 \left\{ \left( \frac{\partial^2 Q_{ec}}{\partial Q_s^2} + \frac{\partial^2 S_2}{\partial Q_s^2} \right) / (Q_\epsilon + Q_{ec} + S_2) \right. \\
& - \left( \frac{\partial Q_{ec}}{\partial Q_s} + \frac{\partial S_2}{\partial Q_s} \right)^2 / (Q_\epsilon + Q_{ec} + S_2)^2 \\
& - \left( \frac{\partial^2 Q_{ec}}{\partial Q_s^2} + \frac{\partial^2 S_1}{\partial Q_s^2} \right) / (Q_{ec} + S_1) \\
& \left. \left. + \left( \frac{\partial Q_{ec}}{\partial Q_s} + \frac{\partial S_1}{\partial Q_s} \right)^2 / (Q_{ec} + S_1)^2 \right\} \right] \quad (156)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 E}{\partial Q_e^2} = & \frac{\mu_3}{2} \left[ \frac{\partial^2 S_4}{\partial Q_e^2} (-2 Q_\epsilon + Q_e) + (Q_\epsilon - Q_e) \frac{\partial^2 S_3}{\partial Q_e^2} - 2 \cdot \frac{\partial S_3}{\partial Q_e} + 2 \cdot \frac{\partial S_4}{\partial Q_e} \right. \\
& + \alpha_3^2 \left\{ \frac{\partial^2 S_3}{\partial Q_e^2} / (Q_\epsilon - Q_e + S_3) - \left( -1 + \frac{\partial S_3}{\partial Q_e} \right)^2 / (Q_\epsilon - Q_e + S_3)^2 \right. \\
& \left. \left. - \frac{\partial^2 S_4}{\partial Q_e^2} / (-Q_e + S_4) + \left( -1 + \frac{\partial S_4}{\partial Q_e} \right)^2 / (-Q_e + S_4)^2 \right\} \right] \quad (157)
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial \mu_3 \partial Q_e} = \frac{1}{\mu_3} \frac{\partial E}{\partial Q_e} \quad (158)$$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial Q_\epsilon \partial Q_s} = 1 + \frac{\mu_1}{2} \left( \frac{\partial Q_{ec}}{\partial Q_s} \left( 2 - \frac{\partial S_2}{\partial Q_\epsilon} \right) - \frac{\partial S_2}{\partial Q_s} - (Q_\epsilon + Q_{ec}) * \frac{\partial^2 S_2}{\partial Q_\epsilon \partial Q_s} - \alpha_1^2 * \left( \frac{\partial S_2}{\partial Q_s} - \left( 1 + \frac{\partial S_2}{\partial Q_\epsilon} \right) \right) \right)$$

Ces expressions permettent alors d'obtenir les dérivées secondes non nulles du potentiel par rapport à la phase.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 E}{\partial \cos^2(3\varphi_\epsilon)} &= \frac{\partial^2 E}{\partial Q_s^2} \left( \frac{\partial Q_s}{\partial \cos(3\varphi_\epsilon)} \right)^2 + \frac{\partial^2 E}{\partial Q_s \partial \mu_1} \left( \frac{\partial Q_s}{\partial \cos(3\varphi_\epsilon)} \right) \left( \frac{\partial \mu_1}{\partial \cos(3\varphi_\epsilon)} \right) \\
&\quad + \frac{\partial^2 E}{\partial Q_s \partial Q_e} \left( \frac{\partial Q_s}{\partial \cos(3\varphi_\epsilon)} \right) \left( \frac{\partial Q_e}{\partial \cos(3\varphi_\epsilon)} \right) + \frac{\partial E}{\partial Q_s} \frac{\partial^2 Q_s}{\partial \cos^2(3\varphi_\epsilon)} \\
&\quad + \frac{\partial^2 E}{\partial Q_e^2} \left( \frac{\partial Q_e}{\partial \cos(3\varphi_\epsilon)} \right)^2 + \frac{\partial^2 E}{\partial Q_e \partial \mu_3} \left( \frac{\partial Q_e}{\partial \cos(3\varphi_\epsilon)} \right) \left( \frac{\partial \mu_3}{\partial \cos(3\varphi_\epsilon)} \right) + \frac{\partial E}{\partial Q_e} \frac{\partial^2 Q_e}{\partial \cos^2(3\varphi_\epsilon)} \\
&\quad + \frac{\partial^2 E}{\partial \mu_1^2} \left( \frac{\partial \mu_1}{\partial \cos(3\varphi_\epsilon)} \right)^2 + \frac{\partial^2 E}{\partial Q_s \partial \mu_1} \left( \frac{\partial Q_s}{\partial \cos(3\varphi_\epsilon)} \right) \left( \frac{\partial \mu_1}{\partial \cos(3\varphi_\epsilon)} \right) + \frac{\partial E}{\partial \mu_1} \frac{\partial^2 \mu_1}{\partial \cos^2(3\varphi_\epsilon)} \\
&\quad + \frac{\partial E}{\partial \mu_2} \frac{\partial^2 \mu_2}{\partial \cos^2(3\varphi_\epsilon)} \\
&\quad + \frac{\partial^2 E}{\partial Q_e \partial \mu_3} \frac{\partial \mu_3}{\partial \cos(3\varphi_\epsilon)} \frac{\partial Q_e}{\partial \cos(3\varphi_\epsilon)} + \frac{\partial E}{\partial \mu_3} \frac{\partial^2 \mu_3}{\partial \cos^2(3\varphi_\epsilon)} \\
\frac{\partial^2 E}{\partial Q_e \partial \cos(3\varphi_\epsilon)} &= \frac{\partial^2 E}{\partial Q_e \partial Q_s} \frac{\partial Q_s}{\partial \cos(3\varphi_\epsilon)} + \frac{\partial^2 E}{\partial Q_e \partial Q_e} \frac{\partial Q_e}{\partial \cos(3\varphi_\epsilon)} \\
&\quad + \frac{\partial^2 E}{\partial Q_e \partial \mu_1} \frac{\partial \mu_1}{\partial \cos(3\varphi_\epsilon)} + \frac{\partial^2 E}{\partial Q_e \partial \mu_2} \frac{\partial \mu_2}{\partial \cos(3\varphi_\epsilon)} + \frac{\partial^2 E}{\partial Q_e \partial \mu_3} \frac{\partial \mu_3}{\partial \cos(3\varphi_\epsilon)} \tag{160}
\end{aligned}$$

### 6.6.5 Dépendance à la température : potentiel $\omega_4$ et $\omega_6$

L'objectif est ici d'introduire une dépendance à la température selon la méthodologie proposée par Laurent Orgéas dans sa thèse (page 54). A priori, cela ne pose aucune difficulté opératoire. La dépendance est effectuée uniquement au travers du paramètre  $Q_s$  (ou  $Q_{0s}$  dans le cas d'une dépendance à la phase).

Introduisons un certain nombre de paramètres équivalents aux paramètres de la thèse que l'on rappelle :  $T_{0rev}$  appelé par la suite  $T_{0r}$ ,  $\partial\tau_{rev}/\partial T$  appelé par la suite  $G_r$ ,  $\tau_{rmax}$  appelé par la suite  $Q_{rmax}$ , et enfin  $\alpha_{tau_{rev}}$  appelé par la suite  $a_r$ .

Deux températures particulières, qui demeureront fixes, sont calculées à partir de ces 4 paramètres.

$$\begin{aligned}
T_c &= T_{0r} + \frac{Q_{rmax}}{2 G_r} \\
T_s &= \frac{a_r^2 - (Q_{rmax}/G_r)^2}{2 (Q_{rmax}/G_r)} \tag{161}
\end{aligned}$$

Ce qui permet de décrire l'évolution de  $Q_s(T)$

$$\begin{aligned}
\text{si } T \geq T_c \text{ alors } Q_s &= \frac{1}{2} G_r \left[ (T - T_c + T_s) - \sqrt{(T - T_c + T_s)^2 + a_r^2} \right] + Q_{rmax} \\
\text{sinon } Q_s &= \frac{1}{2} G_r \left[ (T - T_c - T_s) - \sqrt{(T - T_c - T_s)^2 + a_r^2} \right] \tag{162}
\end{aligned}$$

L'évolution correspond globalement à deux positions extrêmes (dans le plan  $Q_s$  en fonction de  $T$ , cela correspond à 2 segments de droites horizontaux) et une zone intermédiaire

de raccordement représentée par un segment oblique. L'ensemble de l'évolution comprend donc 3 tronçons, qui sont raccordés de manière lissée. Les paramètres qui contrôlent l'évolution, sont :

- $T_{0r}$  : température à partir de laquelle il y a une évolution de  $Q_s$ ,
- $G_r$  : la pente de l'évolution oblique,
- $Q_{rmax}$  : la valeur maxi de  $Q_s$ ,
- $a_r$  : un paramètre qui contrôle le rayon de courbure au niveau du raccordement entre les différents tronçons.

## 7 Remarques sur le calcul d'un module de compressibilité et de cisaillement

Dans le cas de calculs dynamiques, ou de facteurs de pénalisation de contact par exemple, il est intéressant de pouvoir avoir un ordre d'idée d'un "module de compressibilité" et certaine fois également d'un "module de cisaillement" associé à la loi de comportement. Il ne s'agit pas forcément d'un calcul très précis, mais d'un ordre de grandeur.

On se reportera au premier potentiel (6.4.1) pour le calcul pratique du module de compressibilité.

Sixième partie

# Remarques sur l'implantation informatique

## 8 Remarques sur la mise au point, dans le code EF

On suppose que les différentes formules ont été implantées dans un code EF, et que l'on cherche d'une part à s'assurer que les résultats obtenus soient correctes et d'autre part à résoudre de manière efficace et rapide les inévitables bugs liés aux erreurs d'implantations.

Deux phases sont donc à distinguer. La première concerne la vérification des résultats, indépendamment de la convergence vers se résultat. La seconde concerne la qualité de la convergence, dans le cas d'un calcul selon un schéma implicite, que l'on suppose régit par un algorithme de type NEWTON.

### 8.1 Vérification des résultats

On se place dans le cas d'une géométrie volontairement très simple : ici un cube, que l'on supposera interpolé par un élément linéaire, ce qui conduit déjà à 8 points d'intégration, et 24 degré de liberté (ddl) !

Pour se libérer des problèmes de convergence, tous les ddl sont imposé, ainsi le calcul converge dès la première itération d'équilibre et on obtient les réactions aux noeuds.

Nous allons essayer de choisir des sollicitations simples, qui mettent en évidence un comportement particulier régit par un nombre minimal de paramètre matériel. Par exemple, une déformation volumique uniquement, ou de cisaillement etc.

#### 8.1.1 Cas du potentiel de TRELOAR avec variation volumique

Le potentiel est composé d'une partie distincte relative à la déformation volumique et d'une seconde pour les autres comportement. La vérification va suivre cette décomposition.

Soit tout d'abord une cinématique correspondant à une élongation  $\lambda = \frac{L}{L_0}$  dans une seule direction. On détermine analytiquement la valeur de la force lié à une variation de cette élongation, c'est-à-dire correspondant à une vitesse virtuelle  $\dot{\lambda}$ . Par définition on a (9) :

$$\begin{aligned} \dot{E} &= F_{ex} \dot{V} = F_{ex} \dot{L} = F_{ex} \dot{\lambda} L_0 \\ &= \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}_{ref}} \omega \sqrt{g} d\theta^i \end{aligned} \quad (163)$$

d'où :

$$\sigma : D = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{d(\omega \sqrt{g})}{dt} = \frac{\sqrt{g_0}}{\sqrt{g}} \frac{dW}{dt} \quad (164)$$

Soit tout d'abord une cinématique correspondant à une dilatation sans changement de forme de rapport  $\beta$ . Dans ce cas, le tenseur de déformation est sphérique, le second invariant  $\bar{I}_{\bar{\epsilon}}$  est nulle.

Septième partie

# Potentiel de Mooney-Rivlin

## 9 Cas du potentiel de Mooney-Rivlin

Les potentiels classiques s'appuient sur des invariants construits à partir des élongations principales :

$$\lambda_i = \frac{L_i}{L_{0i}} \quad (165)$$

avec  $L_{0i}$  la longueur initiale dans la direction  $i$ , et  $\Delta L_i = \hat{L}_i - L_{0i}$

Classiquement, ces grandeurs sont calculées soit à partir du tenseur de Cauchy-Green droit exprimé dans le repère initiale :

$$\mathbf{C} = {}^0_{t..} \mathbf{G} = \hat{g}_{ij} \hat{g}^i \otimes \hat{g}^j \quad (166)$$

soit à partir du tenseur de Cauchy-Green gauche exprimé dans le repère final naturel  $\hat{g}_i$  :

$$\mathbf{B} = {}^t_{0} \mathbf{G} = g^{ij} \hat{g}_i \otimes \hat{g}_j \quad (167)$$

Ces deux tenseurs possèdent les mêmes invariants.

Plus précisément le potentiel est calculé à partir des invariants suivants :

$$\begin{cases} I_1 = I_C = I_B = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 \\ I_2 = II_C = II_B = \lambda_1^2 \lambda_2^2 + \lambda_2^2 \lambda_3^2 + \lambda_3^2 \lambda_1^2 \\ I_3 = III_C = III_B = \lambda_1^2 \lambda_2^2 \lambda_3^2 \end{cases} \quad (168)$$

Avec la notation :

$$\begin{cases} I_{\mathbf{A}} = \text{trace}(\mathbf{A}) \\ II_{\mathbf{A}} = \frac{1}{2}(I_{\mathbf{A}} \cdot I_{\mathbf{A}} - I_{(\mathbf{A} \cdot \mathbf{A})}) \\ III_{\mathbf{A}} = \det(\mathbf{A}) = \frac{1}{3}I_{(\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{A})} - \frac{1}{2}I_{\mathbf{A}} \cdot I_{(\mathbf{A} \cdot \mathbf{A})} + \frac{I_{\mathbf{A}}^3}{6} \end{cases} \quad (169)$$

Dans le cas des tenseur  $\mathbf{C}$  et  $\mathbf{B}$  les trois traces s'écrivent :

$$\begin{cases} I_{\mathbf{C}} = I_{\mathbf{B}} = \hat{g}_{ij} g^{ji} = \mathbf{I} : \mathbf{B} \\ I_{(\mathbf{C} \cdot \mathbf{C})} = I_{(\mathbf{B} \cdot \mathbf{B})} = \hat{g}_{ij} g^{jk} \hat{g}_{kl} g^{li} = \mathbf{I} : (\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}) \\ I_{(\mathbf{C} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{C})} = I_{(\mathbf{B} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{B})} = \hat{g}_{ij} g^{jk} \hat{g}_{kl} g^{lr} \hat{g}_{rs} g^{si} = \mathbf{I} : (\mathbf{B} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{B}) \end{cases} \quad (170)$$

Pour permettre une séparation entre la partie déviatorique et la partie sphérique, on utilise en fait les invariants modifiés suivants :

$$J_1 = I_1 \cdot I_3^{-1/3} \quad \text{et} \quad J_2 = I_2 \cdot I_3^{-2/3} \quad \text{et} \quad J_3 = I_3 = V^2 \quad \text{ou} \quad V = \sqrt{I_3} = \sqrt{\frac{g}{g_0}} \quad (171)$$

A partir de ces invariants le potentiel s'écrit selon :

$$\begin{aligned} W_{\text{Mooney-Rivlin}} &= (C_{10} (J_1 - 3) + C_{01} (J_2 - 3)) + \left( K \left[ 1 - \frac{1 + \ln(\sqrt{I_3})}{\sqrt{I_3}} \right] \right) \\ &= (W_d + W_v) = V \cdot w_{\text{Mooney-Rivlin}} \end{aligned} \quad (172)$$

où  $W_{\text{Mooney-Rivlin}}$  représente le potentiel par rapport au volume initiale,  $w_{\text{Mooney-Rivlin}}$  le potentiel par rapport au volume finale,  $W_d$  la partie déviatorique du potentiel,  $W_v$  la partie strictement volumique.

Ainsi dans cette forme le potentiel dépend de 3 paramètres :  $K$  qui est relatif à la compressibilité volumique,  $C_{10}$  et  $C_{01}$  qui sont relatifs à la partie changement de forme.

Notons que la partie volumique est un ajout par rapport à la forme initiale du potentiel. Il existe d'autres types de parties volumiques, plus simples mais a priori moins performantes (thèse Cécile Moreau).

$$\left\{ \begin{array}{l} W_{v1} = K \left( 1 - \frac{1 + \ln(\sqrt{I_3})}{\sqrt{I_3}} \right) = K \left( 1 - \frac{1 + \ln(V)}{V} \right) \\ W_{v2} = \frac{K}{2} (V - 1) \\ W_{v3} = \frac{K}{2} (\log(V))^2 \\ W_{v4} = \frac{K}{2} (V - 1)^2 \end{array} \right. \quad (173)$$

Le potentiel ainsi présenté ne permet cependant pas un raidissement en fin de courbe.

Ce raidissement peut cependant être obtenue à l'aide d'un potentiel additionnel proposé par Moreau-Rio-Thuillier selon :

$$W_{courbure} = \frac{1}{\sqrt{I_3}} \left( (J_1 - 3) \left( \frac{J_1 - 3}{a} \right)^{2r} \frac{1}{(2r + 1)} \right) \quad (174)$$

Le potentiel additionnel dépend de deux paramètres :  $a$  qui positionne le départ de la branche finale, et  $r$  qui pilote la courbure pour le passage sur la dernière branche.

On pourra se reporter au mémoire de thèse de Cécile Moreau, pour plus d'informations.

De manière à obtenir le tenseur des contraintes de Cauchy à l'aide du potentiel, il nous faut déterminer les variations des invariants précédents par rapports aux composantes d'un tenseur Eulérien, qui dans notre cas est le tenseur d'Almansi dont on rappelle les composantes :  $\varepsilon_{ij} = 1/2(\hat{g}_{ij} - g_{ij})$  ce qui permet d'écrire la différentielle totale en composantes suivante :

$$2d\varepsilon_{ij} = d\hat{g}_{ij} \quad (175)$$

d'où les formules suivantes pour les dérivées premières :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial I_1}{\partial \varepsilon_{ij}} = 2 g^{ij} \\ \frac{\partial I_2}{\partial \varepsilon_{ij}} = 2 \hat{g}_{kl} (g^{kl} g^{ij} - g^{ik} g^{jl}) \\ \frac{\partial I_3}{\partial \varepsilon_{ij}} = 2 \frac{g \hat{g}^{ij}}{g_0} = 2 V^2 \hat{g}^{ij} = 2 I_3 \hat{g}^{ij} \end{array} \right. \quad (176)$$

avec  $g^{ij}$ ,  $\hat{g}_{ij}$  et  $\hat{g}^{ij}$  les composantes du tenseur métrique à l'instant de référence  $t = 0$  et à l'instant actuel  $t$ .

$g_0$  et  $g$  représentent respectivement le déterminant du tenseur métrique à l'instant initial et actuel.

Ces différentes expressions peuvent également s'écrire sous la forme tensorielle :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left( \frac{\partial I_1}{\partial \epsilon} \right)_{..} = 2 \mathbf{B} \\ \left( \frac{\partial I_2}{\partial \epsilon} \right)_{..} = 2 (\mathbf{I} \mathbf{B} \cdot \mathbf{B} - \mathbf{B} \cdot \mathbf{B}) \\ \left( \frac{\partial I_3}{\partial \epsilon} \right)_{..} = 2 I_3 \mathbf{I} \end{array} \right. \quad (177)$$

Avec .. qui indique que l'on dérive par rapport aux coordonnées deux fois covariantes. Dans le cas générale, il n'y a pas de problème pour dériver un tenseur par rapport à un autre, sauf dans le cas du tenseur métrique ou d'une manière équivalente le tenseur de déformation. Pour ces derniers, on peut noter que les bases naturelles ou duale dépendent des composantes de la métrique ou de la déformation, ce qui complique nettement les expressions. De plus suivant le type de composantes que l'on retient pour la déformation par exemple, on obtient un résultat différent, il est donc nécessaire d'indiquer le type de composante utilisés pour la dérivation d'où la notation (). Ce formalisme constitue donc une **“proposition” de notation !**

A partir du potentiel on écrit :

$$\sigma^{ij} = \frac{\sqrt{g_0} \partial W}{\sqrt{g} \partial \epsilon_{ij}} = \frac{1}{V} \frac{\partial W}{\partial \epsilon_{ij}} = \frac{1}{\sqrt{I_3}} \frac{\partial W}{\partial \epsilon_{ij}} \quad (178)$$

avec ici :

$$\frac{\partial W}{\partial \epsilon_{ij}} = \frac{\partial W}{\partial I_1} \frac{\partial I_1}{\partial \epsilon_{ij}} + \frac{\partial W}{\partial I_2} \frac{\partial I_2}{\partial \epsilon_{ij}} + \frac{\partial W}{\partial I_3} \frac{\partial I_3}{\partial \epsilon_{ij}} \quad (179)$$

Sous forme tensorielle ces expressions s'écrivent :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} &= \frac{1}{\sqrt{I_3}} \left( \frac{\partial W}{\partial \epsilon} \right)_{..} \\ &= \frac{2}{\sqrt{I_3}} \left( \frac{\partial W}{\partial I_1} \mathbf{B} + \frac{\partial W}{\partial I_2} (\mathbf{I} \mathbf{B} \cdot \mathbf{B} - \mathbf{B} \cdot \mathbf{B}) + \frac{\partial W}{\partial I_3} I_3 \mathbf{I} \right) \end{aligned} \quad (180)$$

Cependant le potentiel est supposé s'exprimer en fonction des invariants modifiés :  $J_r$ . Nous allons donc modifier ces expressions pour tenir compte des relations existants entre les deux types d'invariants. De manière à alléger les dérivées partielles on détermine tout d'abord les variations des  $J_\alpha$  :

$$\begin{aligned} \frac{\partial J_1}{\partial I_1} &= I_3^{-1/3}, \quad \frac{\partial J_1}{\partial I_2} = 0, \quad \frac{\partial J_1}{\partial I_3} = \frac{-1}{3} I_1 \cdot I_3^{-4/3} \\ \frac{\partial J_2}{\partial I_1} &= 0, \quad \frac{\partial J_2}{\partial I_2} = I_3^{-2/3}, \quad \frac{\partial J_2}{\partial I_3} = \frac{-2}{3} I_2 \cdot I_3^{-5/3} \end{aligned} \quad (181)$$

On peut alors reprendre les formules précédentes avec les invariants  $J_1(I_1, I_2, I_3)$ ,  $J_2(I_1, I_2, I_3)$  et  $J_3 = I_3$ .

$$\begin{aligned}
\frac{\partial W}{\partial \epsilon_{ij}} &= \frac{\partial W}{\partial J_1} \left( J_3^{-1/3} \frac{\partial I_1}{\partial \epsilon_{ij}} + \frac{-1}{3} I_1 \cdot J_3^{-4/3} \frac{\partial J_3}{\partial \epsilon_{ij}} \right) \\
&+ \frac{\partial W}{\partial J_2} \left( J_3^{-2/3} \frac{\partial I_2}{\partial \epsilon_{ij}} + \frac{-2}{3} I_2 \cdot J_3^{-5/3} \frac{\partial J_3}{\partial \epsilon_{ij}} \right) \\
&+ \frac{\partial W}{\partial J_3} \frac{\partial J_3}{\partial \epsilon_{ij}} \\
&= (J_3^{-1/3}) \frac{\partial W}{\partial J_1} \frac{\partial I_1}{\partial \epsilon_{ij}} + (I_3^{-2/3}) \frac{\partial W}{\partial J_2} \frac{\partial I_2}{\partial \epsilon_{ij}} \\
&+ \left( \frac{-(I_1 \cdot J_3^{-4/3})}{3} \frac{\partial W}{\partial J_1} + \frac{-2(I_2 \cdot J_3^{-5/3})}{3} \frac{\partial W}{\partial J_2} + \frac{\partial W}{\partial J_3} \right) \frac{\partial J_3}{\partial \epsilon_{ij}} \quad (182)
\end{aligned}$$

On peut également isoler les parties relatives au potentiel en notant :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial J_1}{\partial \epsilon_{ij}} &= \left( I_3^{-1/3} \frac{\partial I_1}{\partial \epsilon_{ij}} + \frac{-1}{3} I_1 \cdot I_3^{-4/3} \frac{\partial I_3}{\partial \epsilon_{ij}} \right) \\
\frac{\partial J_2}{\partial \epsilon_{ij}} &= \left( I_3^{-2/3} \frac{\partial I_2}{\partial \epsilon_{ij}} + \frac{-2}{3} I_2 \cdot I_3^{-5/3} \frac{\partial I_3}{\partial \epsilon_{ij}} \right) \\
\frac{\partial J_3}{\partial \epsilon_{ij}} &= \frac{\partial I_3}{\partial \epsilon_{ij}} \quad (183)
\end{aligned}$$

Sous forme tensorielle ces expressions deviennent :

$$\begin{cases} \left( \frac{\partial J_1}{\partial \boldsymbol{\epsilon}} \right)_{..} = 2 I_3^{-1/3} (\mathbf{B} - \frac{1}{3} I_1 \mathbf{I}) \\ \left( \frac{\partial J_2}{\partial \boldsymbol{\epsilon}} \right)_{..} = 2 I_3^{-2/3} (\mathbf{I} \mathbf{B} \cdot \mathbf{B} - \mathbf{B} \cdot \mathbf{B} - \frac{2}{3} I_2 \mathbf{I}) \\ \left( \frac{\partial J_3}{\partial \boldsymbol{\epsilon}} \right)_{..} = \left( \frac{\partial I_3}{\partial \boldsymbol{\epsilon}} \right)_{..} = 2 I_3 \mathbf{I} \end{cases} \quad (184)$$

Ces trois expressions peuvent ainsi se mettre sous forme d'un vecteur colonne, dont chaque élément sont les composantes d'un tenseur.

$$\left( \frac{\partial J_{(i)}}{\partial \epsilon_{kl}} \right) \hat{g}_k \otimes \hat{g}_l = (\mathbf{J}, \boldsymbol{\epsilon})_{..} \quad (185)$$

En notant :  $\frac{\partial W}{\partial J_i} = W_{,J_i}$  on obtient au final en notation tensorielle :

$$(\mathbf{W}, \boldsymbol{\epsilon})_{..} = \langle W_{,J_i} \rangle (\mathbf{J}, \boldsymbol{\epsilon})_{..} \quad (186)$$

D'où la forme tensorielle du tenseur des contraintes :

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\sqrt{g_0}}{\sqrt{g}} \langle W_{,J_i} \rangle (\mathbf{J}, \boldsymbol{\epsilon})_{..} = \frac{1}{V} \langle W_{,J_i} \rangle (\mathbf{J}, \boldsymbol{\epsilon})_{..} \quad (187)$$

D'autre part on peut également remarquer que le module de compressibilité pourra être déterminé à l'aide de la formule  $-p = \frac{\partial W}{\partial V}$  cf. 19. Sachant que l'on a également  $J_3 = I_3 = V^2$ , ou encore  $\frac{\partial J_3}{\partial V} = 2V$  on en déduit :

$$-p = 2.V W_{,J_3} \quad (188)$$

Si l'on recherche un module sécant du type  $-p = K_s \ln(V)$  cela conduit à :

$$K_s = \frac{2.V}{\ln(V)} W_{,J_3} \quad (189)$$

Si l'on examine les 3 potentiels volumiques introduit en 234 on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial W_{v1}}{\partial V} = \frac{K \ln(V)}{V^2} \\ \frac{\partial W_{v2}}{\partial V} = 0.5 K \\ \frac{\partial W_{v3}}{\partial V} = \frac{K \ln(V)}{V} \\ \frac{\partial W_{v4}}{\partial V} = K(V - 1.) \end{array} \right. \quad (190)$$

compte tenu de  $V = \sqrt{J_3}$  d'où  $\frac{\partial V}{\partial J_3} = \frac{1}{2\sqrt{J_3}} = \frac{1}{2V}$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial W_{v1}}{\partial J_3} = 0.5 \frac{K \ln(V)}{V^3} \\ \frac{\partial W_{v2}}{\partial J_3} = 0.25 \frac{K}{V} \\ \frac{\partial W_{v3}}{\partial J_3} = 0.5 \frac{K \ln(V)}{V^2} \\ \frac{\partial W_{v4}}{\partial J_3} = 0.5 K \frac{(V - 1.)}{V} \end{array} \right. \quad (191)$$

d'où le module sécant vis-à-vis de la pression, en utilisant 189 :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{pour le potentiel 1} \quad K_{s1} = \frac{K}{V^2} \\ \text{pour le potentiel 2} \quad K_{s2} = 0.5 \frac{K}{\ln(V)} \\ \text{pour le potentiel 3} \quad K_{s3} = \frac{K}{V} \\ \text{pour le potentiel 4} \quad K_{s4} = \frac{(V-1.) K}{\ln(V)} \end{array} \right. \quad (192)$$

On remarque que le premier et le troisième potentiel ne posent pas de problème lorsque  $V$  tend vers 1 c'est-à-dire pour une variation de volume nulle, ils tendent vers  $K$ .

Le deuxième tends vers l'infini pour  $V = 1$  ce qui est rédhibitoire pour une utilisation pratique sauf pour des matériaux très particuliers ou pour la nécessité (par exemple numérique) de disposer d'un module très grand à l'origine.

En utilisant un développement limité au premier ordre, on voit que le troisième tends vers  $K$  à l'origine, comme le premier et le troisième potentiel.

Puis pour les variations secondes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 W_{v1}}{\partial J_3 \partial V} = \frac{(-1.5 \ln(V)+0.5) K}{V^4} \\ \frac{\partial^2 W_{v2}}{\partial J_3 \partial V} = -0.25 \frac{K}{V^2} \\ \frac{\partial^2 W_{v3}}{\partial J_3 \partial V} = \frac{(0.5-\ln(V)) K}{V^3} \\ \frac{\partial^2 W_{v4}}{\partial J_3 \partial V} = 0.5 \frac{K}{V^2} \end{array} \right. \text{ et } \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 W_{v1}}{\partial (J_3)^2} = \frac{(-0.75 \ln(V)+0.25) K}{V^5} \\ \frac{\partial^2 W_{v2}}{\partial (J_3)^2} = -0.125 \frac{K}{V^3} \\ \frac{\partial^2 W_{v3}}{\partial (J_3)^2} = \frac{(0.25-0.5 \ln(V)) K}{V^4} \\ \frac{\partial^2 W_{v4}}{\partial (J_3)^2} = 0.25 \frac{K}{V^3} \end{array} \right. \quad (193)$$

## 9.1 Variations du potentiel de Mooney-Rivlin par rapport aux invariants $J_i$

Nous avons vu que les contraintes s'obtenaient à l'aide des variations du potentiel par rapport aux différents invariants retenus, ici  $I_3$ ,  $J_1$  et  $J_2$ . En dérivant le potentiel nous obtenons pour les termes non nulles :

$$\frac{\partial W_d}{\partial J_1} = C_{10}, \quad \frac{\partial W_d}{\partial J_2} = C_{01}, \quad \frac{\partial W_v}{\partial J_3} = \frac{K \cdot \log(V)}{2 \cdot V^3} = 0.5 \frac{K \cdot \log(\sqrt{I_3})}{2 \cdot I_3 \sqrt{I_3}} \quad (194)$$

ceci pour le potentiel volumique

$$W_{v1} = K \left( 1 - \frac{1 + \ln(\sqrt{I_3})}{\sqrt{I_3}} \right) = K \left( 1 - \frac{(1 + \log(V))}{V} \right)$$

Ces trois grandeurs constituent donc les termes du vecteur :  $(W_{,J_i})$ .

Lors du calcul de l'opérateur tangent, il est également nécessaire de disposer des variations secondes. Ici le seule terme non nul concerne la partie volumique du potentiel. Les dérivées secondes sont calculées en 193

En tenant compte de toutes les grandeurs (nulles et non nulles), elles peuvent se mettre sous forme des composantes d'une matrice :

$$[W_{,J_i J_j}] = \left[ \frac{\partial^2 W}{\partial J_i \partial J_j} \right] \quad (195)$$

Cette forme matricielle est intéressante dans le cas général, où la majorité des termes sont non-nulle.

## 9.2 Variations de la partie additionnelle de courbure par rapport aux invariants $J_i$

Rappelons que cette partie additionnelle s'écrit (174) :

$$W_{courbure} \stackrel{note}{=} W_c = \frac{1}{\sqrt{I_3}} \left( \left( \frac{(J_1 - 3)^{2r+1}}{a^{2r}} \right) \frac{1}{(2r + 1)} \right) \quad (196)$$

Cette partie dépend de  $J_1$  et  $I_3 = J_3$ , d'où les variations premières :

$$\begin{aligned}\frac{\partial W_c}{\partial J_1} &= \frac{1}{\sqrt{I_3}} \left( \frac{J_1 - 3}{a} \right)^{2r} \\ \frac{\partial W_c}{\partial J_3} &= -\frac{1}{2(I_3)^{3/2}} \left( \left( \frac{J_1 - 3}{a} \right)^{2r+1} \frac{1}{(2r+1)} \right)\end{aligned}\quad (197)$$

D'une manière analogue les variations secondes s'écrivent :

$$\begin{aligned}\frac{\partial W_c}{\partial J_1^2} &= \frac{1}{\sqrt{I_3}} \left( \frac{r (J_1 - 3)^{2r-1}}{a^{2r}} \right) \\ \frac{\partial W_c}{\partial J_1 \partial J_3} &= -\frac{1}{2(I_3)^{3/2}} \left( \frac{J_1 - 3}{a} \right)^{2r} \\ \frac{\partial W_c}{\partial J_3^2} &= \frac{3}{4 (I_3)^{5/2}} \left( \left( \frac{J_1 - 3}{a} \right)^{2r+1} \frac{1}{(2r+1)} \right)\end{aligned}\quad (198)$$

### 9.3 Variation des contraintes par rapport aux déformations

Rappelons que l'on a :  $\sigma^{ij} = \frac{\sqrt{g_0}}{\sqrt{g}} \frac{\partial W}{\partial \epsilon_{ij}}$ . A partir de cette expression on peut en déduire l'opérateur tangent.

$$\frac{\partial \sigma^{ij}}{\partial \epsilon_{kl}} = \frac{\partial W}{\partial \epsilon_{ij}} \frac{\partial \sqrt{g_0}/\sqrt{g}}{\partial \epsilon_{kl}} + \frac{\sqrt{g_0}}{\sqrt{g}} \frac{\partial^2 W}{\partial \epsilon_{ij} \partial \epsilon_{kl}} \quad (199)$$

Sous forme tensorielle :

$$\left( \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\epsilon}} \right)_{..} = \left( \frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{\epsilon}} \right)_{..} \otimes \left( \frac{\partial \sqrt{g_0}/\sqrt{g}}{\partial \boldsymbol{\epsilon}} \right)_{..} + \frac{\sqrt{g_0}}{\sqrt{g}} \left( \frac{\partial^2 W}{\partial \boldsymbol{\epsilon}^2} \right)_{..} \quad (200)$$

Concernant la variation de volume relative c'est-à-dire du terme  $V = \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{g_0}}$  nous avons la relation :

$$V = I_3^{1/2} \quad (201)$$

qui conduit à :

$$\frac{\partial V}{\partial \epsilon_{ij}} = \frac{1}{2\sqrt{I_3}} \frac{\partial I_3}{\partial \epsilon_{ij}} \quad (202)$$

Que l'on peut également exprimer sous forme tensorielle en utilisant la relation (212) :

$$(\mathbf{V}, \boldsymbol{\epsilon})_{..} = \frac{\partial V}{\partial \epsilon_{ij}} \hat{g}_i \otimes \hat{g}_j = I_3^{1/2} \mathbf{I} \quad (203)$$

On en déduit la variation de l'inverse de  $V$

$$(\mathbf{V}^{-1}, \boldsymbol{\epsilon})_{..} = \frac{\partial V^{-1}}{\partial \epsilon_{ij}} \hat{g}_i \otimes \hat{g}_j = -\frac{1}{I_3^{1/2}} \mathbf{I} \quad (204)$$

On peut également tenir compte de la valeur du tenseur des contraintes pour le calcul du premier terme :

$$\left(\frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{\epsilon}}\right) \otimes \left(\frac{\partial \sqrt{g_0}/\sqrt{g}}{\partial \boldsymbol{\epsilon}}\right) = I_3^{1/2} \cdot \boldsymbol{\sigma} \otimes \left(-\frac{1}{I_3^{1/2}} \mathbf{I}\right) = -\boldsymbol{\sigma} \otimes \mathbf{I} \quad (205)$$

Le second terme s'obtient à partir des expressions précédentes.

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \epsilon_{ij} \partial \epsilon_{kl}} = \frac{\partial \left( \frac{\partial W}{\partial J_1} \frac{\partial J_1}{\partial \epsilon_{ij}} + \frac{\partial W}{\partial J_2} \frac{\partial J_2}{\partial \epsilon_{ij}} + \frac{\partial W}{\partial I_3} \frac{\partial I_3}{\partial \epsilon_{ij}} \right)}{\partial \epsilon_{kl}} \quad (206)$$

Le calcul de cette expression fait intervenir la variation seconde du potentiel par rapport aux invariants, et les variations premières et secondes des invariants par rapport aux déformations :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 W}{\partial \epsilon_{ij} \partial \epsilon_{kl}} &= \frac{\partial^2 W}{\partial J_1 \partial \epsilon_{kl}} \frac{\partial J_1}{\partial \epsilon_{ij}} + \frac{\partial W}{\partial J_1} \frac{\partial^2 J_1}{\partial \epsilon_{ij} \partial \epsilon_{kl}} \\ &\quad + \frac{\partial^2 W}{\partial J_2 \partial \epsilon_{kl}} \frac{\partial J_2}{\partial \epsilon_{ij}} + \frac{\partial W}{\partial J_2} \frac{\partial^2 J_2}{\partial \epsilon_{ij} \partial \epsilon_{kl}} \\ &\quad + \frac{\partial^2 W}{\partial J_3 \partial \epsilon_{kl}} \frac{\partial J_3}{\partial \epsilon_{ij}} + \frac{\partial W}{\partial J_3} \frac{\partial^2 J_3}{\partial \epsilon_{ij} \partial \epsilon_{kl}} \\ &= \frac{\partial^2 W}{\partial J_r \partial J_s} \frac{\partial J_r}{\partial \epsilon_{ij}} \frac{\partial J_s}{\partial \epsilon_{kl}} + \frac{\partial W}{\partial J_r} \frac{\partial^2 J_r}{\partial \epsilon_{ij} \partial \epsilon_{kl}} \end{aligned} \quad (207)$$

Dans le cas du potentiel de Mooney-Rivlin, ces expressions peuvent se simplifier :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 W}{\partial \epsilon_{ij} \partial \epsilon_{kl}} &= \frac{\partial^2 W_d}{\partial J_\alpha \partial \epsilon_{kl}} \frac{\partial J_\alpha}{\partial \epsilon_{ij}} + \frac{\partial W_d}{\partial J_\alpha} \frac{\partial^2 J_\alpha}{\partial \epsilon_{ij} \partial \epsilon_{kl}} \\ &\quad + \frac{\partial^2 W_v}{\partial J_3 \partial \epsilon_{kl}} \frac{\partial J_3}{\partial \epsilon_{ij}} + \frac{\partial W_v}{\partial J_3} \frac{\partial^2 J_3}{\partial \epsilon_{ij} \partial \epsilon_{kl}} \\ &= \frac{\partial W_d}{\partial J_\alpha} \frac{\partial^2 J_\alpha}{\partial \epsilon_{ij} \partial \epsilon_{kl}} + \frac{\partial^2 W_v}{\partial J_3^2} \frac{\partial J_3}{\partial \epsilon_{ij}} \frac{\partial J_3}{\partial \epsilon_{kl}} + \frac{\partial W_v}{\partial J_3} \frac{\partial^2 J_3}{\partial \epsilon_{ij} \partial \epsilon_{kl}} \end{aligned} \quad (208)$$

Sous forme tensorielle on obtient des tenseurs du quatrième ordre.

$$(\mathbf{W}, \boldsymbol{\epsilon}^2)_{\dots} = \frac{\partial^2 W}{\partial \epsilon_{ij} \partial \epsilon_{kl}} \hat{g}_i \otimes \hat{g}_j \otimes \hat{g}_k \otimes \hat{g}_l \quad (209)$$

Avec ces notations nous obtenons la variation des contraintes sous forme tensorielle :

$$(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\epsilon})_{\dots} = -\boldsymbol{\sigma} \otimes \mathbf{I} + 1/V (\mathbf{W}, \boldsymbol{\epsilon}^2)_{\dots} \quad (210)$$

## 9.4 Variation des contraintes par rapport aux degrés de liberté

Dans le cadre d'une résolution par éléments finis à l'aide du logiciel Herezh++, nous utilisons directement la variation des composantes deux fois contravariantes de la contrainte par rapport aux degrés de liberté.

Il s'avère que toutes les grandeurs dépendent des degrés de libertés au travers des éléments de la métrique  $\hat{g}_{ij}$  ou  $\hat{g}^{ij}$  qui eux-mêmes dépendent sont considérés dépendant des composantes covariantes du tenseur de déformation d'Almansi. On peut donc écrire :

$$\frac{\partial \sigma^{ij}}{\partial d d l} = \frac{\partial \sigma^{ij}}{\partial \epsilon_{kl}} \frac{\partial \epsilon_{kl}}{\partial d d l} \quad (211)$$

## 9.5 Variation seconde des invariants par rapport aux déformations

Pour clore les calculs de l'opérateur tangent, il est nécessaire de connaître les variations secondes des invariants par rapport aux composantes des déformations d'Almansi. En partant des dérivées premières des  $I_i$  on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 I_1}{\partial \epsilon_{ij} \partial \epsilon_{kl}} = 0 \\ \frac{\partial^2 I_2}{\partial \epsilon_{ij} \partial \epsilon_{kl}} = 4 (g^{kl} g^{ij} - g^{ik} g^{jl}) \\ \frac{\partial^2 I_3}{\partial \epsilon_{ij} \partial \epsilon_{kl}} = -4 \frac{g}{g_0} (\hat{g}^{ik} \hat{g}^{jl}) + 2 \hat{g}^{ij} \frac{\partial I_3}{\partial \epsilon_{kl}} = -4 I_3 (\hat{g}^{ik} \hat{g}^{jl}) + 2 \frac{\partial I_3}{\partial \epsilon_{kl}} \hat{g}^{ij} \end{array} \right. \quad (212)$$

On utilise les notations introduites en annexe (15). En tenant compte de ces notations les relations (212) s'écrivent sous forme tensorielle :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left( \frac{\partial^2 I_1}{\partial \boldsymbol{\epsilon}^2} \right) \dots = \mathbf{0} \\ \left( \frac{\partial^2 I_2}{\partial \boldsymbol{\epsilon}^2} \right) \dots = 4 (\mathbf{B} \otimes \mathbf{B} - \mathbf{B} \bar{\otimes} \mathbf{B}) \\ \left( \frac{\partial^2 I_3}{\partial \boldsymbol{\epsilon}^2} \right) \dots = -4 I_3 \mathbf{I} \bar{\otimes} \mathbf{I} + 4 I_3 \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} = 4 I_3 (\mathbf{I} \otimes \mathbf{I} - \mathbf{I} \bar{\otimes} \mathbf{I}) \end{array} \right. \quad (213)$$

En tenant compte de (27) c'est-à-dire :

$$\frac{\partial \hat{g}^{rm}}{\partial \epsilon_{ij}} = -2 \hat{g}^{ri} \hat{g}^{mj} \quad (214)$$

On en déduit la variation seconde des invariants en  $J_s$  :

$$\frac{\partial^2 J_r}{\partial \epsilon_{ij} \partial \epsilon_{kl}} = \frac{\partial^2 J_r}{\partial I_s \partial I_r} \frac{\partial I_s}{\partial \epsilon_{ij}} \frac{\partial I_r}{\partial \epsilon_{kl}} + \frac{\partial J_r}{\partial I_s} \frac{\partial^2 I_s}{\partial \epsilon_{ij} \partial \epsilon_{kl}} \quad (215)$$

Pour ce faire il nous reste à déterminer la variation seconde des  $J_s$  par rapports aux invariants  $I_s$ . On part des expressions (181).

$$\begin{array}{cccccc} \frac{\partial^2 J_1}{\partial I_1^2} = 0 & \frac{\partial^2 J_1}{\partial I_1 \partial I_2} = 0 & \frac{\partial^2 J_1}{\partial I_1 \partial I_3} = \frac{-1}{3} I_3^{-4/3} & \frac{\partial^2 J_1}{\partial I_2 \partial I_1} = 0 & \frac{\partial^2 J_1}{\partial I_2^2} = 0 & \frac{\partial^2 J_1}{\partial I_2 \partial I_3} = 0 \\ \frac{\partial^2 J_2}{\partial I_1^2} = 0 & \frac{\partial^2 J_2}{\partial I_1 \partial I_2} = 0 & \frac{\partial^2 J_2}{\partial I_1 \partial I_3} = 0 & \frac{\partial^2 J_2}{\partial I_2 \partial I_1} = 0 & \frac{\partial^2 J_2}{\partial I_2^2} = 0 & \frac{\partial^2 J_2}{\partial I_2 \partial I_3} = \frac{-2}{3} I_3^{-5/3} \end{array} \quad (216)$$

et  $J_3 = I_3$

On obtient alors les expressions condensées suivantes :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 J_1}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}} &= \frac{\partial^2 J_1}{\partial I_1 \partial I_3} \left( \frac{\partial I_1}{\partial \varepsilon_{ij}} \frac{\partial I_3}{\partial \varepsilon_{kl}} \right) + \frac{\partial J_1}{\partial I_3} \frac{\partial^2 I_3}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}} \\ &= \frac{-1}{3} I_3^{-4/3} \left( 4 g^{ij} \cdot I_3 \hat{g}^{kl} \right) + \frac{\partial J_1}{\partial I_3} \left( -4 I_3 (\hat{g}^{ik} \hat{g}^{jl}) + 2 \frac{\partial I_3}{\partial \varepsilon_{kl}} \hat{g}^{ij} \right)\end{aligned}\quad (217)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 J_2}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}} &= \frac{\partial^2 J_2}{\partial I_2 \partial I_3} \left( \frac{\partial I_2}{\partial \varepsilon_{ij}} \frac{\partial I_3}{\partial \varepsilon_{kl}} \right) + \frac{\partial J_2}{\partial I_2} \frac{\partial^2 I_2}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}} + \frac{\partial J_2}{\partial I_3} \frac{\partial^2 I_3}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}} \\ &= \frac{-2}{3} I_3^{-5/3} \left( 2 \hat{g}_{rs} (g^{rs} g^{ij} - g^{ir} g^{js}) \cdot I_3 \hat{g}^{kl} \right) + \frac{\partial J_2}{\partial I_2} \left( 4 (g^{kl} g^{ij} - g^{ik} g^{jl}) \right) \\ &\quad + \frac{\partial J_2}{\partial I_3} \left( -4 I_3 (\hat{g}^{ik} \hat{g}^{jl}) + 2 \frac{\partial I_3}{\partial \varepsilon_{kl}} \hat{g}^{ij} \right)\end{aligned}\quad (218)$$

$$\frac{\partial^2 J_3}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}} = \frac{\partial^2 I_3}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}} = -4 I_3 (\hat{g}^{ik} \hat{g}^{jl}) + 2 \frac{\partial I_3}{\partial \varepsilon_{kl}} \hat{g}^{ij}\quad (219)$$

Ces expressions permettent le calcul directe des tenseurs du quatrième ordre.

Sous forme tensorielle :

$$\left( \frac{\partial^2 J_1}{\partial \varepsilon^2} \right)_{\dots} = \frac{-4}{3} I_3^{-1/3} (\mathbf{B} \otimes \mathbf{I} + I_1 (\mathbf{I} \otimes \mathbf{B} - \mathbf{B} \bar{\otimes} \mathbf{B}))\quad (220)$$

$$\left( \frac{\partial^2 J_2}{\partial \varepsilon^2} \right)_{\dots} = \frac{-4}{3} \left( 2 I_3^{-2/3} (\mathbf{I} \cdot \mathbf{B} - \mathbf{B} \cdot \mathbf{B}) + I_3^{-1/3} I_1 (\mathbf{I} \otimes \mathbf{B} - \mathbf{B} \bar{\otimes} \mathbf{B}) \right)\quad (221)$$

$$\left( \frac{\partial^2 J_3}{\partial \varepsilon^2} \right)_{\dots} = 4 I_3 (\mathbf{I} \otimes \mathbf{B} - \mathbf{B} \bar{\otimes} \mathbf{B})\quad (222)$$

## 9.6 Particularités entraînées par l'utilisation d'un repère orthonormé

La méthode retenue pour le calcul du tenseur de Cauchy conduit naturellement à l'exprimer dans le repère matériel entraîné. Dans certain cas, il peut être nécessaire d'utiliser un repère de travail orthonormé, par exemple dans le cas de l'utilisation d'un repère corotationnel. L'objectif est ici d'examiner les répercussions que cela entraîne sur la méthode précédemment exposée.

Tout d'abord notons qu'il n'existe pas de problème particulier relatif au type de dérivation temporelle pour le stricte calcul du tenseur des contraintes. Le tenseur des contraintes est obtenue par identification de la puissance volumique instantanée  $\sigma : \mathbf{D}$ , en tenant compte que le tenseur vitesse de déformation  $\mathbf{D}$  est une grandeur parfaitement définie on en déduit que le tenseur de Cauchy défini de cette manière est unique.

On suppose que l'objectif est d'effectuer les calculs dans un repère particulier de travail : le repère dit absolu, et que l'on évolue dans une cinématique principalement irrotationnelle.

Rappelons les relations de changement de repère pour des tenseurs du second ordre :

$$\vec{g}_i = \beta_i^a \vec{I}_a, \quad \vec{g}^i = \gamma_b^i \vec{I}^b, \quad A_{ij} \cdot \gamma_a^i \cdot \gamma_b^j = A_{ab}, \quad B^{ij} \cdot \beta_i^a \cdot \beta_j^b = B^{ab}\quad (223)$$

Nous avons ainsi directement :

$$\sigma^{ab} = \sigma^{ij} \cdot \hat{\beta}_i^a \cdot \hat{\beta}_j^b, \quad D_{ab} \cdot dt = d\epsilon_{ij} \cdot \hat{\gamma}_a^i \cdot \hat{\gamma}_b^j \text{ ou } dt \cdot D_{ab} \cdot \hat{\beta}_i^a \cdot \hat{\beta}_j^b = d\epsilon_{ij} = D_{ij} \cdot dt \quad (224)$$

Concernant l'opérateur tangent, les choses sont pour l'instant beaucoup moins claires!! Tout d'abord rappelons quelques expressions. Calculons la dérivées temporelles du tenseur des contraintes dans le repère de travail  $\mathcal{R}_T$  c'est-à-dire  $\{M, \vec{I}_a\}$  en fonction du repère naturel  $\mathcal{R}_s$  c'est-à-dire  $\{M, \vec{g}_i\}$ .

$$\left( \frac{d\sigma}{dt} \right)_{\mathcal{R}_T} = \left( \frac{d\sigma}{dt} \right)_{\mathcal{R}_s} + (\mathbf{D} \cdot \sigma + \sigma \cdot \mathbf{D}) - \sigma \cdot \mathbf{W} + \mathbf{W} \cdot \sigma \quad (225)$$

avec  $\mathbf{W}$  le tenseur rotation instantanée. Le temps étant considéré comme absolu (indépendant des bases) on a de manière équivalente

$$(d\sigma)_{\mathcal{R}_T} = (d\sigma)_{\mathcal{R}_s} + (\mathbf{D} \cdot \sigma + \sigma \cdot \mathbf{D})dt + (-\sigma \cdot \mathbf{W} + \mathbf{W} \cdot \sigma)dt \quad (226)$$

d'où en composantes :

$$d\sigma^{ab} = d\sigma^{ij} \beta_i^a \beta_j^b + (D_i k \sigma^{kj} \gamma_a^i \beta_j^b + \sigma^{ik} D_{kj} \beta_i^a \gamma_b^j)dt + (-\sigma^{ik} W_{kj} \beta_i^a \gamma_b^j + W_{ik} \sigma^{kj} \gamma_a^i \beta_j^b)dt \quad (227)$$

Examinons les trois termes du membres de droite.

Nous avons vu que  $\sigma^{ij}$  dépendait uniquement des coordonnées  $\epsilon_{kl}$ , on peut donc écrire :

$$d\sigma^{ij} = \frac{\partial \sigma^{ij}}{\partial \epsilon_{kl}} d\epsilon_{kl} = \left( \frac{\partial \sigma^{ij}}{\partial \epsilon_{kl}} \beta_k^e \beta_l^f \right) (D_{kl} \gamma_e^k \gamma_f^l) dt \quad (228)$$

Les variations des composantes  $\sigma^{ij}$  par rapport aux composantes  $\epsilon_{kl}$  ont déjà été calculées dans le cadre général. On obtient ainsi le premier terme de l'opérateur tangent avec finalement simplement un changement de base de l'opérateur tangent local (dans la base naturelle) :

$$d\sigma^{ab} = \left( \frac{\partial \sigma^{ij}}{\partial \epsilon_{kl}} \beta_i^a \beta_j^b \beta_k^e \beta_l^f \right) (D_{kl} \gamma_e^k \gamma_f^l) dt = T_{(1)}^{abef} D_{ef} dt \quad (229)$$

Le second terme correspond à l'implication de la déformation sur le repère naturel.

$$(D_i k \sigma^{kj} \gamma_a^i \beta_j^b + \sigma^{ik} D_{kj} \beta_i^a \gamma_b^j) dt = [(\sigma^{kj} \gamma_a^i \beta_j^b + \sigma^{jk} \beta_j^a \gamma_b^i) \beta_k^e \beta_i^f] (D_{ki} \gamma_e^k \gamma_f^i) dt \quad (230)$$

en notant :  $\sigma^{ab} = \sigma^{ij} \beta_i^a \beta_j^b$ , les composantes de  $\sigma$  dans le repère de travail on obtient le deuxième terme de l'opérateur tangent :

$$(D_i k \sigma^{kj} \gamma_a^i \beta_j^b + \sigma^{ik} D_{kj} \beta_i^a \gamma_b^j) dt = (\sigma^{be} \delta_a^f + \sigma^{ae} \delta_b^f) D_{ef} dt = T_{(2)}^{abef} D_{ef} dt \quad (231)$$

Le troisième terme correspond à l'implication de la rotation sur le repère naturel. Ce terme ne peut pas (a priori) s'exprimer sous une forme simple d'opérateur tangent similaire deux premiers termes, car en fait il doit être indépendant de la déformation! Cependant plusieurs remarques peuvent-être faites :

- Le tenseur résultant est anti-symétrique. Dans le cadre du calcul d'un opérateur tangent, pour lequel on ne souhaite garder que la partie symétrique, cette contribution n'est donc pas à prendre en compte.
- Au final, l'objectif est le calcul de la variation de la contrainte par rapport aux degrés de libertés dans la base de travail. L'influence du troisième terme doit alors être intégré directement au niveau du calcul final et non en terme d'opérateur tangent en fonction de la déformation, par exemple sous la forme :

$$\frac{\partial \sigma^{ab}}{\partial ddl} = (T_{(1)}^{abef} + T_{(2)}^{abef}) \frac{\partial \epsilon_{ef}}{\partial ddl} d ddl + (-\sigma^{ae} H_{eb(ddl)} + H_{ae(ddl)} \sigma^{eb}) d ddl \quad (232)$$

avec d'une part la notation abusive :  $d\epsilon_{ef} = \epsilon_{ij} \gamma_e^i \gamma_f^j = D_{ab} dt$  qui représente la variation de la déformation, exprimé dans le repère de travail (grandeur différente de la variation de l'expression dans le repère de travail de la déformation!!). Et d'autre part :  $H_{ae(ddl)} d ddl = W_{kj} \gamma_a^j \gamma_e^k dt$ , et les composantes  $H_{ae(ddl)}$  devant être directement identifiées à partir du calcul de l'opérateur gradient de vitesse et de la discrétisation retenue.

Huitième partie

**Autres Potentiels utilisant**

**également les invariants  $(J_1, J_2, J_3)$**

## 10 Potentiel de HartSmith

Le potentiel est défini par l'expression suivante :

$$W_{Hart\_Smith} = C_1 \int_3^{J_1(finale)} \exp[C_3 (J_1 - 3)^2] dJ_1 + C_2 \log\left(\frac{J_2}{3}\right) + \left( K \left[ 1 - \frac{1 + \ln(\sqrt{I_3})}{\sqrt{I_3}} \right] \right) \quad (233)$$

où les quatres coefficients matériaux sont  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  et  $K$ . Comme pour le potentiel de Mooney-Rivlin, le potentiel de HartSmith est défini à partir des élongations, eux même calculées à partir du tenseur de Cauchy-Green droit :  $\mathbf{C} = {}^t_{0..}\mathbf{G} = \hat{g}_{ij} \vec{g}^i \otimes \vec{g}^j$ .

On observe que le potentiel est composé d'une partie relative au changement de forme et une partie relative au changement de volume. Cette dernière peut-être choisit parmi les quatre cas proposés lors de la présentation du modèle de Mooney-Rivlin (234) :

$$\begin{aligned} W_{v1} &= K \left[ 1 - \frac{1 + \ln(\sqrt{I_3})}{\sqrt{I_3}} \right] = K \left[ 1 - \frac{1 + \ln(V)}{V} \right] \\ W_{v2} &= \frac{K}{2} (V - 1) \\ W_{v3} &= \frac{K}{2} (\log(V))^2 \\ W_{v4} &= \frac{K}{2} (V - 1)^2 \end{aligned} \quad (234)$$

Toujours d'une manière similaire au cas de Mooney-Rivlin (174), il est également possible d'adjoindre au potentiel une partie permettant de prendre en compte un raidissement à partir d'une certaine élongation.

Ce raidissement est ainsi obtenue à l'aide du potentiel additionnel proposé par Moreau-Rio-Thuillier selon :

$$W_{courbure} = \frac{1}{\sqrt{I_3}} \left( (J_1 - 3) \left( \frac{J_1 - 3}{a} \right)^{2r} \frac{1}{(2r + 1)} \right) \quad (235)$$

Le potentiel additionnel dépend de deux paramètres :  $a$  qui positionne le départ de la branche finale, et  $r$  qui pilote la courbure pour le passage sur la dernière branche.

On pourra se reporter au mémoire de thèse de Cécile Moreau, pour plus d'informations.

## 11 Extension à une forme polynomiale de potentiel, fonction des invariants $(J_1, J_2, J_3)$

La forme polynomiale correspond à une généralisation de la forme de Mooney-Rivlin.

A partir des invariants  $(J_1, J_2, J_3)$  (171) introduits dans le cadre du potentiel Mooney-Rivlin on définit une forme polynomiale de la partie déviatorique sous la forme :

$$W_{polynomiale} = \sum_{i+j=1}^n (C_{ij} (J_1 - 3)^i (J_2 - 3)^j) + \left( K \left[ 1 - \frac{1 + \ln(\sqrt{I_3})}{\sqrt{I_3}} \right] \right) \quad (236)$$

où les coefficients matériaux sont  $C_{ij}$ , et  $K$ . Comme pour le potentiel de Mooney-Rivlin, le potentiel de HartSmith est défini à partir des élongations, eux même calculées à partir du tenseur de Cauchy-Green droit :  $\mathbf{C} = {}^t_{0..} \mathbf{G} = \hat{g}_{ij} \vec{g}^i \otimes \vec{g}^j$ .

On observe que le potentiel, comme dans le cas de Mooney-Rivlin 3D, est composé d'une partie relative au changement de forme et une partie relative au changement de volume. Il est possible de changer la partie relative au changement de volume d'une manière identique au cas de la loi de Mooney-Rivlin, on s'y référera pour plus de détails (234).

Neuvième partie

# Cas de potentiels utilisant les invariants de HENCKY

## 12 Cas de potentiels utilisant les invariants de HENCKY

La mesure de HENCKY est intéressante pour les points suivants :

- la trace du tenseur de déformation est directement reliée à la seule variation de volume :  $trace(\mathbf{e}) = \mathbf{I}_e = \ln(\mathbf{V})$
- compte tenu du point précédent, le déviateur des déformations est totalement découplé de la variation de volume, il ne traduit que la variation de forme
- en traction-compression, il n'y a pas de limitation de la déformation comparée aux cas des mesures de ALMANSI et GREEN-LAGRANGE, elle tend respectivement vers - et + l'infinie.

Il est donc intéressant de pouvoir utiliser cette mesure pour définir un potentiel hyperélastique. Cependant le repère naturel de la mesure, dit repère logarithmique (ou en rotation logarithmique), doit-être utilisé pour effectuer la dérivation temporelle afin d'obtenir la vitesse de déformation, c'est-à-dire la relation :

$$\frac{de_{ij}}{dt} = D_{ij} \quad (237)$$

n'est correcte que si les coordonnées du tenseur  $e_{ij}$  sont exprimées dans le repère logarithmique. Dans ce cas seulement on aura par identification :

$$\sigma^{ij} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial(\omega\sqrt{g})}{\partial e_{ij}} \quad (238)$$

Or le calcul du repère est possible, mais difficile. En particulier au niveau numérique il faut tenir compte de cas particuliers (voir thèse UBS de Vincent Mora : 2004).

Cependant dans le cas de potentiels isotropes, en fait seuls les invariants de la déformation sont utiles, aussi l'idée est de suivre la démarche suivante.

1. Expression du potentiel en fonction de la déformation de HENCKY :

$$\omega = \omega(I_e, \bar{I}I_e, \bar{I}\bar{I}I_e) \quad (239)$$

2. calcul de la contrainte via les composantes de la déformation d'ALMANSI,  $\epsilon_{ij}$  :

$$\sigma^{ij} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial(\omega\sqrt{g})}{\partial \epsilon_{ij}} = \frac{1}{\sqrt{g}} \times \frac{\partial(\omega\sqrt{g})}{\partial invariants\ de\ e} \times \frac{\partial invariants\ de\ e}{\partial invariants\ de\ \epsilon} \times \frac{\partial invariants\ de\ \epsilon}{\partial \epsilon_{ij}} \quad (240)$$

Reste donc à exprimer la relation entre des deux types d'invariants : HENCKY et ALMANSI.

De plus dans le cas d'une résolution implicite classique d'un problème d'équilibre par éléments finis, il nous faudra également la variation des contraintes par rapport aux déformations ce qui nécessitera la connaissance de la variation seconde des invariants de HENCKY par rapport aux invariants d'ALMANSI.

D'une manière pratique et parce que cela entraîne des développements plus simples, nous utiliserons les invariants du tenseur de CAUCHY-GREEN gauche  $\mathbf{B}$  (cf. 9) à la place des invariants du tenseur d'ALMANSI. Par contre c'est bien les variations du potentiel par rapport aux déformations d'ALMANSI qui seront calculées au final.

La suite du document propose une méthode de calcul de ces différentes grandeurs.

## 12.1 Variation première entre les invariants de HENCKY et de CAUCHY-GREEN gauche

On propose d'accéder aux invariants de HENCKY via ses valeurs propres. Le repère principale de HENCKY est identique à celui d'ALMANSI. Dans ce repère nous avons la relation :

$$e_{ii} = \ln(\lambda_i) \text{ et } \epsilon_{ii} = 0.5 \left( 1 - \frac{1}{(\lambda_i)^2} \right) \quad (241)$$

En fait pour faciliter les calculs nous utilisons comme grandeur intermédiaire la mesure du tenseur de CAUCHY-GREEN gauche  $\mathbf{B} = {}_0^t \mathbf{G} = g^{ij} \hat{g}_i \otimes \hat{g}_j$  (cf. 167) . Le repère principal de  $\mathbf{B}$  est également identique à celui de HENCKY et l'on a dans ce repère :

$$B_{ii} = (\lambda_i)^2 \quad (242)$$

qui constitue une relation plus simple que celle avec les composantes d'ALMANSI. Par la suite nous utiliserons les relations entre les invariants de  $\mathbf{B}$  et les composantes du tenseurs d'ALMANSI déjà déterminées au chapitre (9).

À partir des relations (168),

$$\begin{cases} I_B = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 \\ II_B = \lambda_1^2 \cdot \lambda_2^2 + \lambda_2^2 \cdot \lambda_3^2 + \lambda_3^2 \cdot \lambda_1^2 \\ III_B = \lambda_1^2 \cdot \lambda_2^2 \cdot \lambda_3^2 \end{cases} \quad (243)$$

nous calculons les différentielles totales par rapport aux  $\lambda_i$  :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} d(I_B) \\ d(II_B) \\ d(III_B) \end{pmatrix} &= 2 \times \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \lambda_1(\lambda_2^2 + \lambda_3^2) & \lambda_2(\lambda_1^2 + \lambda_3^2) & \lambda_3(\lambda_1^2 + \lambda_2^2) \\ \lambda_1 \cdot \lambda_2^2 \cdot \lambda_3^2 & \lambda_1^2 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3^2 & \lambda_1^2 \cdot \lambda_2^2 \cdot \lambda_3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} d\lambda_1 \\ d\lambda_2 \\ d\lambda_3 \end{pmatrix} \\ &= [d\dot{I}_B/d\lambda_i](d\lambda_i) \end{aligned} \quad (244)$$

Concernant les invariants de la déformation de HENCKY, nous retenons le jeux :  $(I_e, \bar{I}\bar{I}_e, \bar{I}\bar{I}\bar{I}_e)$ . Dans le repère principal :

$$\begin{cases} I_e = \ln(\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3) \\ \bar{I}\bar{I}_e = \frac{1}{2} [(\ln(\lambda_1))^2 + (\ln(\lambda_2))^2 + (\ln(\lambda_3))^2] \\ \bar{I}\bar{I}\bar{I}_e = \frac{1}{3} [(\ln(\lambda_1))^3 + (\ln(\lambda_2))^3 + (\ln(\lambda_3))^3] \end{cases} \quad (245)$$

d'où les différentielles totales par rapport aux  $\lambda_i$  :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} d(I_e) \\ d(\bar{I}\bar{I}_e) \\ d(\bar{I}\bar{I}\bar{I}_e) \end{pmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{1}{\lambda_1} & \frac{1}{\lambda_2} & \frac{1}{\lambda_3} \\ \frac{\ln(\lambda_1)}{\lambda_1} & \frac{\ln(\lambda_2)}{\lambda_2} & \frac{\ln(\lambda_3)}{\lambda_3} \\ \frac{[\ln(\lambda_1)]^2}{\lambda_1} & \frac{[\ln(\lambda_2)]^2}{\lambda_2} & \frac{[\ln(\lambda_3)]^2}{\lambda_3} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} d\lambda_1 \\ d\lambda_2 \\ d\lambda_3 \end{pmatrix} \\ &= [d\dot{I}_e/d\lambda_i](d\lambda_i) \end{aligned} \quad (246)$$

En inversant le premier système (en supposant que c'est possible) on peut écrire :

$$[d\dot{I}_e/d\dot{I}_B] = [d\dot{I}_e/d\lambda_i] [d\dot{I}_B/d\lambda_i]^{-1} \quad (247)$$

L'inversion du premier système, calculée via le logiciel de calcul formel "yacas" s'écrit :

$$[d\dot{I}_B/d\lambda_i]^{-1} = 0.5 \times \begin{pmatrix} \frac{\lambda_1^3(\lambda_2^2-\lambda_3^2)}{A_{11}} & \frac{\lambda_1(\lambda_3^2-\lambda_2^2)}{A_{12}} & \frac{\lambda_2^2-\lambda_3^2}{A_{13}} \\ \frac{\lambda_2^3(\lambda_3^2-\lambda_1^2)}{A_{21}} & \frac{\lambda_2(\lambda_1^2-\lambda_3^2)}{A_{22}} & \frac{\lambda_3^2-\lambda_1^2}{A_{23}} \\ \frac{\lambda_3^3(\lambda_1^2-\lambda_2^2)}{A_{31}} & \frac{\lambda_3(\lambda_2^2-\lambda_1^2)}{A_{32}} & \frac{\lambda_1^2-\lambda_2^2}{A_{33}} \end{pmatrix} \quad (248)$$

avec :

$$\begin{aligned} A_{11} &= \lambda_2^4\lambda_3^2 - \lambda_2^4\lambda_1^2 + \lambda_2^2\lambda_1^4 - \lambda_2^2\lambda_3^4 + \lambda_1^2\lambda_3^4 - \lambda_1^4\lambda_3^2 \\ A_{12} &= \lambda_3^4\lambda_1^2 - \lambda_3^4\lambda_2^2 + \lambda_3^2\lambda_2^4 - \lambda_3^2\lambda_1^4 + \lambda_1^4\lambda_2^2 - \lambda_1^2\lambda_2^4 \\ A_{13} &= (\lambda_2^4\lambda_3^2 - \lambda_2^4\lambda_1^2 + \lambda_2^2\lambda_1^4 - \lambda_2^2\lambda_3^4 + \lambda_3^4\lambda_1^2 - \lambda_3^2\lambda_1^4) \lambda_1 \\ A_{21} &= \lambda_3^4\lambda_1^2 - \lambda_3^4\lambda_2^2 + \lambda_3^2\lambda_2^4 - \lambda_3^2\lambda_1^4 + \lambda_1^4\lambda_2^2 - \lambda_1^2\lambda_2^4 \\ A_{22} &= \lambda_1^4\lambda_2^2 - \lambda_1^4\lambda_3^2 + \lambda_1^2\lambda_3^4 - \lambda_1^2\lambda_2^4 + \lambda_2^2\lambda_3^2 - \lambda_2^2\lambda_3^4 \\ A_{23} &= (\lambda_3^4\lambda_1^2 - \lambda_3^4\lambda_2^2 + \lambda_3^2\lambda_2^4 - \lambda_3^2\lambda_1^4 + \lambda_1^4\lambda_2^2 - \lambda_1^2\lambda_2^4) \lambda_2 \\ A_{31} &= \lambda_1^4\lambda_2^2 - \lambda_1^4\lambda_3^2 + \lambda_1^2\lambda_3^4 - \lambda_1^2\lambda_2^4 + \lambda_2^2\lambda_3^2 - \lambda_2^2\lambda_3^4 \\ A_{32} &= \lambda_2^4\lambda_3^2 - \lambda_2^4\lambda_1^2 + \lambda_2^2\lambda_1^4 - \lambda_2^2\lambda_3^4 + \lambda_1^2\lambda_3^4 - \lambda_1^4\lambda_3^2 \\ A_{33} &= (\lambda_1^4\lambda_2^2 - \lambda_1^4\lambda_3^2 + \lambda_1^2\lambda_3^4 - \lambda_1^2\lambda_2^4 + \lambda_2^2\lambda_3^2 - \lambda_2^2\lambda_3^4) \lambda_3 \end{aligned} \quad (249)$$

et  $C$  le déterminant du système :

$$C = \lambda_1^5\lambda_2^3\lambda_3 - \lambda_1^5\lambda_2\lambda_3^3 + \lambda_1^3\lambda_2\lambda_3^5 - \lambda_1^3\lambda_2^5\lambda_3 + \lambda_1\lambda_2^5\lambda_3^3 - \lambda_1\lambda_2^3\lambda_3^5 \quad (250)$$

L'expression (247) n'est pertinente que si les trois valeurs propres sont distinctes. En effet, outre le fait que dans ce cas le système est inversible, cela signifie qu'il y a trois invariants distincts. Dans les autres cas : deux ou 3 valeurs propres identiques, il faudrait faire un choix sur le nombre d'invariants indépendants à retenir. Or une restriction de ce type n'est pas acceptable dans la pratique.

Par exemple, supposons que l'on ait un tenseur sphérique, donc avec 3 valeurs propres identiques. Cela signifie que le potentiel de dépendra que de la variation de volume. Néanmoins il nous faut connaître les variations premières et surtout secondes du potentiel par rapport aux invariants du déviateur de manière à définir la raideur du matériau par rapport au développement d'un cisaillement. Ceci ne sera pas possible si on se restreint aux cas des tenseurs sphériques !

En résumé, si 2 ou 3 valeurs propres sont identiques, le déterminant du système est nul, et le système n'est pas inversible. Cela traduit tout simplement que quelque soit le choix d'invariants retenus, ils ne sont plus indépendants.

De manière à pouvoir toujours calculer une sensibilité au changement de forme, nous proposons alors de calculer la relation (247) pour une déformation légèrement différente, comportant 3 valeurs propres distinctes.

Pour être plus précis l'idée est de faire une approximation linéaire près du point de fonctionnement.

**Cas d'un tenseur sphérique :** Prenons le cas d'un tenseur sphérique de valeur propre  $\lambda$ . On introduit trois perturbations arbitraires différentes  $\delta_i$  ce qui conduit aux trois nouvelles valeurs propres :  $\lambda \implies \lambda (1 + \delta_i)$  Les composantes de  $\mathbf{e}$  modifiées sont alors :

$$[e'] = \begin{bmatrix} \ln(\lambda (1 + \delta_1)) & 0 & 0 \\ 0 & \ln(\lambda (1 + \delta_2)) & 0 \\ 0 & 0 & \ln(\lambda (1 + \delta_3)) \end{bmatrix} \quad (251)$$

On considère également le tenseur associé  $\mathbf{e}''$

$$[e''] = \begin{bmatrix} \ln(\lambda (1 - \delta_1)) & 0 & 0 \\ 0 & \ln(\lambda (1 - \delta_2)) & 0 \\ 0 & 0 & \ln(\lambda (1 - \delta_3)) \end{bmatrix} \quad (252)$$

On peut noter que :  $\mathbf{e} = 0.5(\mathbf{e}' + \mathbf{e}'')$

Pour les deux tenseurs :  $\mathbf{e}'$  et  $\mathbf{e}''$ , il est possible de calculer l'opérateur inverse :  $[d\dot{I}_B/d\lambda_i]^{-1}$  d'où le calcul de l'approximation finale :

$$[d\dot{I}_B/d\lambda_i]^{-1}(\mathbf{e}) = 0.5 \left( [d\dot{I}_B/d\lambda_i]^{-1}(\mathbf{e}') + [d\dot{I}_B/d\lambda_i]^{-1}(\mathbf{e}'') \right) \quad (253)$$

En tenant compte de cette expression :

$$[d\dot{I}_e/d\dot{I}_B] = 0.5 [d\dot{I}_e/d\lambda_i] \left( [d\dot{I}_B/d\lambda_i]^{-1}(\mathbf{e}') + [d\dot{I}_B/d\lambda_i]^{-1}(\mathbf{e}'') \right) \quad (254)$$

Pour essayer d'appréhender l'impact de ce type d'approche, on utilise quelques applications numériques. On se place dans le cas d'un tenseur sphérique et on calcule numériquement la matrice  $[d\dot{I}_e/d\dot{I}_B]$  pour un choix de valeur  $\delta_i$ . On calcule ensuite la valeur de la variation des invariants de  $\mathbf{B}$  puis celle de  $\mathbf{e}$  et on compare.

Premier exemple :  $\lambda = 1. + 1. 10^{-3}$  et  $\delta\lambda = 0.0001$  pour le calcul de  $\delta\dot{I}_B$

cas :  $\delta_1 = 0.001$ ,  $\delta_2 = 0.002$ ,  $\delta_3 = 0.003$  on obtient :

$$[d\dot{I}_e/d\dot{I}_B](\delta\dot{I}_B) = (0.2996624907e - 3, 0.301008437826e - 6, 0.299363055883e - 9)$$

et pour  $(\delta\dot{I}_e)$  calculées directement à partir de  $\delta\lambda$  :

$$(\delta\dot{I}_e) = (0.2997153e - 3, 0.2845939887e - 6, 0.2704848706e - 9)$$

Autre cas :  $\lambda = 1. + 1. 10^{-2}$  et  $\delta\lambda = 0.001$

$$[d\dot{I}_e/d\dot{I}_B](\delta\dot{I}_B) = (0.2965958769e - 2, 0.291039651697e - 4, 0.293657000507e - 6)$$

et pour  $(\delta\dot{I}_e)$  calculées directement à partir de  $\delta\lambda$  :

$$(\delta\dot{I}_e) = (0.29717685e - 2, 0.2809817859e - 4, 0.2659123027e - 6)$$

Puis maintenant  $\delta_1 = 0.01$ ,  $\delta_2 = 0.02$ ,  $\delta_3 = 0.03$

$$[d\dot{I}_e/d\dot{I}_B](\delta\dot{I}_B) = (0.29727026227e - 2, 0.295793747633e - 4, 0.294324566709e - 6)$$

et pour  $(\delta\dot{I}_e)$  calculées directement à partir de  $\delta\lambda$  :

$$(\delta\dot{I}_e) = (0.29717685e - 2, 0.2809817859e - 4, 0.2659123027e - 6)$$

**Remarque :** De manière pratique, le terme le plus important est la trace c'est-à-dire le premier terme, les deux autres termes servent pour le calcul de la partie déviatoire qui n'est pas prise en compte pour la contrainte dans le cas des potentiels AMF. On remarque que c'est le terme le mieux par la formule proposée.

**Cas d'un tenseur avec deux valeurs propres identiques :** Prenons le cas d'un tenseur de valeur propres  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_2$ . On introduit deux perturbations arbitraires différentes  $\delta_\alpha$  ce qui conduit aux trois nouvelles valeurs propres :  $\lambda_1, \lambda_2 (1 + \delta_1), \lambda_2 (1 + \delta_2)$  Les composantes de  $\mathbf{e}$  modifiées sont alors :

$$[\mathbf{e}'] = \begin{bmatrix} \ln(\lambda_1) & 0 & 0 \\ 0 & \ln(\lambda_2 (1 + \delta_1)) & 0 \\ 0 & 0 & \ln(\lambda_2 (1 + \delta_2)) \end{bmatrix} \quad (255)$$

On considère également le tenseur associé  $\mathbf{e}''$

$$[\mathbf{e}''] = \begin{bmatrix} \ln(\lambda_1) & 0 & 0 \\ 0 & \ln(\lambda_1 (1 - \delta_1)) & 0 \\ 0 & 0 & \ln(\lambda_2 (1 - \delta_2)) \end{bmatrix} \quad (256)$$

Comme pour le cas du tenseur sphérique, on peut noter que :  $\mathbf{e} = 0.5(\mathbf{e}' + \mathbf{e}'')$

Pour les deux tenseurs :  $\mathbf{e}'$  et  $\mathbf{e}''$ , il est possible de calculer l'opérateur inverse :  $[d\dot{I}_B/d\lambda_i]^{-1}$  d'où le calcul de l'approximation finale :

$$[d\dot{I}_B/d\lambda_i]^{-1}(\mathbf{e}) = 0.5 \left( [d\dot{I}_B/d\lambda_i]^{-1}(\mathbf{e}') + [d\dot{I}_B/d\lambda_i]^{-1}(\mathbf{e}'') \right) \quad (257)$$

En tenant compte de cette expression :

$$[d\dot{I}_e/d\dot{I}_B] = 0.5 [d\dot{I}_e/d\lambda_i] \left( [d\dot{I}_B/d\lambda_i]^{-1}(\mathbf{e}') + [d\dot{I}_B/d\lambda_i]^{-1}(\mathbf{e}'') \right) \quad (258)$$

**Applications numériques** On choisit :  $\lambda_1 = 1.$ ,  $\delta\lambda_1 = -0.000001$  pour la vérification,  $\lambda_2 = \lambda_3 = 2.$ ,  $\delta\lambda_2 = 0.001$  et  $\delta\lambda_3 = 0.002$  pour le calcul de l'opérateur tangent et  $\delta\lambda_2 = -0.015$  pour la vérification On obtient alors :

$$[d\dot{I}_e/d\dot{I}_B](\delta\dot{I}_B) = (0.1489770648e - 1, 0.1031964503e - 1, 0.7153032859e - 2)$$

et pour  $(\delta\dot{I}_e)$  calculées directement à partir de  $\delta\lambda$  :

$$(\delta\dot{I}_e) = (0.15066533e - 1, 0.1037971855e - 1, 0.7155673057e - 2)$$

Ici toutes les grandeurs sont bien approchées et d'un ordre de grandeur comparable.

## 12.2 Variation seconde entre les invariants de HENCKY et de CAUCHY-GREEN gauche

On se place tout d'abord dans le cas où les trois valeurs propres sont distinctes. On part de l'expression (247) :

$$[d\dot{I}_e/d\dot{I}_B] = [d\dot{I}_e/d\lambda_i] [d\dot{I}_B/d\lambda_i]^{-1} \quad (259)$$

dont on cherche la variation seconde :

$$\begin{aligned} \left[ \frac{\partial^2 \dot{I}_e}{\partial \dot{I}'_B \partial \dot{I}_B} \right] &= \left\{ \left[ \frac{\partial^2 \dot{I}_e}{\partial \lambda_i \partial \lambda_j} \right] \left[ \frac{\partial \dot{I}_B}{\partial \lambda_i} \right]^{-1} + \left[ \frac{\partial \dot{I}_e}{\partial \lambda_i} \right] \frac{\partial}{\partial \lambda_j} \left[ \frac{\partial \dot{I}_B}{\partial \lambda_i} \right]^{-1} \right\} \frac{\partial \lambda_j}{\partial \dot{I}'_B} \\ &= \left\{ \left[ \frac{\partial^2 \dot{I}_e}{\partial \lambda_i \partial \lambda_j} \right] \left[ \frac{\partial \dot{I}_B}{\partial \lambda_i} \right]^{-1} + \left[ \frac{\partial \dot{I}_e}{\partial \lambda_i} \right] \frac{\partial}{\partial \lambda_j} \left[ \frac{\partial \dot{I}_B}{\partial \lambda_i} \right]^{-1} \right\} \left[ \frac{\partial \dot{I}'_B}{\partial \lambda_j} \right]^{-1} \end{aligned} \quad (260)$$

$\dot{I}'_B$  et  $\dot{I}_B$  décrivant chacun les trois invariants de  $\mathbf{B}$  donnés par (243).

Par rapport à la variation première, deux nouveaux termes apparaissent :  $\left[ \frac{\partial^2 \dot{I}_e}{\partial \lambda_i \partial \lambda_j} \right]$  et  $\frac{\partial}{\partial \lambda_j} \left[ \frac{\partial \dot{I}_B}{\partial \lambda_i} \right]^{-1}$ .

Le premier terme se calcule directement à partir de (246) :

$$\begin{aligned} \left[ \frac{\partial^2 \dot{I}_e}{\partial \lambda_1 \partial \lambda_i} \right] &= \frac{\partial}{\partial \lambda_1} \begin{bmatrix} \frac{1}{\lambda_1} & \frac{1}{\lambda_2} & \frac{1}{\lambda_3} \\ \frac{\ln(\lambda_1)}{\lambda_1} & \frac{\ln(\lambda_2)}{\lambda_2} & \frac{\ln(\lambda_3)}{\lambda_3} \\ \frac{\lambda_1}{[\ln(\lambda_1)]^2} & \frac{\lambda_2}{[\ln(\lambda_2)]^2} & \frac{\lambda_3}{[\ln(\lambda_3)]^2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{-1}{(\lambda_1)^2} & 0 & 0 \\ \frac{1 - \ln(\lambda_1)}{(\lambda_1)^2} & 0 & 0 \\ \frac{\ln(\lambda_1)[2 - \ln(\lambda_1)]}{(\lambda_1)^2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (261)$$

Dans le cas de la variation par rapport à la deuxième valeur propre  $\lambda_2$ , on obtient le même type de relation avec seulement la seconde colonne non nulle, et idem pour la troisième valeur propre. Il est donc possible de stocker les trois dérivées dans une même matrice.

Le second terme  $\frac{\partial}{\partial \lambda_j} \left[ \frac{\partial \dot{I}_B}{\partial \lambda_i} \right]^{-1}$  peut se calculer de plusieurs manières. La dérivation directe de l'expression (248) est une première possibilité. Une autre solution est d'utiliser le fait que l'on ait :

$$\left[ \frac{\partial \dot{I}_B}{\partial \lambda_i} \right] \times \left[ \frac{\partial \dot{I}_B}{\partial \lambda_i} \right]^{-1} = [Id] \quad (262)$$

d'où :

$$\frac{\partial}{\partial \lambda_j} \left[ \frac{\partial \dot{I}_B}{\partial \lambda_i} \right] \times \left[ \frac{\partial \dot{I}_B}{\partial \lambda_i} \right]^{-1} + \left[ \frac{\partial \dot{I}_B}{\partial \lambda_i} \right] \times \frac{\partial}{\partial \lambda_j} \left[ \frac{\partial \dot{I}_B}{\partial \lambda_i} \right]^{-1} = 0 \quad (263)$$

ce qui conduit à :

$$\frac{\partial}{\partial \lambda_j} \left[ \frac{\partial \dot{I}_B}{\partial \lambda_i} \right]^{-1} = - \left[ \frac{\partial \dot{I}_B}{\partial \lambda_i} \right]^{-1} \times \frac{\partial}{\partial \lambda_j} \left[ \frac{\partial \dot{I}_B}{\partial \lambda_i} \right] \times \left[ \frac{\partial \dot{I}_B}{\partial \lambda_i} \right]^{-1} ; \quad j = 1..3 \quad (264)$$

Dans cette expression,  $\left[ \frac{\partial \dot{I}_B}{\partial \lambda_i} \right]^{-1}$  est déjà connue, il nous reste à calculer  $\frac{\partial}{\partial \lambda_j} \left[ \frac{\partial \dot{I}_B}{\partial \lambda_i} \right]$  :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \lambda_1} \left[ \frac{\partial \dot{I}_B}{\partial \lambda_i} \right] &= 2 \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ (\lambda_2^2 + \lambda_3^2) & 2 \lambda_2 \cdot \lambda_1 & 2 \lambda_3 \cdot \lambda_1 \\ \lambda_2^2 \cdot \lambda_3^2 & 2 \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3^2 & 2 \lambda_1 \cdot \lambda_2^2 \cdot \lambda_3 \end{bmatrix} \\ \frac{\partial}{\partial \lambda_2} \left[ \frac{\partial \dot{I}_B}{\partial \lambda_i} \right] &= 2 \times \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 \lambda_2 \cdot \lambda_1 & (\lambda_1^2 + \lambda_3^2) & 2 \lambda_2 \cdot \lambda_3 \\ 2 \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3^2 & \lambda_1^2 \cdot \lambda_3^2 & 2 \lambda_1^2 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 \end{bmatrix} \\ \frac{\partial}{\partial \lambda_3} \left[ \frac{\partial \dot{I}_B}{\partial \lambda_i} \right] &= 2 \times \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 \lambda_3 \cdot \lambda_1 & 2 \lambda_2 \cdot \lambda_3 & (\lambda_1^2 + \lambda_2^2) \\ 2 \lambda_1 \cdot \lambda_2^2 \cdot \lambda_3 & 2 \lambda_1^2 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 & \lambda_1^2 \cdot \lambda_2^2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (265)$$

Dans le cas où l'on a deux ou trois valeurs propres identiques, cela n'intervient pas dans le calcul des expressions précédentes (265). Par contre cela intervient dans le calcul de  $\left[ \frac{\partial \dot{I}_B}{\partial \lambda_i} \right]^{-1}$ , mais ceci a déjà été vu dans la section précédente (12.1).

**Remarque** Il est également possible de dériver de manière formelle l'expression (248), comme cela a été dit plus haut. En comptant les opérations d'élévation à la puissance "n" comme ayant un temps d'exécution sensiblement égales à "n" multiplications, on obtient pour le premier terme de la matrice de l'ordre de 20 fois plus d'opérations \*/ que dans la méthode proposée (méthode proposée : 18 \* et 18 +, contre 13 + et 143 \* pour la dérivation directe)

**Validation numériques** On effectue quelques validations numériques.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2(a_2^2 + a_3^2) & 2a_2a_1 & 2a_3a_1 \\ 2a_2^2a_3^2 & 4a_1a_2a_3^2 & 4a_1a_2^2a_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2. & 0 & 0 \\ 2.(a_1^2 + a_3^2) & 4.a_2a_1 & 4.a_3a_1 \\ 2.a_2^2a_3^2 & 4.a_1a_2a_3^2 & 4.a_1a_2^2a_3 \end{pmatrix}$$

Dixième partie  
**Annexes**

## 13 Première présentation des potentiels dédiés aux alliages à mémoire de forme (AMF)

Dans le cas des AMF, Denis Favier a proposé une forme de potentiel original incluant ou non une dépendance à la phase. Nous allons tout d'abord développer les relations relatives à ces deux potentiels puis nous nous intéresserons au potentiel développé par Laurent Orgéas, qui permet en outre de mieux prendre en compte la transition entre très faibles déformations et moyennes déformations. Enfin nous présenterons un cas de potentiel uniquement dédié à la variation volumique relative.

### 13.1 Potentiel 1, indépendant de la phase

Expression originale :

$$\omega\sqrt{g} = \sqrt{g} \left( \frac{K \ln^2(V)}{6} + \frac{Q_{0r}^2}{2\mu_r} \log \left( \operatorname{ch} \left( \frac{2\mu_r Q_\epsilon}{Q_{0r}} \right) \right) + \mu_\infty Q_\epsilon^2 \right) \quad (266)$$

avec pour notation :  $Q_\epsilon = \sqrt{2\bar{I}I_\epsilon}$ , sachant que les paramètres de la loi sont :  $K, Q_{0r}, \mu_r, \mu_\infty$ .

La transcription utilisant les invariants retenus dans ce travail est immédiate.

$$\omega\sqrt{g} = \sqrt{g_0} V \left( \frac{K \ln^2(V)}{6} + \frac{Q_{0r}^2}{2\mu_r} \log \left( \operatorname{ch} \left( \frac{2\mu_r \sqrt{2\bar{I}I_\epsilon}}{Q_{0r}} \right) \right) + \mu_\infty 2\bar{I}I_\epsilon \right) \quad (267)$$

Au niveau de l'application numérique, l'expression peut également s'exprimer uniquement avec les fonctions exponentielles et logarithmique, ce qui peut accélérer les calculs.

$$\omega\sqrt{g} = \sqrt{g_0} V \left( \frac{K \ln^2(V)}{6} + \frac{Q_{0r}^2}{2\mu_r} \left( \frac{2\mu_r \sqrt{2\bar{I}I_\epsilon}}{Q_{0r}} - \ln(2) + \ln \left( 1 + e^{\frac{-4\mu_r \sqrt{2\bar{I}I_\epsilon}}{Q_{0r}}} \right) \right) + 2\mu_\infty \bar{I}I_\epsilon \right) \quad (268)$$

#### 13.1.1 Calcul des variations premières et secondes du potentiel

A partir de la forme précédente du potentiel (274), on obtient pour les dérivées premières :

$$\frac{\partial(\omega\sqrt{g})}{\partial I_\epsilon} = 0$$

$$\frac{\partial(\omega\sqrt{g})}{\partial \bar{I}I_\epsilon} = \sqrt{g_0} V \left( \frac{Q_{0r}^2}{2\mu_r} \left( \frac{-4\mu_r^2}{\bar{I}I_\epsilon Q_{0r}^2} \frac{1}{\left( 1 + e^{\frac{4\mu_r \sqrt{2\bar{I}I_\epsilon}}{Q_{0r}}} \right)} \right) + 2\mu_\infty \right) \quad (26)$$

$$\frac{\partial(\omega\sqrt{g})}{\partial V} = \sqrt{g_0} \left( \left( \frac{K \ln^2(V)}{6} + \frac{Q_{0r}^2}{2\mu_r} \left( \frac{2\mu_r \sqrt{2\bar{I}I_\epsilon}}{Q_{0r}} - \ln(2) + \ln \left( 1 + e^{\frac{-4\mu_r \sqrt{2\bar{I}I_\epsilon}}{Q_{0r}}} \right) \right) + 2\mu_\infty \bar{I}I_\epsilon \right) + \frac{K \ln(V)}{3} \right)$$

et pour les dérivées secondes :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2(\omega\sqrt{g})}{\partial^2 I_\epsilon} &= 0 \\
\frac{\partial^2(\omega\sqrt{g})}{\partial I_\epsilon \partial \bar{I}\bar{I}_\epsilon} &= 0 \\
\frac{\partial^2(\omega\sqrt{g})}{\partial I_\epsilon \partial V} &= 0 \\
\frac{\partial^2(\omega\sqrt{g})}{\partial^2 \bar{I}\bar{I}_\epsilon} &= \sqrt{g_0} V 2\mu_r \left( \frac{1}{\bar{I}\bar{I}_\epsilon^2 \left(1 + e^{\frac{4\mu_r\sqrt{2\bar{I}\bar{I}_\epsilon}}{Q_{0r}}}\right)} + \frac{e^{\frac{4\mu_r\sqrt{2\bar{I}\bar{I}_\epsilon}}{Q_{0r}}}}{\sqrt{\bar{I}\bar{I}_\epsilon} \left(1 + e^{\frac{4\mu_r\sqrt{2\bar{I}\bar{I}_\epsilon}}{Q_{0r}}}\right)^2} \right) \\
\frac{\partial^2(\omega\sqrt{g})}{\partial \bar{I}\bar{I}_\epsilon \partial V} &= \sqrt{g_0} \left( \frac{Q_{0r}^2}{2\mu_r} \left( \frac{-4\mu_r^2}{\bar{I}\bar{I}_\epsilon Q_{0r}^2} \frac{1}{\left(1 + e^{\frac{4\mu_r\sqrt{2\bar{I}\bar{I}_\epsilon}}{Q_{0r}}}\right)} \right) + 2\mu_\infty \right) \\
\frac{\partial^2(\omega\sqrt{g})}{\partial^2 V} &= \frac{\sqrt{g_0} K}{3V} (\ln(V) + 1)
\end{aligned} \tag{270}$$

### 13.2 Potentiel 1, dépendant de la phase

Ce potentiel correspond à une modification du potentiel précédent. Les paramètres  $Q_{0r}$  et  $\mu_r$  permettent d'agir sur l'influence de  $Q_\epsilon$ , dans la seconde partie du potentiel original (??), ils agissent comme des seuils. L'idée ici (cf. denis) est de les rendre dépendant de la phase.

$$Q_{0r} = \frac{Q_{0i}}{(1 + \gamma \cos(3\varphi))^n} \quad \text{et} \quad \mu_r = \frac{\mu_i}{(1 + \gamma \cos(3\varphi))^n} \tag{271}$$

Cette nouvelle forme induit deux nouveaux paramètres ce qui conduit à 6 le nombre de paramètres à identifier :  $K$ ,  $Q_{0i}$ ,  $\mu_i$ ,  $\mu_\infty$ ,  $\gamma$ ,  $n$ . L'angle  $\varphi$  est mesuré dans le plan déviatoire. Il est possible de l'exprimer par rapport aux invariants :

$$\cos(3\varphi) = 3\sqrt{6} \frac{\bar{I}\bar{I}\bar{I}_\epsilon}{Q_\epsilon^3} = 3\sqrt{3} \frac{\bar{I}\bar{I}\bar{I}_\epsilon}{2(\bar{I}\bar{I}_\epsilon)^{3/2}} \tag{272}$$

Sachant que :

$$\bar{I}\bar{I}\bar{I}_\epsilon = -\frac{1}{8V^2} + \frac{1 - 2I_\epsilon}{8} - \frac{\bar{I}\bar{I}_\epsilon}{2} + I_\epsilon \bar{I}\bar{I}_\epsilon + \frac{I_\epsilon^2}{3} - \frac{11}{54} I_\epsilon^3 \tag{273}$$

On remarque également que chaque rapport des coefficients dépendants de la phase, se simplifi :  $\frac{Q_{0r}}{\mu_r} = \frac{Q_{0i}}{\mu_i}$  d'où la forme du potentiel :

$$\omega\sqrt{g} = \sqrt{g_0} V \left( \frac{K \ln^2(V)}{6} + \frac{Q_{0r} Q_{0i}}{2\mu_i} \left( \frac{2\mu_i \sqrt{2\bar{I}\bar{I}_\epsilon}}{Q_{0i}} - \ln(2) + \ln \left( 1 + e^{\frac{-4\mu_i \sqrt{2\bar{I}\bar{I}_\epsilon}}{Q_{0i}}} \right) \right) + 2\mu_\infty \bar{I}\bar{I}_\epsilon \right) \tag{274}$$

### 13.2.1 Calcul des variations premières et secondes du potentiel

Au vu des expressions précédentes, il est préférable tout d'abord de calculer les variations des coefficients dépendant de la phase.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \cos(3\varphi)}{\partial I_\epsilon} &= \frac{3\sqrt{3}}{2(\bar{I}I_\epsilon)^{3/2}} \frac{\partial \bar{I}I_\epsilon}{\partial I_\epsilon} = \frac{3\sqrt{3}}{2(\bar{I}I_\epsilon)^{3/2}} \left( \frac{-1}{4} + \bar{I}I_\epsilon + \frac{2I_\epsilon}{3} - \frac{11 I_\epsilon^2}{18} \right) \\
\frac{\partial \cos(3\varphi)}{\partial \bar{I}I_\epsilon} &= -\frac{9\sqrt{3}\bar{I}I_\epsilon}{4(\bar{I}I_\epsilon)^{5/2}} + \frac{3\sqrt{3}}{2(\bar{I}I_\epsilon)^{3/2}} \left( -\frac{1}{2} + I_\epsilon \right) \\
\frac{\partial \cos(3\varphi)}{\partial V} &= \frac{3\sqrt{3}}{2(\bar{I}I_\epsilon)^{3/2}} \frac{\partial \bar{I}I_\epsilon}{\partial V} = \frac{3\sqrt{3}}{8(\bar{I}I_\epsilon)^{3/2} V^3}
\end{aligned} \tag{275}$$

d'où

$$\begin{aligned}
\frac{\partial Q_{0r}}{\partial I_\epsilon} &= \frac{-3\sqrt{3} n Q_{0i}\gamma}{2(1 + \gamma \cos(3\varphi))^{n+1} (\bar{I}I_\epsilon)^{3/2}} \left( \frac{-1}{4} + \bar{I}I_\epsilon + \frac{2I_\epsilon}{3} - \frac{11 I_\epsilon^2}{18} \right) \\
\frac{\partial Q_{0r}}{\partial \bar{I}I_\epsilon} &= \frac{-n Q_{0i}\gamma}{(1 + \gamma \cos(3\varphi))^{n+1}} \left( \frac{-9\sqrt{3}\bar{I}I_\epsilon}{4(\bar{I}I_\epsilon)^{5/2}} + \frac{3\sqrt{3}}{2(\bar{I}I_\epsilon)^{3/2}} \left( -\frac{1}{2} + I_\epsilon \right) \right) \\
\frac{\partial Q_{0r}}{\partial V} &= \frac{-3\sqrt{3} n Q_{0i}\gamma}{8(1 + \gamma \cos(3\varphi))^{n+1} (\bar{I}I_\epsilon)^{3/2} V^3}
\end{aligned} \tag{276}$$

et pour les dérivées secondes :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2(Q_{0r})}{\partial^2 I_\epsilon} &= \frac{27(n+1)nQ_{0i}\gamma^2}{4(1+\gamma\cos(3\varphi))^{n+2}(\bar{I}I_\epsilon)^3} \left( \frac{-1}{4} + \bar{I}I_\epsilon + \frac{2I_\epsilon}{3} - \frac{11I_\epsilon^2}{18} \right)^2 \\
&\quad + \frac{-3\sqrt{3}nQ_{0i}\gamma}{(1+\gamma\cos(3\varphi))^{n+1}2(\bar{I}I_\epsilon)^{3/2}} \left( \frac{2}{3} - \frac{11I_\epsilon}{9} \right) \\
\frac{\partial^2(Q_{0r})}{\partial I_\epsilon \partial \bar{I}I_\epsilon} &= \frac{3\sqrt{3}n(n+1)Q_{0i}\gamma^2}{2(1+\gamma\cos(3\varphi))^{n+2}(\bar{I}I_\epsilon)^{3/2}} \left( \frac{-1}{4} + \bar{I}I_\epsilon + \frac{2I_\epsilon}{3} - \frac{11I_\epsilon^2}{18} \right) \frac{\partial\cos(3\varphi)}{\partial \bar{I}I_\epsilon} + \\
&\quad + \frac{9\sqrt{3}nQ_{0i}\gamma}{4(1+\gamma\cos(3\varphi))^{n+1}(\bar{I}I_\epsilon)^{5/2}} \left( \frac{-1}{4} + \bar{I}I_\epsilon + \frac{2I_\epsilon}{3} - \frac{11I_\epsilon^2}{18} \right) \\
&\quad - \frac{3\sqrt{3}nQ_{0i}\gamma}{2(1+\gamma\cos(3\varphi))^{n+1}(\bar{I}I_\epsilon)^{3/2}} \\
\frac{\partial^2(Q_{0r})}{\partial I_\epsilon \partial V} &= \frac{27n(n+1)Q_{0i}\gamma^2}{16V^3(1+\gamma\cos(3\varphi))^{n+2}(\bar{I}I_\epsilon)^3} \left( \frac{-1}{4} + \bar{I}I_\epsilon + \frac{2I_\epsilon}{3} - \frac{11I_\epsilon^2}{18} \right) \\
\frac{\partial^2(Q_{0r})}{\partial^2 \bar{I}I_\epsilon} &= \frac{n(n+1)Q_{0i}\gamma^2}{(1+\gamma\cos(3\varphi))^{n+2}} \left( \frac{-9\sqrt{3}\bar{I}I_\epsilon}{4(\bar{I}I_\epsilon)^{5/2}} + \frac{3\sqrt{3}}{2(\bar{I}I_\epsilon)^{3/2}} \left( -\frac{1}{2} + I_\epsilon \right) \right) \frac{\partial\cos(3\varphi)}{\partial \bar{I}I_\epsilon} + \\
&\quad \frac{-nQ_{0i}\gamma}{(1+\gamma\cos(3\varphi))^{n+1}} \left( \frac{45\sqrt{3}\bar{I}I_\epsilon}{8(\bar{I}I_\epsilon)^{7/2}} + \frac{9\sqrt{3}}{4(\bar{I}I_\epsilon)^{5/2}} \left( -\frac{1}{2} + I_\epsilon \right) \right) \\
\frac{\partial^2(Q_{0r})}{\partial \bar{I}I_\epsilon \partial V} &= \frac{n(n+1)Q_{0i}\gamma^2}{(1+\gamma\cos(3\varphi))^{n+2}} \left( \frac{9\sqrt{3}\bar{I}I_\epsilon}{2(\bar{I}I_\epsilon)^{5/2}} + \frac{3\sqrt{3}}{2(\bar{I}I_\epsilon)^{3/2}} \left( -\frac{1}{2} + I_\epsilon \right) \right) \frac{3\sqrt{3}}{16(\bar{I}I_\epsilon)^{3/2}V^3} \\
\frac{\partial^2(Q_{0r})}{\partial^2 V} &= \frac{27n(n+1)Q_{0i}\gamma^2}{64(1+\gamma\cos(3\varphi))^{n+2}(\bar{I}I_\epsilon)^{3/2}V^6} + \frac{9\sqrt{3}nQ_{0i}\gamma}{(1+\gamma\cos(3\varphi))^{n+1}8(\bar{I}I_\epsilon)^{3/2}V^4} \quad (277)
\end{aligned}$$

Les expressions pour  $\mu_r$  sont identiques au coefficient  $Q_{0i}$  près, que l'on doit remplacer par  $\mu_i$ .

A partir des expressions précédentes , on obtient les dérivées premières du potentiel.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(\omega\sqrt{g})}{\partial I_\epsilon} &= \sqrt{g_0} V \frac{Q_{0i}}{2\mu_i} \left( \frac{2\mu_i\sqrt{2\bar{I}\bar{I}_\epsilon}}{Q_{0i}} - \ln(2) + \ln\left(1 + e^{-\frac{4\mu_i\sqrt{2\bar{I}\bar{I}_\epsilon}}{Q_{0i}}}\right) \right) \frac{\partial Q_{0r}}{\partial I_\epsilon} \\
\frac{\partial(\omega\sqrt{g})}{\partial \bar{I}\bar{I}_\epsilon} &= \sqrt{g_0} V \left( \frac{Q_{0r}Q_{0i}}{2\mu_i} \left( \frac{-4\mu_i^2}{\bar{I}\bar{I}_\epsilon Q_{0i}^2} \frac{1}{\left(1 + e^{-\frac{4\mu_i\sqrt{2\bar{I}\bar{I}_\epsilon}}{Q_{0i}}}\right)} \right) + 2\mu_\infty \right) \\
&\quad + \sqrt{g_0} V \frac{Q_{0i}}{2\mu_i} \left( \frac{2\mu_i\sqrt{2\bar{I}\bar{I}_\epsilon}}{Q_{0i}} - \ln(2) + \ln\left(1 + e^{-\frac{4\mu_i\sqrt{2\bar{I}\bar{I}_\epsilon}}{Q_{0i}}}\right) \right) \frac{\partial Q_{0r}}{\partial \bar{I}\bar{I}_\epsilon} \\
\frac{\partial(\omega\sqrt{g})}{\partial V} &= \sqrt{g_0} \left( \left( \frac{K\ln^2(V)}{6} + \frac{Q_{0r}Q_{0i}}{2\mu_i} \left( \frac{2\mu_r\sqrt{2\bar{I}\bar{I}_\epsilon}}{Q_{0r}} - \ln(2) + \ln\left(1 + e^{-\frac{4\mu_i\sqrt{2\bar{I}\bar{I}_\epsilon}}{Q_{0i}}}\right) \right) \right) + 2\mu_\infty \bar{I}\bar{I}_\epsilon \right) + \frac{K\ln}{3} \\
&\quad + \sqrt{g_0} V \frac{Q_{0i}}{2\mu_i} \left( \frac{2\mu_i\sqrt{2\bar{I}\bar{I}_\epsilon}}{Q_{0i}} - \ln(2) + \ln\left(1 + e^{-\frac{4\mu_i\sqrt{2\bar{I}\bar{I}_\epsilon}}{Q_{0i}}}\right) \right) \frac{\partial Q_{0r}}{\partial V}
\end{aligned}$$

et pour les dérivées secondes :

$$\frac{\partial^2(\omega\sqrt{g})}{\partial^2 I_\epsilon} = \sqrt{g_0} V \frac{Q_{0i}}{2\mu_i} \left( \frac{2\mu_i\sqrt{2\bar{I}\bar{I}_\epsilon}}{Q_{0i}} - \ln(2) + \ln\left(1 + e^{-\frac{4\mu_i\sqrt{2\bar{I}\bar{I}_\epsilon}}{Q_{0i}}}\right) \right) \frac{\partial^2 Q_{0r}}{(\partial I_\epsilon)^2}$$

$$\frac{\partial^2(\omega\sqrt{g})}{\partial I_\epsilon \partial \bar{I}\bar{I}_\epsilon} = \sqrt{g_0} V \frac{Q_{0i}}{2\mu_i} \left( \frac{2\mu_i\sqrt{2\bar{I}\bar{I}_\epsilon}}{Q_{0i}} - \ln(2) + \ln\left(1 + e^{-\frac{4\mu_i\sqrt{2\bar{I}\bar{I}_\epsilon}}{Q_{0i}}}\right) \right) \frac{\partial^2 Q_{0r}}{\partial I_\epsilon \partial \bar{I}\bar{I}_\epsilon}$$

$$+ \sqrt{g_0} V \frac{Q_{0i}}{2\mu_i} \left( \frac{\mu_i\sqrt{2}}{Q_{0i}\sqrt{\bar{I}\bar{I}_\epsilon}} + \frac{\frac{-2\mu_i\sqrt{2}}{Q_{0i}\sqrt{\bar{I}\bar{I}_\epsilon}} e^{-\frac{4\mu_i\sqrt{2\bar{I}\bar{I}_\epsilon}}{Q_{0i}}}}{\left(1 + e^{-\frac{4\mu_i\sqrt{2\bar{I}\bar{I}_\epsilon}}{Q_{0i}}}\right)} \right) \frac{\partial Q_{0r}}{\partial I_\epsilon}$$

$$\frac{\partial^2(\omega\sqrt{g})}{\partial I_\epsilon \partial V} = \sqrt{g_0} V \frac{Q_{0i}}{2\mu_i} \left( \frac{2\mu_i\sqrt{2\bar{I}\bar{I}_\epsilon}}{Q_{0i}} - \ln(2) + \ln\left(1 + e^{-\frac{4\mu_i\sqrt{2\bar{I}\bar{I}_\epsilon}}{Q_{0i}}}\right) \right) \frac{\partial^2 Q_{0r}}{\partial I_\epsilon \partial V}$$

$$+ \sqrt{g_0} \frac{Q_{0i}}{2\mu_i} \left( \frac{2\mu_i\sqrt{2\bar{I}\bar{I}_\epsilon}}{Q_{0i}} - \ln(2) + \ln\left(1 + e^{-\frac{4\mu_i\sqrt{2\bar{I}\bar{I}_\epsilon}}{Q_{0i}}}\right) \right) \frac{\partial Q_{0r}}{\partial I_\epsilon}$$

$$\frac{\partial^2(\omega\sqrt{g})}{\partial^2 \bar{I}\bar{I}_\epsilon} = \frac{\sqrt{2g_0} V \mu_i}{Q_{0i}} \left( \frac{Q_{0r}}{\bar{I}\bar{I}_\epsilon^2 \left(1 + e^{-\frac{4\mu_i\sqrt{2\bar{I}\bar{I}_\epsilon}}{Q_{0i}}}\right)} + \frac{2\sqrt{2}Q_{0r}\mu_i e^{-\frac{4\mu_i\sqrt{2\bar{I}\bar{I}_\epsilon}}{Q_{0i}}}}{(\bar{I}\bar{I}_\epsilon)^{3/2} Q_{0i} \left(1 + e^{-\frac{4\mu_i\sqrt{2\bar{I}\bar{I}_\epsilon}}{Q_{0i}}}\right)^2} \right)$$

$$+ \sqrt{g_0} V \frac{Q_{0i}}{\mu_i} \left( \frac{-4\mu_i^2}{\bar{I}\bar{I}_\epsilon Q_{0i}^2} \frac{1}{\left(1 + e^{-\frac{4\mu_i\sqrt{2\bar{I}\bar{I}_\epsilon}}{Q_{0i}}}\right)} \right) \frac{\partial Q_{0r}}{\partial \bar{I}\bar{I}_\epsilon}$$

$$+ \sqrt{g_0} V \frac{Q_{0i}}{2\mu_i} \left( \frac{2\mu_i\sqrt{2\bar{I}\bar{I}_\epsilon}}{Q_{0i}} - \ln(2) + \ln\left(1 + e^{-\frac{4\mu_i\sqrt{2\bar{I}\bar{I}_\epsilon}}{Q_{0i}}}\right) \right) \frac{\partial^2 Q_{0r}}{(\partial \bar{I}\bar{I}_\epsilon)^2} \quad (2)$$

$$+ \sqrt{g_0} V \frac{Q_{0i}}{2\mu_i} \left( \frac{\mu_i\sqrt{2}}{Q_{0i}\sqrt{\bar{I}\bar{I}_\epsilon}} + \frac{\frac{-2\mu_i\sqrt{2}}{Q_{0i}\sqrt{\bar{I}\bar{I}_\epsilon}} e^{-\frac{4\mu_i\sqrt{2\bar{I}\bar{I}_\epsilon}}{Q_{0i}}}}{\left(1 + e^{-\frac{4\mu_i\sqrt{2\bar{I}\bar{I}_\epsilon}}{Q_{0i}}}\right)} \right) \frac{\partial Q_{0r}}{\partial \bar{I}\bar{I}_\epsilon}$$

$$\frac{\partial^2(\omega\sqrt{g})}{\partial \bar{I}\bar{I}_\epsilon \partial V} = \sqrt{g_0} \left( \frac{Q_{0r}Q_{0i}}{2\mu_i} \left( \frac{-4\mu_i^2}{\bar{I}\bar{I}_\epsilon Q_{0i}^2} \frac{1}{\left(1 + e^{-\frac{4\mu_i\sqrt{2\bar{I}\bar{I}_\epsilon}}{Q_{0i}}}\right)} \right) + 2\mu_\infty \right)$$

$$+ \sqrt{g_0} V \frac{Q_{0i}}{2\mu_i} \left( \frac{-4\mu_i^2}{\bar{I}\bar{I}_\epsilon Q_{0i}^2} \frac{1}{\left(1 + e^{-\frac{4\mu_i\sqrt{2\bar{I}\bar{I}_\epsilon}}{Q_{0i}}}\right)} \right) \frac{\partial Q_{0r}}{\partial V}$$

$$+ \sqrt{g_0} \frac{Q_{0i}}{2\mu_i} \left( \frac{2\mu_i\sqrt{2\bar{I}\bar{I}_\epsilon}}{Q_{0i}} - \ln(2) + \ln\left(1 + e^{-\frac{4\mu_i\sqrt{2\bar{I}\bar{I}_\epsilon}}{Q_{0i}}}\right) \right) \frac{\partial Q_{0r}}{\partial \bar{I}\bar{I}_\epsilon} \quad (2)$$

$$+ \sqrt{g_0} V \frac{Q_{0i}}{2\mu_i} \left( \frac{2\mu_i\sqrt{2\bar{I}\bar{I}_\epsilon}}{Q_{0i}} - \ln(2) + \ln\left(1 + e^{-\frac{4\mu_i\sqrt{2\bar{I}\bar{I}_\epsilon}}{Q_{0i}}}\right) \right) \frac{\partial^2 Q_{0r}}{\partial \bar{I}\bar{I}_\epsilon \partial V} \quad (2)$$

$$\frac{\partial^2(\omega\sqrt{g})}{\partial^2 V} = \sqrt{g_0} \left( \left( \frac{K \ln(V)}{3V} + \frac{Q_{0i}}{2\mu_i} \left( \frac{2\mu_i\sqrt{2\bar{I}\bar{I}_\epsilon}}{Q_{0i}} - \ln(2) + \ln\left(1 + e^{-\frac{4\mu_i\sqrt{2\bar{I}\bar{I}_\epsilon}}{Q_{0i}}}\right) \right) \right) + 2\mu_\infty \bar{I}\bar{I}_\epsilon \right) \frac{\partial Q_{0r}}{\partial V} + \frac{K}{3V}$$

# 14 Présentation du potentiel développé par Laurent Orgéas : calculs effectués par Laurent

## 14.0.1 Exemple : potentiel $\omega_4$

Ce potentiel a été proposé par Laurent Orgéas :

$$\begin{aligned}
 \omega_4 = & \frac{K_{rev}}{6} \ln^2(V) + Q_{\sigma_{rev}} Q_\epsilon + \mu_{2rev} Q_\epsilon^2 \\
 & + \frac{\mu_{1rev}}{2} \left[ Q_\epsilon (Q_\epsilon + 2Q_{ec}) - (Q_\epsilon + Q_{ec}) (\alpha_{1rev}^2 + (Q_\epsilon + Q_{ec})^2)^{1/2} + Q_{ec} (\alpha_{1rev}^2 + Q_{ec}^2)^{1/2} \right. \\
 & \left. - \alpha_{1rev}^2 \left( \ln \left( \frac{Q_\epsilon + Q_{ec}}{\alpha_1^2} (\alpha_{1rev}^2 + (Q_\epsilon + Q_{ec})^2)^{1/2} \right) - \ln \left( \frac{Q_{ec}}{\alpha_1^2} (\alpha_{1rev}^2 + Q_{ec}^2)^{1/2} \right) \right) \right] \\
 & + \frac{\mu_{3rev}}{2} \left[ Q_\epsilon (Q_\epsilon - 2(Q_{\epsilon_{rev}}^2 + \alpha_{3rev}^2)^{1/2}) \right. \\
 & \left. + \alpha_{3rev}^2 \left( \ln \left( \frac{Q_\epsilon - Q_{\epsilon_{rev}}}{\alpha_{3rev}^2} (\alpha_{3rev}^2 + (Q_\epsilon - Q_{\epsilon_{rev}})^2)^{1/2} \right) - \ln \left( \frac{-Q_{\epsilon_{rev}}}{\alpha_{3rev}^2} (\alpha_{3rev}^2 + Q_{\epsilon_{rev}}^2)^{1/2} \right) \right) \right. \\
 & \left. + (Q_\epsilon - Q_{\epsilon_{rev}}) (\alpha_{3rev}^2 + (Q_\epsilon - Q_{\epsilon_{rev}})^2)^{1/2} + Q_{\epsilon_{rev}} (\alpha_{3rev}^2 + Q_{\epsilon_{rev}}^2)^{1/2} \right] \quad (283)
 \end{aligned}$$

avec :

$$Q_{ec} = \frac{(\mu_{1rev} \alpha_{1rev})^2 - Q_{\sigma_{rev}}^2}{2\mu_{1rev} Q_{\sigma_{rev}}} \quad (284)$$

Les paramètres de la loi sont :  $K_{rev}$ ,  $Q_{\sigma_{rev}}$ ,  $\mu_{1rev}$ ,  $\mu_{2rev}$ ,  $\mu_{3rev}$ ,  $\alpha_{1rev}$ ,  $\alpha_{3rev}$  et  $Q_{\epsilon_{rev}}$ . Les dérivées premières non nulles de  $\omega$  s'écrivent :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \omega_4}{\partial V} &= \frac{\partial \omega_1}{\partial V} \\
 \frac{\partial \omega_4}{\partial Q_\epsilon} &= Q_{\sigma_{rev}} + 2\mu_{2rev} Q_\epsilon \\
 & \quad + \mu_{1rev} \left( Q_\epsilon + Q_{ec} - (\alpha_{1rev}^2 + (Q_\epsilon + Q_{ec})^2)^{1/2} \right) \\
 & \quad + \mu_{3rev} \left( Q_\epsilon - (Q_{\epsilon_{rev}}^2 + \alpha_{3rev}^2)^{1/2} + ((Q_\epsilon - Q_{\epsilon_{rev}})^2 + \alpha_{3rev}^2)^{1/2} \right) \quad (285)
 \end{aligned}$$

Les dérivées secondes non nulles s'écrivent quant à elles sous la forme :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 \omega_4}{\partial V^2} &= \frac{\partial^2 \omega_1}{\partial V^2} \\
 \frac{\partial^2 \omega_4}{\partial Q_\epsilon^2} &= 2\mu_{2rev} \\
 & \quad + \mu_{1rev} \left( 1 - (Q_\epsilon + Q_{ec}) (\alpha_{1rev}^2 + (Q_\epsilon + Q_{ec})^2)^{-1/2} \right) \\
 & \quad + \mu_{3rev} \left( 1 + (Q_\epsilon - Q_{\epsilon_{rev}}) (\alpha_{3rev}^2 + (Q_\epsilon - Q_{\epsilon_{rev}})^2)^{-1/2} \right) \quad (286)
 \end{aligned}$$

### 14.0.2 Exemple : potentiel $\omega_6$

Ce potentiel correspond à une modification du potentiel  $\omega_4$ . Ainsi,  $\omega_6$  est obtenu en faisant varier les paramètres  $Q_{\sigma_{rev}}$ ,  $Q_{\epsilon_{rev}}$ ,  $\mu_{2rev}$  et  $\mu_{3rev}$  de  $\omega_4$  avec la phase  $\varphi_\epsilon$  :

$$\begin{aligned}
 Q_{\sigma_{rev}} &= \frac{Q_{\sigma_{0rev}}}{(1 + \gamma_{Q_{\sigma_{rev}}} \cos(3\varphi_\epsilon))^{n_{Q_{\sigma_{rev}}}}} \\
 Q_{\epsilon_{rev}} &= \frac{Q_{\epsilon_{0rev}}}{(1 + \gamma_{Q_{\epsilon_{rev}}} \cos(3\varphi_\epsilon))^{n_{Q_{\epsilon_{rev}}}}} \\
 \mu_{2rev} &= \frac{\mu_{02rev}}{(1 + \gamma_{\mu_{2rev}} \cos(3\varphi_\epsilon))^{n_{\mu_{2rev}}}} \\
 \mu_{3rev} &= \frac{\mu_{03rev}}{(1 + \gamma_{\mu_{3rev}} \cos(3\varphi_\epsilon))^{n_{\mu_{3rev}}}} \tag{287}
 \end{aligned}$$

Pour calculer les dérivées de  $\omega_6$ , on forme d'abord :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial Q_{\epsilon c}}{\partial Q_{\sigma_{rev}}} &= -\frac{(Q_{\sigma_{rev}}^2 + (\mu_{1rev} \alpha_{1rev})^2)}{2\mu_{1rev} Q_{\sigma_{rev}}^2} \\
 \frac{\partial^2 Q_{\epsilon c}}{\partial Q_{\sigma_{rev}}^2} &= \frac{\mu_{1rev} \alpha_{1rev}^2}{Q_{\sigma_{rev}}^3} \tag{288}
 \end{aligned}$$

Puis :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \omega_6}{\partial Q_{\epsilon c}} &= \mu_{1rev} \left( Q_\epsilon - (\alpha_{1rev}^2 + (Q_\epsilon + Q_{\epsilon c})^2)^{1/2} + (\alpha_{1rev}^2 + Q_{\epsilon c}^2)^{1/2} \right) \\
 \frac{\partial \omega_6}{\partial Q_{\sigma_{rev}}} &= Q_\epsilon + \frac{\partial \omega_6}{\partial Q_{\epsilon c}} \frac{\partial Q_{\epsilon c}}{\partial Q_{\sigma_{rev}}} \\
 \frac{\partial \omega_6}{\partial Q_e} &= \mu_{3rev} \left[ -Q_\epsilon Q_e (\alpha_{3rev}^2 + Q_e^2)^{-1/2} \right. \\
 &\quad \left. - (\alpha_{3rev}^2 + (Q_\epsilon - Q_e)^2)^{1/2} + (\alpha_{3rev}^2 + Q_e^2)^{1/2} \right] \\
 \frac{\partial \omega_6}{\partial \mu_{2rev}} &= Q_\epsilon^2 \\
 \frac{\partial \omega_6}{\partial \mu_{3rev}} &= \frac{1}{2} \left[ Q_\epsilon \left( Q_\epsilon - 2(Q_e^2 + \alpha_2^2)^{1/2} \right) \right. \\
 &\quad + \alpha_{3rev}^2 \left( \ln \left( \frac{Q_\epsilon - Q_e}{\alpha_{3rev}^2} (\alpha_{3rev}^2 + (Q_\epsilon - Q_e)^2)^{1/2} \right) - \ln \left( \frac{-Q_e}{\alpha_{3rev}^2} (\alpha_{3rev}^2 + Q_e^2)^{1/2} \right) \right) \\
 &\quad \left. + (Q_\epsilon - Q_e) (\alpha_{3rev}^2 + (Q_\epsilon - Q_e)^2)^{1/2} + Q_e (\alpha_{3rev}^2 + Q_e^2)^{1/2} \right] \tag{289}
 \end{aligned}$$

Puis :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \omega_6}{\partial Q_{\epsilon c}^2} &= \mu_{1rev} \left( Q_{\epsilon c} (\alpha_{1rev}^2 + Q_{\epsilon c}^2)^{-1/2} - (Q_{\epsilon} + Q_{\epsilon c}) (\alpha_{1rev}^2 + (Q_{\epsilon} + Q_{\epsilon c})^2)^{-1/2} \right) \\
\frac{\partial^2 \omega_6}{\partial Q_{\sigma_{rev}}^2} &= \frac{\partial^2 \omega_6}{\partial Q_{\epsilon c}^2} \frac{\partial Q_{\epsilon c}}{\partial Q_{\sigma_{rev}}} + \frac{\partial \omega_6}{\partial Q_{\epsilon c}} \frac{\partial^2 Q_{\epsilon c}}{\partial Q_{\sigma_{rev}}^2} \\
\frac{\partial^2 \omega_6}{\partial Q_e^2} &= \mu_{3rev} \left[ -Q_{\epsilon} (\alpha_{3rev}^2 + Q_e^2)^{-1/2} + Q_{\epsilon} Q_e^2 (\alpha_{3rev}^2 + Q_e^2)^{-3/2} \right. \\
&\quad \left. - (Q_{\epsilon} - Q_e) (\alpha_{3rev}^2 + (Q_{\epsilon} - Q_e)^2)^{-1/2} + Q_e (\alpha_{3rev}^2 + Q_e^2)^{1/2} \right] \\
\frac{\partial^2 \omega_6}{\partial Q_e \partial \mu_{3rev}} &= \frac{1}{\mu_{3rev}} \frac{\partial \omega_6}{\partial Q_e}
\end{aligned} \tag{290}$$

Et enfin :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \omega_6}{\partial Q_{\epsilon}} &= \frac{\partial \omega_4}{\partial Q_{\epsilon}} \\
\frac{\partial^2 \omega_6}{\partial Q_{\epsilon} \partial Q_{\epsilon c}} &= \mu_{1rev} \left( 1 - (Q_{\epsilon} + Q_{\epsilon c}) (\alpha_{1rev}^2 + (Q_{\epsilon} + Q_{\epsilon c})^2)^{-1/2} \right) \\
\frac{\partial^2 \omega_6}{\partial Q_{\epsilon} \partial Q_{\sigma_{rev}}} &= 1 + \frac{\partial^2 \omega_6}{\partial Q_{\epsilon} \partial Q_{\epsilon c}} \frac{\partial Q_{\epsilon c}}{\partial Q_{\sigma_{rev}}} \\
\frac{\partial^2 \omega_6}{\partial Q_{\epsilon} \partial Q_e} &= \mu_{3rev} \left( -Q_e (Q_e^2 + \alpha_{3rev}^2)^{-1/2} + (Q_{\epsilon} - Q_e) ((Q_{\epsilon} - Q_e)^2 + \alpha_{3rev}^2)^{-1/2} \right) \\
\frac{\partial^2 \omega_6}{\partial Q_{\epsilon} \partial \mu_{2rev}} &= 2Q_{\epsilon} \\
\frac{\partial^2 \omega_6}{\partial Q_{\epsilon} \partial \mu_{3rev}} &= \left( Q_{\epsilon} - (Q_e^2 + \alpha_{3rev}^2)^{1/2} + ((Q_{\epsilon} - Q_e)^2 + \alpha_{3rev}^2)^{1/2} \right)
\end{aligned} \tag{291}$$

Ainsi, les dérivées premières non nulles de  $\omega_6$  sont alors :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \omega_6}{\partial V} &= \frac{\partial \omega_1}{\partial V} \\
\frac{\partial \omega_6}{\partial Q_{\epsilon}} &= \frac{\partial \omega_4}{\partial Q_{\epsilon}} \\
\frac{\partial \omega_6}{\partial \cos(3\varphi_{\epsilon})} &= \frac{\partial \omega_6}{\partial Q_{\sigma_{rev}}} \frac{\partial Q_{\sigma_{rev}}}{\partial \cos(3\varphi_{\epsilon})} + \frac{\partial \omega_6}{\partial Q_e} \frac{\partial Q_{\sigma_{rev}}}{\partial \cos(3\varphi_{\epsilon})} \\
&\quad + \frac{\partial \omega_6}{\partial \mu_{2rev}} \frac{\partial \mu_{2rev}}{\partial \cos(3\varphi_{\epsilon})} + \frac{\partial \omega_6}{\partial \mu_{3rev}} \frac{\partial \mu_{3rev}}{\partial \cos(3\varphi_{\epsilon})}
\end{aligned} \tag{292}$$

Les dérivées secondes non nulles de  $\omega_6$  s'écrivent quant à elles sous la forme :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \omega_6}{\partial V^2} &= \frac{\partial^2 \omega_1}{\partial V^2} \\
\frac{\partial^2 \omega_6}{\partial Q_\epsilon^2} &= \frac{\partial^2 \omega_4}{\partial Q_\epsilon^2} \\
\frac{\partial^2 \omega_6}{\partial \cos^2(3\varphi_\epsilon)} &= \frac{\partial^2 \omega_6}{\partial Q_{\sigma_{rev}}^2} \left( \frac{\partial Q_{\sigma_{rev}}}{\partial \cos(3\varphi_\epsilon)} \right)^2 + \frac{\partial \omega_6}{\partial Q_{\sigma_{rev}}} \frac{\partial^2 Q_{\sigma_{rev}}}{\partial \cos^2(3\varphi_\epsilon)} \\
&+ \frac{\partial^2 \omega_6}{\partial Q_e^2} \left( \frac{\partial Q_e}{\partial \cos(3\varphi_\epsilon)} \right)^2 + \frac{\partial \omega_6}{\partial Q_e} \frac{\partial^2 Q_e}{\partial \cos^2(3\varphi_\epsilon)} \\
&+ \frac{\partial \omega_6}{\partial \mu_{2rev}} \frac{\partial^2 \mu_{2rev}}{\partial \cos^2(3\varphi_\epsilon)} \\
&+ \frac{\partial \omega_6}{\partial \mu_{3rev}} \frac{\partial^2 \mu_{3rev}}{\partial \cos^2(3\varphi_\epsilon)} \\
\frac{\partial^2 \omega_6}{\partial Q_\epsilon \partial \cos(3\varphi_\epsilon)} &= \frac{\partial^2 \omega_6}{\partial Q_\epsilon \partial Q_{\sigma_{rev}}} \frac{\partial Q_{\sigma_{rev}}}{\partial \cos(3\varphi_\epsilon)} + \frac{\partial^2 \omega_6}{\partial Q_\epsilon \partial Q_e} \frac{\partial Q_e}{\partial \cos(3\varphi_\epsilon)} \\
&+ \frac{\partial^2 \omega_6}{\partial Q_\epsilon \partial \mu_{2rev}} \frac{\partial \mu_{2rev}}{\partial \cos(3\varphi_\epsilon)} + \frac{\partial^2 \omega_6}{\partial Q_\epsilon \partial \mu_{3rev}} \frac{\partial \mu_{3rev}}{\partial \cos(3\varphi_\epsilon)} \quad (293)
\end{aligned}$$

les dérivées premières et secondes de  $Q_{\sigma_{rev}}$ ,  $Q_e$ ,  $\mu_{2rev}$ , et  $\mu_{3rev}$  par rapport  $\cos(3\varphi_\epsilon)$  étant calculées selon des expressions similaires ? (125) et (126).

Valeurs des paramètres utilisés pour le NiTi Mémométal ? 60 ?C : 1- Loi purement réversible (revue Euro EF)

$$\begin{aligned}
k &= 270000MPa \\
\mu_{1rev} &= 28000MPa \\
\alpha_{1rev} &= 0.003 \\
\alpha_{3rev} &= 0.003 \\
Q_{\sigma_{0rev}} &= 366MPa \\
\gamma_{Q_{\sigma_{rev}}} &= 0.9 \\
n_{\sigma_{rev}} &= 0.1 \\
Q_{\epsilon_{0rev}} &= 0.074 \\
\gamma_{Q_{\epsilon_{rev}}} &= 0.5 \\
n_{\epsilon_{rev}} &= 0.2 \\
\mu_{02rev} &= 200MPa \\
\gamma_{\mu_{2rev}} &= 0 \\
n_{\mu_{2rev}} &= 1 \\
\mu_{03rev} &= 10000MPa \\
\gamma_{\mu_{3rev}} &= 0 \\
n_{\mu_{3rev}} &= 1 \quad (294)
\end{aligned}$$

2- Loi avec hystérésis (thèse)

$$\begin{aligned}k &= 270000MPa \\ \mu_{1rev} &= 19000MPa \\ \alpha_{1rev} &= 0.003 \\ \alpha_{3rev} &= 0.003 \\ Q_{\sigma_{0rev}} &= 200MPa \\ \gamma_{Q_{\sigma_{rev}}} &= 0.72 \\ n_{\sigma_{rev}} &= 0.2 \\ Q_{\epsilon_{0rev}} &= 0.074 \\ \gamma_{Q_{\epsilon_{rev}}} &= 0.5 \\ n_{\epsilon_{rev}} &= 0.2 \\ \mu_{02rev} &= 300MPa \\ \gamma_{\mu_{2rev}} &= 0 \\ n_{\mu_{2rev}} &= 1 \\ \mu_{03rev} &= 10000MPa \\ \gamma_{\mu_{3rev}} &= 0 \\ n_{\mu_{3rev}} &= 1 \\ Q_{\sigma_{0hys}} &= 198MPa \\ \mu_{0hys} &= 12500MPa\end{aligned}\tag{295}$$

## 15 Eléments particuliers de calcul tensoriel

**Produit une fois contracté** : on contracte les vecteurs les plus proches ex :

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = (A^{ij} \hat{g}_i \otimes \hat{g}_j) \cdot (B^{kl} \hat{g}_k \otimes \hat{g}_l) = A^{ij} B^{kl} \hat{g}_{jk} \hat{g}_i \otimes \hat{g}_l = A^{ij} B_j^l \hat{g}_i \otimes \hat{g}_l \quad (296)$$

**Produits tensoriels** On introduit trois notations particulières à partir de deux tenseurs du premier ordre  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{B}$  :

$$\mathbf{T} = \mathbf{A} \bar{\otimes} \mathbf{B} = (A^{ij} \hat{g}_i \otimes \hat{g}_j) \bar{\otimes} (B^{kl} \hat{g}_k \otimes \hat{g}_l) = (A^{ik} \cdot B^{jl}) \hat{g}_i \otimes \hat{g}_j \otimes \hat{g}_k \otimes \hat{g}_l \quad (297)$$

$$\mathbf{T}' = \mathbf{A} \underline{\otimes} \mathbf{B} = (A^{ij} \hat{g}_i \otimes \hat{g}_j) \underline{\otimes} (B^{kl} \hat{g}_k \otimes \hat{g}_l) = (A^{il} \cdot B^{jk}) \hat{g}_i \otimes \hat{g}_j \otimes \hat{g}_k \otimes \hat{g}_l \quad (298)$$

$$\mathbf{T}'' = \mathbf{A} \overset{*}{\otimes} \mathbf{B} = 1/4 \cdot (A^{ik} \cdot B^{jl} + A^{jk} \cdot B^{il} + A^{il} \cdot B^{jk} + A^{jl} \cdot B^{ik}) \hat{g}_i \otimes \hat{g}_j \otimes \hat{g}_k \otimes \hat{g}_l \quad (299)$$

Dans le cas où les tenseurs  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{B}$  sont symétriques et qu'on cherche à obtenir un opérateur qui conduise à un résultat intrinsèquement symétrique par rapport aux deux premiers indices et par rapport aux deux derniers indices, par exemple dans le cas (qui nous intéresse ici) où on cherche à calculer un opérateur tangent, i.e à déterminer un tenseur du quatrième ordre  $\mathbf{T}$  qui sera "a priori" utilisé en double contraction avec un tenseur du quatrième ordre symétrique pour les deux premiers indices et les deux derniers (construit à partir du produit tensoriel d'un incrément de déplacement ou de vitesse ou de vitesse virtuelle avec un second tenseur du même type). Dans tous les cas, le fait de cette contraction, supprimera tous les termes n'ayant pas la symétrie de base. Ainsi soient par exemple  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{F}$ , symétriques du second ordre et  $\mathbf{Z} = \mathbf{E} \otimes \mathbf{F}$  du quatrième ordre étant donc par construction symétrique par rapport aux deux premiers indices et par rapport aux deux derniers indices. On a la relation importante suivante :

$$\mathbf{T} \dot{\vdash} \mathbf{Z} = \mathbf{T}' \dot{\vdash} \mathbf{Z} = \mathbf{T}'' \dot{\vdash} \mathbf{Z} \quad (300)$$

Donc l'opérateur  $\overset{*}{\otimes}$  agit comme filtrant les parties non symétriques qui de toute manière, disparaissent dans l'expression finale. Ainsi d'une manière pratique, au niveau de l'implémentation informatique, on utilisera "pour l'opérateur tangent" l'opérateur  $\overset{*}{\otimes}$  à la place de l'opérateur  $\bar{\otimes}$  et de  $\underline{\otimes}$ , bien que ces opérateurs soient différents intrinsèquement.

On remarque donc que le tenseur  $\mathbf{T}''$ , de part sa construction, est symétrique par rapport aux deux premiers indices et par rapport aux deux derniers indices :  $T''^{ijkl} = T''^{jikl} = T''^{ijlk} = T''^{jilk}$ . Il a donc 36 composantes différentes d'où la possibilité d'avoir un stockage plus compacte que tenseur général du 4<sup>ieme</sup> représenté par 81 coefficients.

## 16 Remarques concernant l'identification de potentiels

Il s'agit ici d'une première rédaction !!

Supposons que l'on souhaite identifier un potentiel du type de celui proposé par Denis Favier 6.5.1. On rappelle son expression :

$$\omega_3 = \frac{K_{rev}}{6} \ln^2(V) + \frac{Q_{\sigma_{rev}}^2}{2\mu_{1rev}} \ln \left( \cosh \left( \frac{2\mu_{1rev} Q_\epsilon}{Q_{\sigma_{rev}}} \right) \right) + \mu_{2rev} Q_\epsilon^2$$