

Cours sur la méthode des éléments finis

première partie

Université de Bretagne Sud
École Nationale Supérieure d'Ingénieurs de Bretagne Sud
(UBS - ENSIBS)
Gérard Rio

17 mars 2009

Table des matières

1	Introduction	4
1.1	Importance de la méthode	5
1.2	intérêts et limitations de la méthode des éléments finis	5
1.3	Généralités sur la résolution de problèmes aux dérivées partielles	6
1.3.1	Comparaison des méthodes différences finis et éléments finis	7
1.4	Description générale de la méthode des éléments finis	7
2	Discrétisation	8
2.1	Généralités : approximation par valeurs aux nœuds d'une fonction	8
2.1.1	Introduction	8
2.1.2	Les grandes lignes de la méthode dans le cas 1D	8
2.1.3	Formes générales de l'interpolation 1D	11
2.1.4	Intérêt de l'approximation	11
2.2	Interpolation de LAGRANGE :	11
2.3	Extension de l'interpolation nodale	13
2.4	Approximation (ou interpolation lorsque l'on connaît les valeurs nodales) par élément finis.	14
2.4.1	Extension aux cas 2D et 3D	16
3	Discrétisation de la géométrie	16
3.1	Règle de partition du domaine en éléments.	17
3.2	Formes d'éléments classiques :	17
3.3	Notion d'élément de référence :	17
3.4	Formes d'éléments de référence classiques	24
3.5	Maillage et tableau classique de description	24
3.6	Quelques remarques sur les grandes classes d'élément Nous n'avons pas donné d'information particulière concernant la continuité inter-élément. . .	25

4	Expression de différents types d'interpolation classique	27
4.1	Eléments à une dimension	27
4.1.1	linéaire : 2 nœuds, C^0	27
4.1.2	quadratique : 3 nœuds, C^0	27
4.1.3	Continuité C^1 , polynômes d'HERMITE, 2 nœuds, cubique	27
5	Formulation variationnelle	30
5.1	Introduction	30
5.2	Les grandes lignes de la méthode des puissances virtuelles (présentation intuitive)	30
5.3	Idées générales à l'aide d'opérations de projection	32
5.4	Cas d'un espace de fonctions discrétisées par éléments finis, définition des fonctions de base	33
5.5	Cas d'une équation aux dérivées partielles dans le domaine de la mécanique.	34
5.5.1	Formulation variationnelle de l'équation locale d'équilibre mécanique.	35
5.5.2	Formulation "faible"	35
5.6	Remarques sur les continuités pour les fonctions approchées	36
6	Autres présentations des formulations variationnelles	36
6.1	Méthodes des résidus pondérés	36
6.2	Méthode de Galerkin	37
6.3	Méthode de Ritz	37
6.3.1	Principe mathématique : minimisation au sens des moindres carrés	37
6.3.2	Principe physique : minimum d'énergie	38
6.4	Principe des puissances virtuelles et des travaux virtuels, équations complètes	38
6.5	Méthode de collocation	39
6.6	Résumé sur les différentes méthodes.	40
7	Application du principe variationnel à une discrétisation par éléments finis	41
7.1	Cas de la déformation mécanique élastique d'un solide en statique linéaire .	41
7.1.1	L'intégrale sur l'élément :	43
7.1.2	L'intégrale éventuelle sur la frontière de l'élément :	44
7.1.3	Expression matricielle de la forme variationnelle	44
7.1.4	Exemple de la traction d'une poutre.	47
7.2	Cas général de la déformation mécanique d'un solide en statique	51
7.3	Remarque sur l'intégration par partie, à partir d'exemples	51
7.3.1	Deux Exemples d'équations aux dérivées partielles représentant un phénomène mécanique.	51
7.3.2	Généralisation et formulations variationnelles	52
8	Méthodes numériques	55
8.1	Assemblage des matrices de raideur et de second membre	55
8.2	Intérêt d'un stockage particulier pour la matrice de raideur - cas du stockage bande	57

8.2.1	Particularités du stockage bande	58
8.2.2	Stockage ligne de ciel (skyline)	59
8.2.3	Matrices creuses	60
8.3	Prise en compte des conditions limites sur les inconnues nodales	60
8.3.1	Cas d'un degré de liberté fixé	61
8.3.2	Cas d'une relation linéaire entre degrés de liberté	62
8.4	Méthodes numériques d'intégration	64
8.4.1	Intégration à une dimension	64
8.4.2	Intégration à deux ou trois dimensions	65
8.5	Résolution de systèmes linéaires	66
9	Résolution de problèmes non linéaires	67
9.1	Introduction	67
9.2	Méthode de NEWTON RAPHSON	67
9.3	Méthode incrémentale	70
9.4	Méthode de NEWTON modifiée	70
9.5	Sur-relaxation et sous-relaxation	71
9.6	Mesure de la convergence	72
9.7	Remarque sur le pilotage de la recherche de solution	73
9.8	Autres méthodes pour la résolution des non-linéarités	74

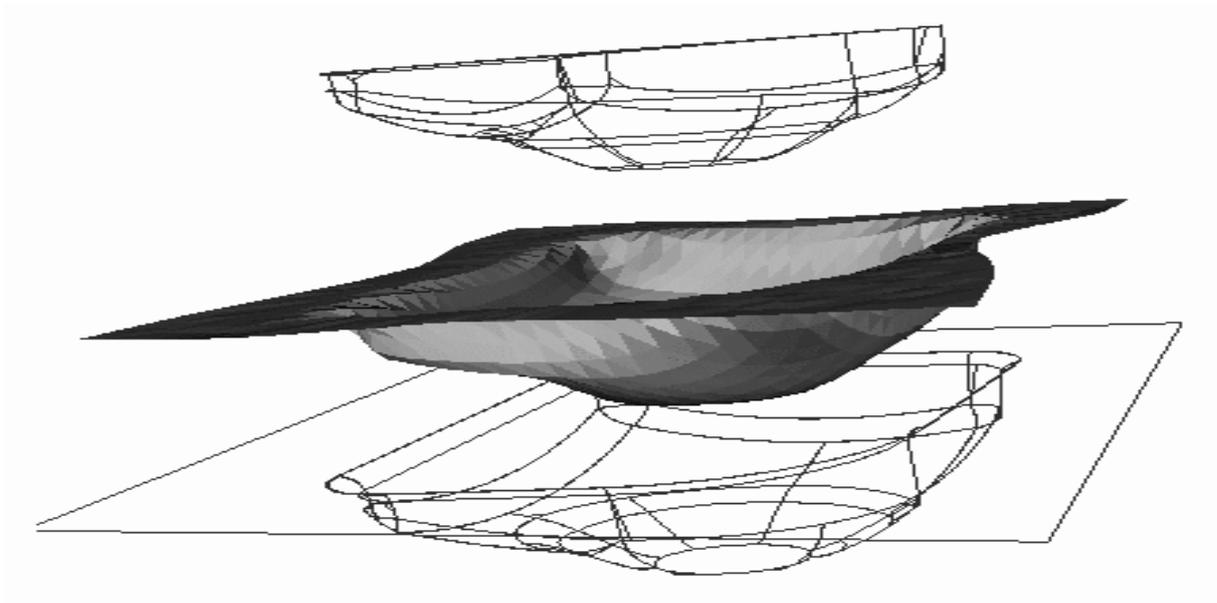


FIG. 1 – Exemple de la simulation de l’emboutissage d’un support d’amortisseur, véhicule Twingo de chez Renault

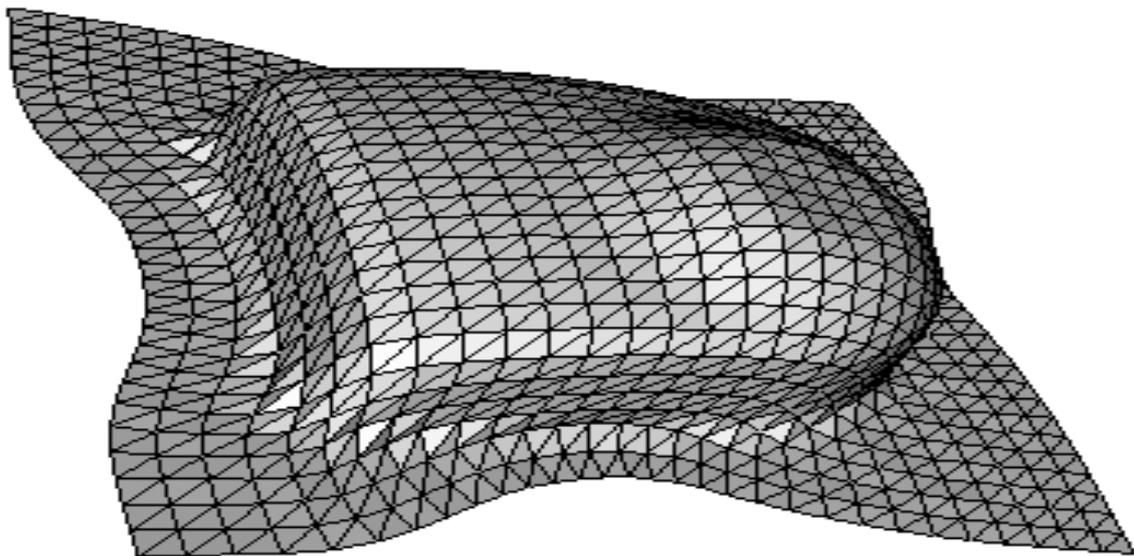


FIG. 2 – Pièce seule, maillée.

1 Introduction

La méthode des éléments finis est une méthode de résolution approchée d’équations aux dérivées partielles. D’une manière plus humoristique il s’agit de remplacer un problème compliqué pour lequel a priori on ne connaît pas de solution, par un problème plus simple

que l'on sait résoudre.

D'une manière pratique la méthode est en grande majorité des cas mise en oeuvre via des codes de calcul informatiques. Ces outils de calcul sont aujourd'hui largement utilisés industriellement.

1.1 Importance de la méthode

De très nombreux problèmes physiques s'expriment sous forme d'équations aux dérivées partielles soumises à des conditions aux limites particulières.

- mécanique des solides déformables,
- mécanique des fluides,
- conduction thermique,
- électromagnétisme - électrostatisme,
- chimie, génie atomique (?)

Dans cet exposé, on se restreint au cas de la mécanique du solide, mais les méthodes présentées sont transposables aux autres domaines de la physique, souvent avec très peu de modifications.

Quelques exemples de problèmes mécaniques résolus de manière courante par éléments finis :

- a) Dimensionnement des structures pour des engins de transports ferroviaire, routier, naval ou aéronautique,
- b) dimensionnement de pièces de sécurité en génie civil par exemple,
- c) simulation numérique du comportement de prototype → maquette numérique, l'exemple du crash de véhicule,
- d) simulation numérique d'état ultime, tel le comportement de centrale nucléaire dans le cas de dysfonctionnement,
- e) etc.

De manière industrielle, l'objectif est souvent la diminution des coûts, en cernant mieux la réalité physique. D'autre fois par exemple via la simulation, l'objectif est d'investiguer des domaines difficiles ou dangereux. Par exemple, que se passe-t-il lorsqu'un TGV prend feu à mi-chemin dans le tunnel sous la manche ? Quel élément est-il préférable d'améliorer dans les structures ? Bien qu'une expérimentation finale grandeur nature soit souvent le seul arbitre définitif, il est beaucoup plus aisé d'utiliser une simulation pour chercher à optimiser les paramètres.

Remarques sur les termes de dimensionnement et de simulation :

Dimensionnement : l'objectif est de trouver la bonne dimension, ou le bon matériau, répondant avec une marge de sécurité suffisante à une contrainte donnée : exprimée par exemple en charge ou en déplacement.

Simulation : l'objectif est d'étudier le comportement d'une pièce ou structure, qui éventuellement n'existe pas encore, dans différentes plages de fonctionnement : normale ou exceptionnelle.

1.2 intérêts et limitations de la méthode des éléments finis

La méthode permet d'aborder la quasi totalité des phénomènes et particularités de la mécanique du solide :

- les phénomènes de comportement statique en petites et grandes transformations, c'est-à-dire grandes déformations et/ou grands déplacements,
- les différentes classes de lois de comportement existantes, des lois simples linéaires, aux lois pouvant être fortement non-linéaires comme l'élasto-visco-plasticité,
- les phénomènes thermiques et/ou thermo-mécanique couplés,
- les phénomènes d'instabilité de flambage,
- les phénomènes transitoires et/ou dynamiques qui regroupent les cas d'impacts lents (crash) ou rapides dans le domaine militaire, les cas de vibrations de structures ou même vibrations acoustiques,
- etc.

Au rang des performances de la méthode, remarquons aussi qu'elle n'est pas limitée par une géométrie particulière, il est possible d'étudier des pièces de taille et de forme quelconque. Dans le cas où ces données sont complexes, elles n'entraînent qu'un surcoût de temps de calcul. Ainsi le calcul est seulement borné par la puissance de l'ordinateur utilisée.

Enfin en terme de précision des résultats, celle-ci n'est en général limitée que par la précision interne de stockage de l'ordinateur et par le temps que l'on désire consacrer à la résolution, temps dépendant également de la puissance du calculateur.

Cette diversité montre la versatilité de la méthode.

Concernant les limitations de la méthode, il faut noter une assez grande complexité de mise en oeuvre, d'autant plus importante que l'on aborde des phénomènes et/ou géométries et/ou comportements matériels complexes. Par exemple il est possible de simuler une opération complète de mise en forme par emboutissage, ou un phénomène de crash d'automobile, ou encore le comportement d'un implant osseux, mais ces possibilités ne sont réellement accessibles qu'à un public spécialisé.

Néanmoins dans le cas de structures et de sollicitations assez simples qui était naguère étudié essentiellement via les techniques de la résistance des matériaux, les logiciels de calcul moderne fondés sur les éléments finis apportent un gain de performance non négligeable tout en pouvant rester simples d'utilisation. Par contre, il n'est pas rare que l'utilisateur ainsi initié aux éléments finis, vu les possibilités de la méthode, manifeste un intérêt croissant pour des calculs de plus en plus complexes !

Notons également que d'une part le coût actuel des ordinateurs allié à des performances toujours accrues, et d'autre part le faible coût des logiciels généraux de base rendent de plus en plus accessible l'outil éléments finis aux entreprises. Dans la pratique on observe une banalisation des codes de calcul éléments finis, alors qu'il y a seulement 25 ans, ces outils n'étaient réservés qu'aux très grandes entreprises telles que la construction automobile, aérospatiale, les industries d'armements etc.

1.3 Généralités sur la résolution de problèmes aux dérivées partielles

On se réfère aux équations de la mécanique des milieux continus mais il faut noter que l'analyse est tout à fait générale.

Bien que la connaissance de ces équations soit parfois ancienne, plusieurs datant de plus d'un siècle, seuls très peu de cas peuvent être résolus exactement (analytiquement) par les mathématiques classiques.

A partir du début du siècle et surtout après la seconde guerre mondiale deux tendances se sont fait jour pour tenter d'obtenir une solution approchée via des méthodes numériques c'est-à-dire hors résolution analytique.

La méthode directement issue des mathématiciens, les différences finies, s'appuie sur des bases rigoureuses et la convergence vers la solution exacte est garantie.

La méthode des éléments finis est issue des mécaniciens. Cette méthode s'est développée d'une manière très intuitive à ses débuts et rien ne prouvait a priori une convergence vers la solution exacte.

De nos jours les éléments finis sont entrés de plein pied dans le monde des mathématiques. Dans de nombreux cas on a pu montrer la convergence absolue de la méthode, mais d'un point de vue général le problème est encore ouvert.

1.3.1 Comparaison des méthodes différences finis et éléments finis

Dans le cas d'équations aux dérivées partielles du premier et du second ordre, cas le plus fréquent, la méthode des éléments finis est en général plus performante que celle relative aux différences finies, ce qui explique leur large emploi.

Par exemple en mécanique des solides déformables, les différences finies sont absentes.

Dans le cas d'équations aux dérivées partielles du nième ordre > 2 , les éléments finis posent de nombreux problèmes, difficiles à résoudre, que n'ont pas les différences finies, qui elles permettent aisément d'exprimer une dérivée d'ordre n .

D'autre part les différences finies étant d'une manipulation plus simple que les éléments finis, elles sont préférées lorsque les conditions limites le permettent. C'est le cas de nombreux problèmes de thermique et de mécanique des fluides.

D'une manière générale on peut dire que ces méthodes se complètent et il n'est pas rare de voir dans un même problème une partie traitée en éléments finis et une autre en différences finies. Par exemple en mécanique des milieux continus, la partie temporelle est discrétisée par une technique de différences finies et la partie espace par éléments finis.

1.4 Description générale de la méthode des éléments finis

La méthode englobe trois domaines principaux.

- Les méthodes de discrétisation qui permettent de transformer un problème continu en une approximation discrète,
- les méthodes variationnelles qui permettent de transformer une équation aux dérivées partielles (EDP) en une forme approchée "variationnelle",
- les méthodes numériques qui permettent de résoudre les systèmes d'équations linéaires, non linéaires ..., recherche de valeurs propres

Le tout allié à des moyens de calcul qui exécutent les instructions de plus en plus rapidement actuellement.

Ainsi le cours va aborder successivement ces trois parties.

2 Discrétisation

2.1 Généralités : approximation par valeurs aux nœuds d'une fonction

2.1.1 Introduction

L'objectif de la méthode est de déterminer des fonctions inconnues telles que les fonctions déplacements, contraintes ou déformations, dépendant du temps. On parle de "champs" de déplacement, contraintes ou déplacement pour indiquer qu'il y a autant de fonctions inconnues que de points différents. Un champ de fonction regroupe donc une infinité de fonctions inconnues. Dans notre cas on se place à un certain temps "t" fixé. Alors la connaissance du champ est équivalente à celle d'une infinité de scalaires correspondant aux valeurs de la fonction en chaque point. L'infini étant difficile à atteindre!, nous avons utilisé une méthode de discrétisation pour simplifier le problème. La méthode retenue consiste à rechercher une solution approchée aux fonctions inconnues sous forme d'une somme finie de fonctions connues pondérées par des coefficients inconnus à déterminer.

2.1.2 Les grandes lignes de la méthode dans le cas 1D

Dans le cas courant, l'inconnue principale s'avère être le champ de déplacement $\vec{U}(x)$. Les autres inconnues, contraintes et déformations, sont déterminées dans une seconde phase à partir de la fonction déplacement, on parle d'inconnues secondaires. Supposons que l'on cherche à approcher la valeur d'une fonction $U(x)$ sur un certain domaine réel $[a, b]$. Dans le cadre des éléments finis on recherche une approximation en général à partir de fonctions polynomiales. On va donc chercher à approcher $U(x)$ sous forme d'une somme de fonctions polynomiales pondérées par des coefficients inconnus. Par exemple on pourrait écrire :

$$U(x) \approx a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \quad (1)$$

Avec cette approximation, $U(x)$ est déterminée à l'aide de 4 paramètres a_i .

Il est clair qu'avec cette technique, plus la fonction $U(x)$ sera complexe, plus il sera nécessaire d'avoir un nombre important de paramètres. Pour des raisons de stabilité que nous verrons par la suite dans le cours, d'évolution de fonction, dans le cadre des éléments finis, on dépasse rarement 4 paramètres, c'est-à-dire une interpolation cubique. Dans de nombreux cas on préfère même utiliser une interpolation linéaire! Dans ce cas il n'est possible d'approcher correctement $U(x)$ que sur un intervalle petit, sur lequel son évolution sera peu complexe. Ainsi, lors d'une approximation de $U(x)$ sur une grande étendue, l'idée est de décomposer cet intervalle d'étude en une somme de petit intervalle, tels que sur chacun d'eux on puisse se contenter d'une approximation polynomiale simple.

La figure (3) montre une telle approximation par section linéaire. L'intervalle initial a été décomposé en 3. Les intervalles ainsi définis, sont appelés **éléments finis**.

Cet exemple permet d'illustrer une règle qui est vérifiée en général, l'augmentation du nombre d'éléments finis, permet à partir de l'approximation U_a d'approcher plus finement la solution exacte U .

Sur chaque élément fini la fonction approchée est définie à partir de ses valeurs en des points particuliers, ici les extrémités de l'élément fini. Chaque extrémité de l'élément est

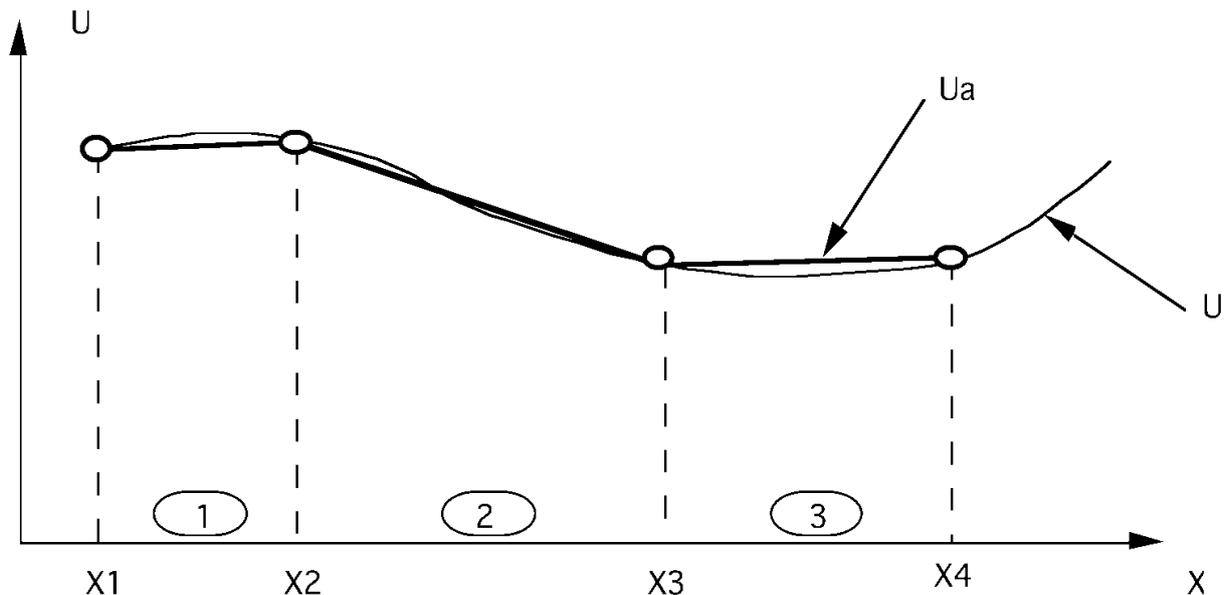


FIG. 3 – approximation lineaire et erreur correspondante

appelée **un nœud** (d'interpolation). La connaissance de U en chaque nœud est suffisante pour définir complètement la fonction approchée U_a .

Dans le cadre de la recherche de la fonction inconnue U , on peut donc la remplacer par la recherche de ses valeurs aux nœuds : ici 4 valeurs, ce qui est évidemment plus simple qu'une infinité de valeurs. Par contre il faut se rappeler que l'on commet une erreur systématique en utilisant U_a à la place de U , erreur que l'on peut en général diminuer à volonté en augmentant le nombre d'éléments finis.

Enfin notons que les valeurs de la fonction U aux nœuds sont appelées **valeurs nodales**. Elles constituent en fait les inconnues d'un problème éléments finis.

Sur chaque élément fini, on peut également utiliser des polynômes de base autres que linéaires, par exemple quadratiques ou cubiques. Dans le premier cas il sera nécessaire d'utiliser 3 nœuds pour définir la fonction approchée, et 4 dans le second cas.

La figure (4) illustre le cas de l'utilisation de deux éléments finis quadratiques. Par exemple pour l'élément 1, les trois nœuds (X_1 , X_2 , X_3) définissent complètement la fonction U_a approchée.

La figure (11) représente le cas d'une interpolation cubique.

Remarque On observe sur les figures, que les fonctions approchées sont continues d'un élément à l'autre, par contre la dérivée de la fonction approchée entre deux éléments, n'est pas continue. On parle de continuité C_0 . C'est ce type d'approximation qui est en général utilisée dans le cadre des éléments finis classiques. Mais il existe une grande variété d'éléments particuliers, qui utilisent des continuités différentes : par exemple la dérivée peut être continue entre éléments, ou au contraire la fonction elle-même peut dans certains cas ne pas être continue d'un élément à l'autre sans pour cela nuire à la précision du résultat final!

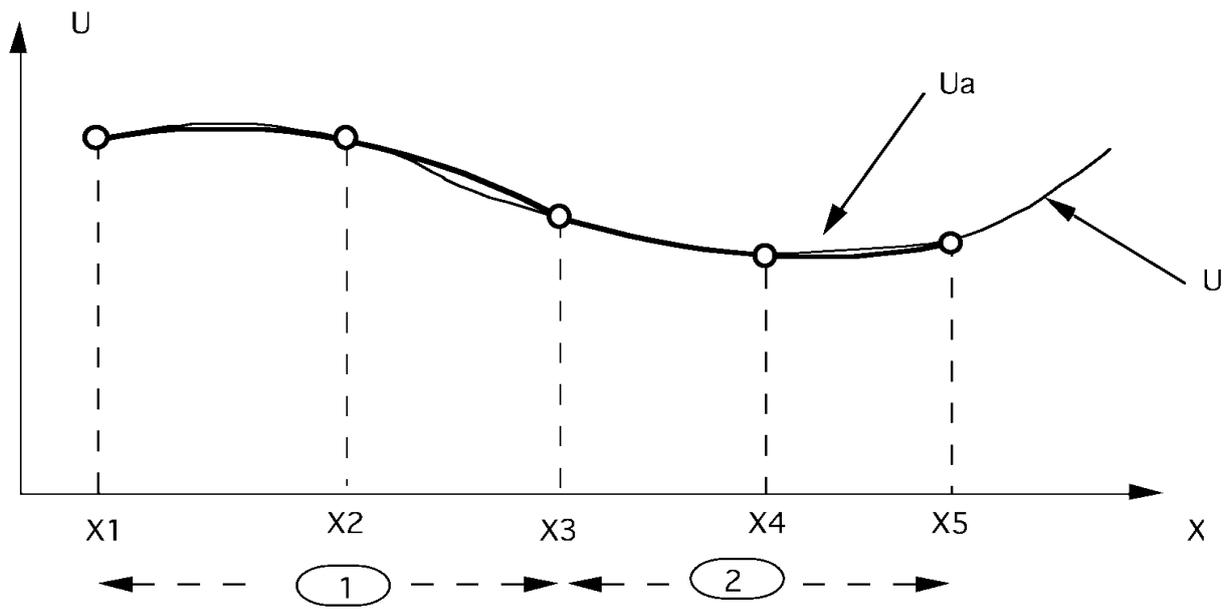


FIG. 4 – approximation quadratique

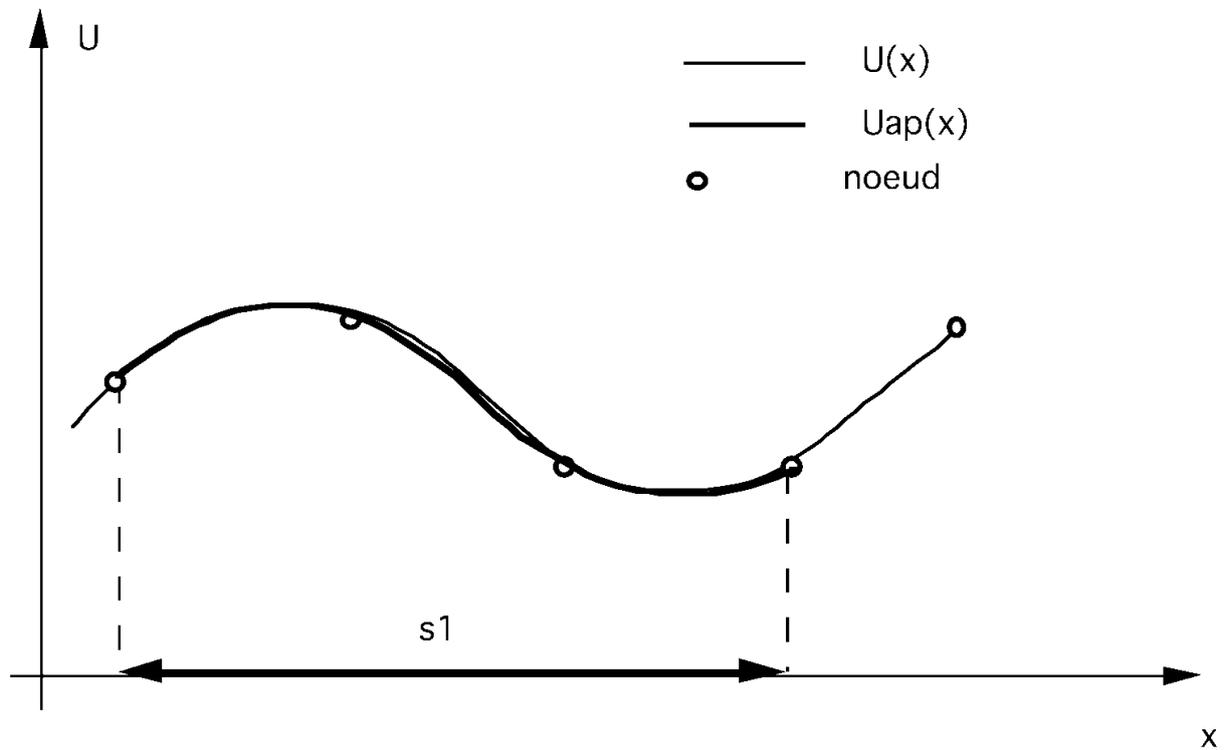


FIG. 5 – Approximation par éléments finis cubiques.

2.1.3 Formes générales de l'interpolation 1D

Supposons que l'on cherche à approcher la valeur d'une fonction $U(x)$ sur un certain domaine. On pose :

$$\begin{aligned} U(x) &= \sum_{r=1}^n N_r(x)U(x_r) + e(x) \\ &= U_{ap}(x) + e(x) \end{aligned} \quad (2)$$

Le terme $U_{ap}(x)$ constitue une approximation de la fonction $U(x)$ et le terme $e(x)$ représente l'erreur commise sur le calcul de la fonction si l'on retient $U_{ap}(x)$ à la place de $U(x)$. On remarque que dans le calcul de la fonction approchée, on n'utilise la fonction $U(x)$ que pour des abscisses particulières x_r . En dehors de ces abscisses on utilise un ensemble de fonctions $N_r(x)$ connues.

Les $U(x_r)$ constituent les "variables nodales" de l'approximation, et les x_r sont les nœuds de l'approximation.

L'approximation est telle qu'en chaque point $x_r : U(x_r) = U_{ap}(x)$ et $e(x_r) = 0$ c'est-à-dire $N_r(x_r) = 1$ et $N_r(x_p) = \delta_r^p$

2.1.4 Intérêt de l'approximation

- **1er cas : la fonction n'est pas connue** : L'intérêt de l'approximation proposée est de transformer une fonction inconnue continue $U(x)$ c'est-à-dire une infinité de valeurs non connues, en un nombre fini d'inconnues $U(x_r) = U_r$. On dit que l'on a discrétisé la fonction.
- **second cas : la fonction n'est connue qu'en des points particuliers par exemple expérimentaux** : A l'aide de l'approximation on a accès à une "vraie" fonction que l'on peut intégrer, dériver ...

Les fonctions N sont appelées fonctions d'interpolation.

Nous allons étudier quelques formes génériques de fonctions d'interpolation : LAGRANGE pour les fonctions continues C^0 , HERMITE pour les continuités C^1 c'est-à-dire que les dérivées sont continues d'un élément à l'autre. Dans la pratique l'interpolation de LAGRANGE est la plus courante.

2.2 Interpolation de LAGRANGE :

Soit une fonction U dont on connaît la valeur U_i en n points x_i d'où

$$U_{ap}(x) = \sum_{r=1}^n L_r(x)U_r \quad (3)$$

On cherche une forme polynomiale pour les fonctions d'interpolation. Les $L_r(x)$ sont appelées les polynômes de LAGRANGE et l'on a :

$$L_r(x) = \prod_{i=1, i \neq r}^n \frac{(x - x_i)}{(x_r - x_i)} \quad (4)$$

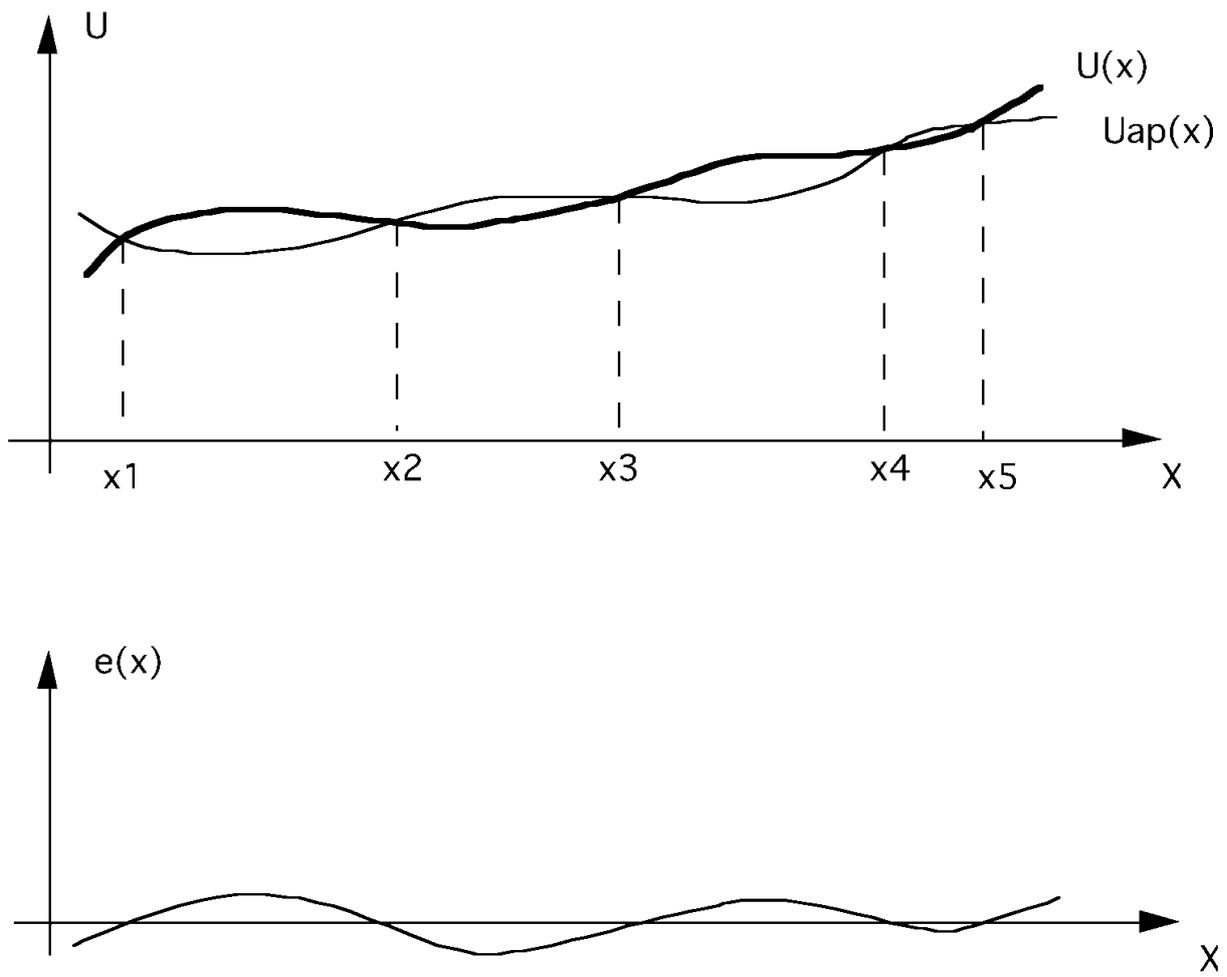


FIG. 6 – approximation et erreur correspondante

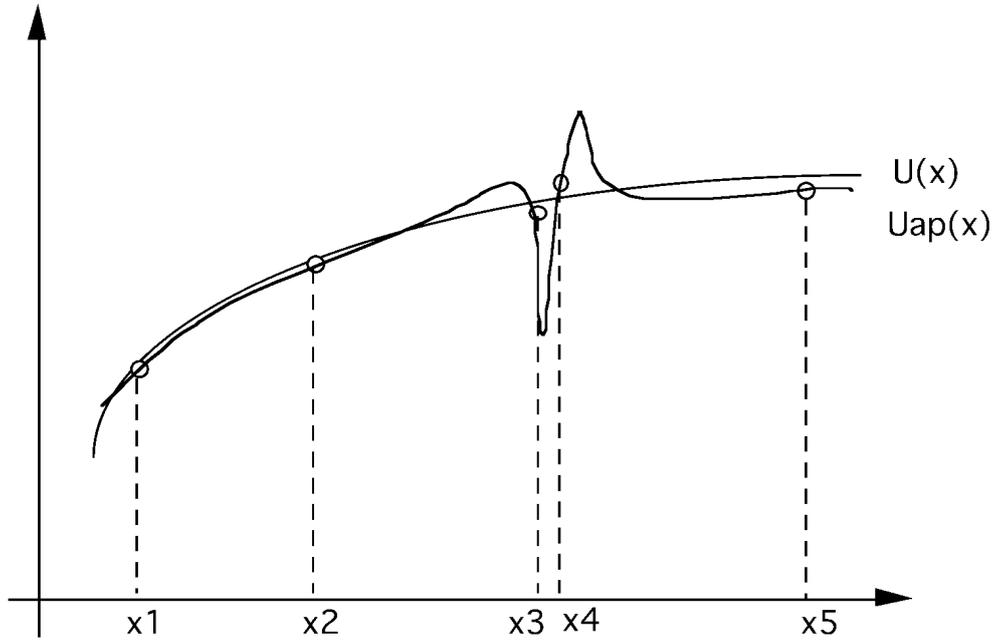


FIG. 7 – oscillation d’une fonction interpolée $U_{ap}(x)$ relativement à une fonction exacte $U(x)$ dont on connaît approximativement quelques valeurs, dont deux d’abscisses très proches.

Ainsi le polynôme $L_r(x)$ est d’ordre $n-1$. Les polynômes $L_r(x)$ ont les propriétés suivantes :

$$L_r(x_i) = \delta_{ri} \quad (5)$$

NB : Quelques inconvénients de l’interpolation LAGRANGE :

- (i) Plus le nombre de points x_i augmente, plus le degré des polynômes d’interpolation augmente, ce qui peut conduire rapidement à des grandes tailles de polynômes et des calculs longs et complexes.
- (ii) Lorsque deux nœuds d’interpolation sont très proches l’un de l’autre relativement aux autres distances, il peut apparaître des phénomènes d’oscillation au niveau de la fonction interpolée, notamment lorsque les valeurs aux nœuds ne sont pas connues avec une précision suffisante, par exemple dans le cas de valeurs relevées expérimentalement (cf la figure 7).

2.3 Extension de l’interpolation nodale

D’une manière générale on écrit :

$$\begin{aligned}
 U_{ap}(x) &= \sum_{r=1}^n \sum_{t=1}^p W^{rt} P_{rt}(x) \\
 U_{ap}(x) &= \langle P_{rt}(x) \rangle (W^{rt})
 \end{aligned} \quad (6)$$

Au lieu d’utiliser uniquement à chaque nœud la valeur de la fonction $U(x_r)$, qui serait égale

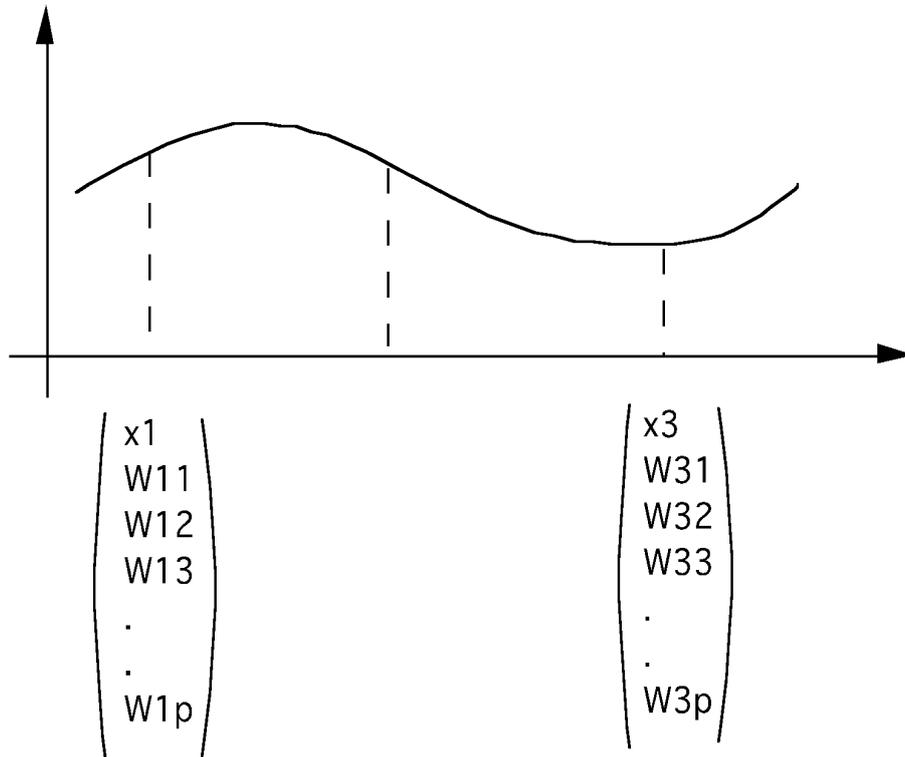


FIG. 8 – interpolation utilisant plusieurs valeurs à chaque nœud

à W^{r1} pour le nœud r par exemple, on y adjoint un ensemble de valeurs supplémentaires cf la figure 8, par exemple $\frac{\partial U}{\partial x} = W^{r2}$, $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = W^{r3}$ etc. A chaque nœud on a un ensemble de variables nodales. Suivant le type des fonctions d'interpolation et le choix des variables nodales, on balaye un grand nombre de méthodes classiques d'interpolation : Spline, B-Spline, Bezier, Hermite ...

NB :

- D'une manière identique au cas de l'interpolation de LAGRANGE, la complexité de la fonction d'interpolation final, augmente avec le nombre de points d'interpolation d'où l'idée d'un découpage en plusieurs sous-domaines et sur chacun des sous-domaines d'utiliser une interpolation simple.
- La formule générique 6 s'étend sans difficulté au cas tridimensionnel. Dans ce cas P_{rt} est une fonction de X^i $i=1$ 2 3 . Dans la suite du cours, sauf dans le cas particulier des polynômes d'hermite on considérera une interpolation simple dans laquelle à chaque nœud les variables nodales se réduisent à la valeur de la fonction au nœud c'est-à-dire $t=1$ dans la formule 6.

2.4 Approximation (ou interpolation lorsque l'on connaît les valeurs nodales) par élément finis.

Le domaine global d'investigation est décomposé en sous-domaines. Sur chacun de ces sous-domaines, une interpolation est définie comme précédemment cf (6). Pour un sous-

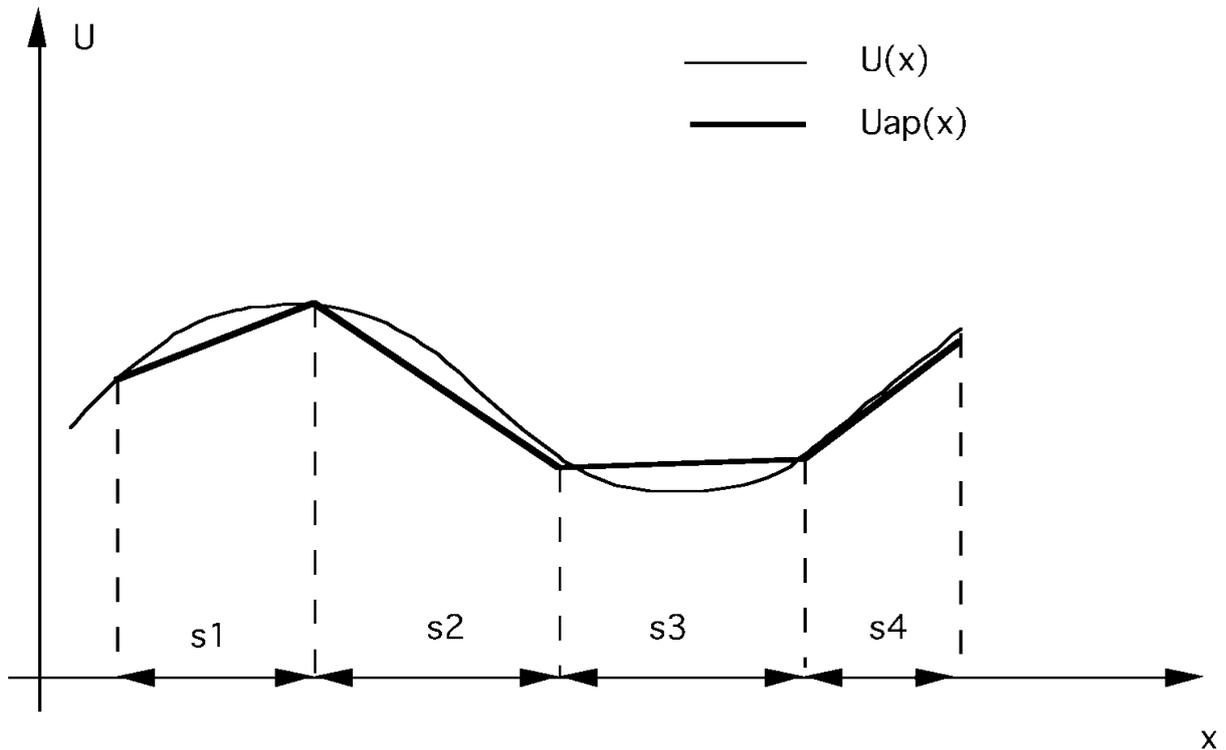


FIG. 9 – Approximation par éléments finis linéaires

domaine donné, lorsque n'interviennent dans la formule, que les variables nodales appartenant au sous-domaine et à sa frontière, on parle d'une interpolation de type éléments finis.

Sur un sous-domaine donné, l'interpolation est supposée autant de fois continuellement dérivables que nécessaire, par contre entre les différents éléments, a priori il n'y a pas de règle.

NB :

- Les sous-domaines sont appelés éléments finis,
- les points où $U_{ap}(X^i) = U(X^i)$ sont appelés nœuds d'interpolation,
- les valeurs $U(X^i)$ aux nœuds sont appelées valeurs nodales. Ce sont les paramètres de l'interpolation et en ce sens ils constituent les “degrés de liberté” de la fonction U_{ap} .

La figure (9) représente le cas d'une approximation linéaire. Sur chaque élément fini s_i l'interpolation est un segment qui rejoint les deux valeurs nodales.

Dans le cas de l'interpolation quadratique, figure (10), chaque élément fini utilise 3 points d'interpolation, donc trois nœuds. La figure (11) représente le cas d'une interpolation cubique.

Par la suite on ne fera référence qu'à U_{ap} , et non à la fonction exacte que l'on ne connaît pas, la fonction approchée sera notée U bien que ce ne soit que l'approximation.

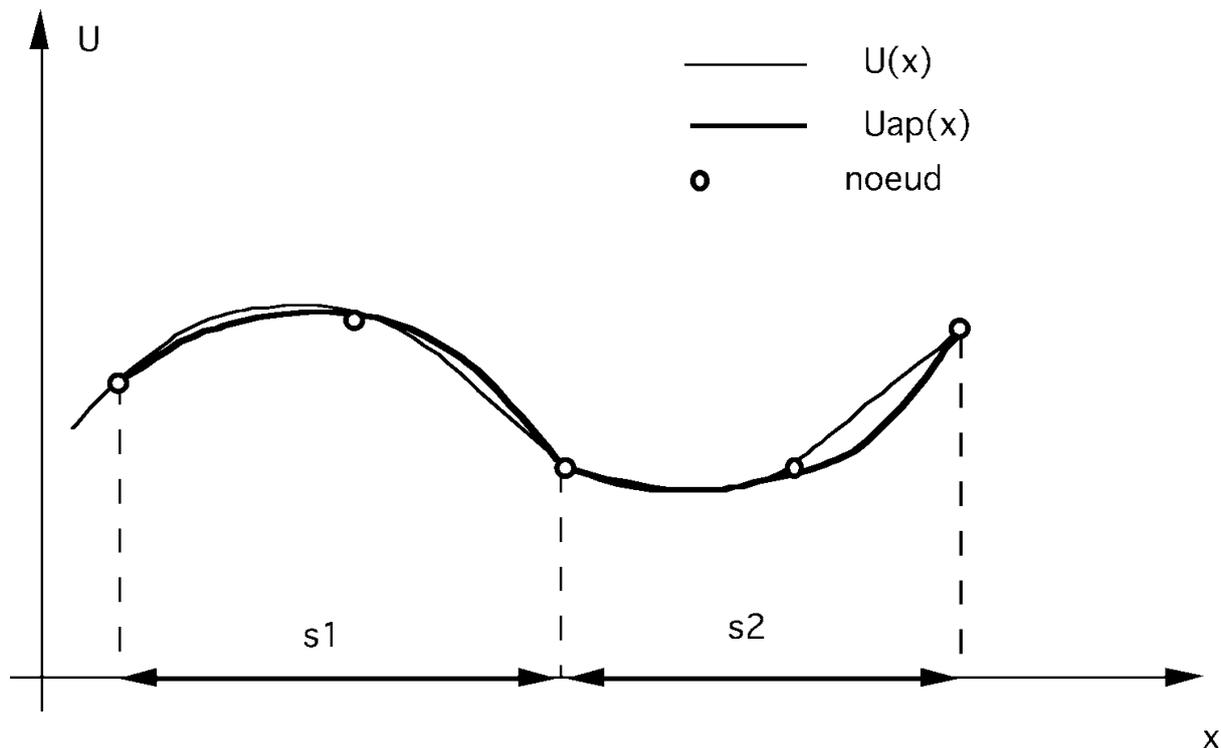


FIG. 10 – Approximation par éléments finis quadratiques

2.4.1 Extension aux cas 2D et 3D

Dans le cas d'un espace 2D, on utilise une discrétisation 1D selon l'axe X combinée à une discrétisation 1D selon l'axe Y . On obtient alors en général deux découpages possibles qui conduisent à des éléments triangulaires ou quadrangulaires, chacun pouvant être linéaire, quadratique ou cubique suivant le nombre de nœuds retenus pour chaque élément fini.

Dans le cas d'un espace 3D, on utilise une discrétisation 1D selon les trois axes. On obtient une plus large variété de découpages qu'en 2D : hexaèdre, pentaèdre, prisme, etc.

On verra par une petite description systématique des principaux éléments finis classiques.

3 Discrétisation de la géométrie

En mécanique du solide déformable, la forme de la pièce change pendant la transformation. Aussi en général le domaine géométrique sur lequel on travaille, est une inconnue que l'on approxime par interpolation entre des nœuds "géométriques".

Cette approximation est effectuée d'une manière identique au cas des fonctions U vu précédemment, elle ne pose pas de problème particulier. L'intérêt est de pouvoir décrire la géométrie initiale ou finale, simplement à partir d'un nombre restreint de valeurs, les coordonnées des nœuds.

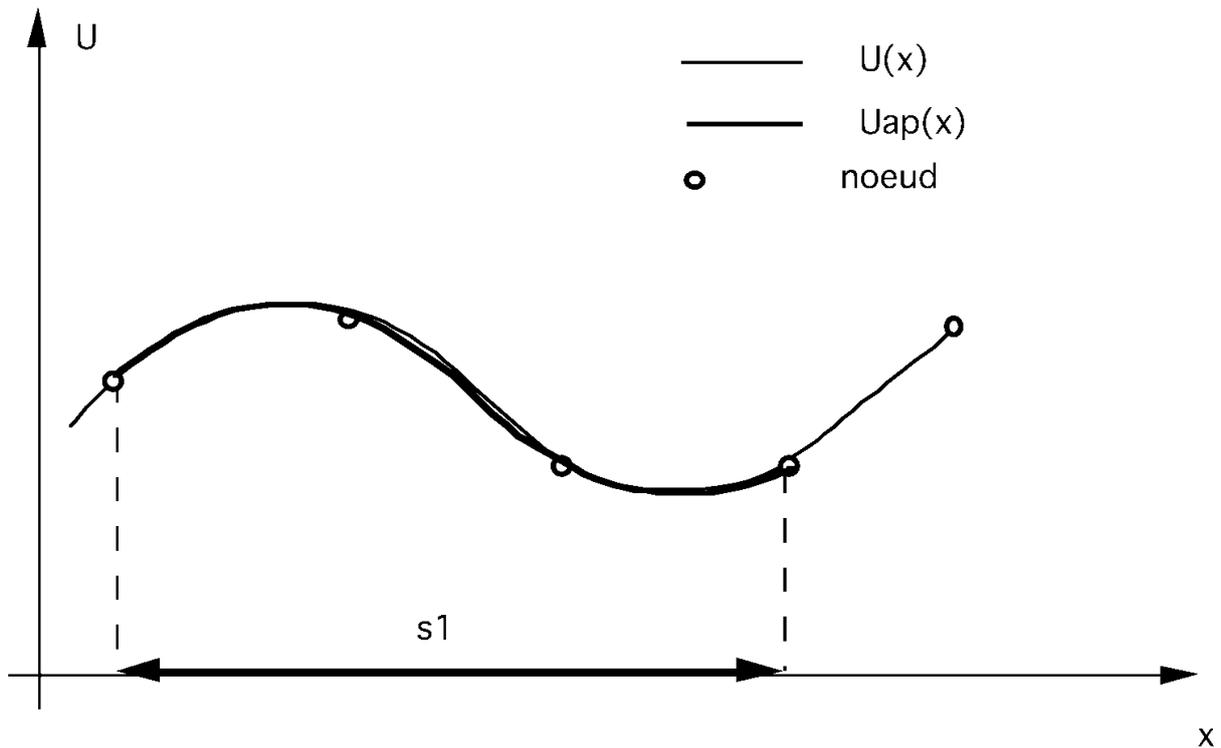


FIG. 11 – Approximation par éléments finis cubiques.

3.1 Règle de partition du domaine en éléments.

Ces règles sont importantes à observer pour obtenir un maillage, c'est-à-dire un découpage correct, de la pièce à calculer.

Il ne doit pas y avoir de recouvrement entre éléments ni de "trou", figure (12).

En 3D la frontière est constituée d'une surface, courbe ou d'un pt. Le comportement doit qualitativement être le même qu'en 2D.

3.2 Formes d'éléments classiques :

- 1) À une dimension, figure (13) .
- 2) Éléments de dimensions 2, figure (14) .
- 3) Éléments de dimensions 3 , figure (15) .

3.3 Notion d'élément de référence :

D'une manière générale, pour chaque élément nous avons une formule du type :

$$\vec{OM} = N_r(X^i) \vec{OM}^r \quad (7)$$

\vec{OM}^r représente la position des nœuds. Dans le cas d'éléments triangulaires cf figure (16) r varie de 1 à 3 dans la relation (7)

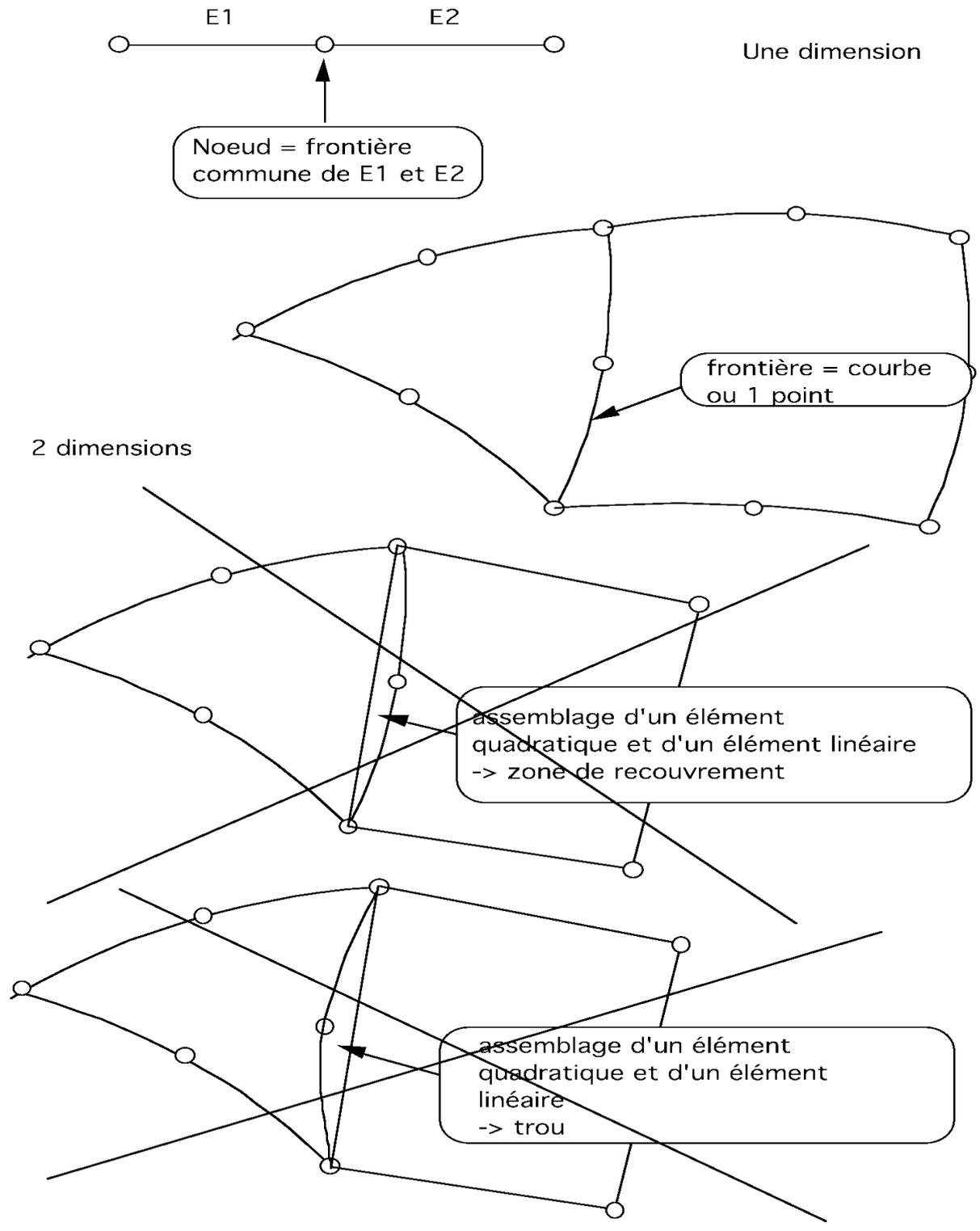


FIG. 12 – Différents types de frontière

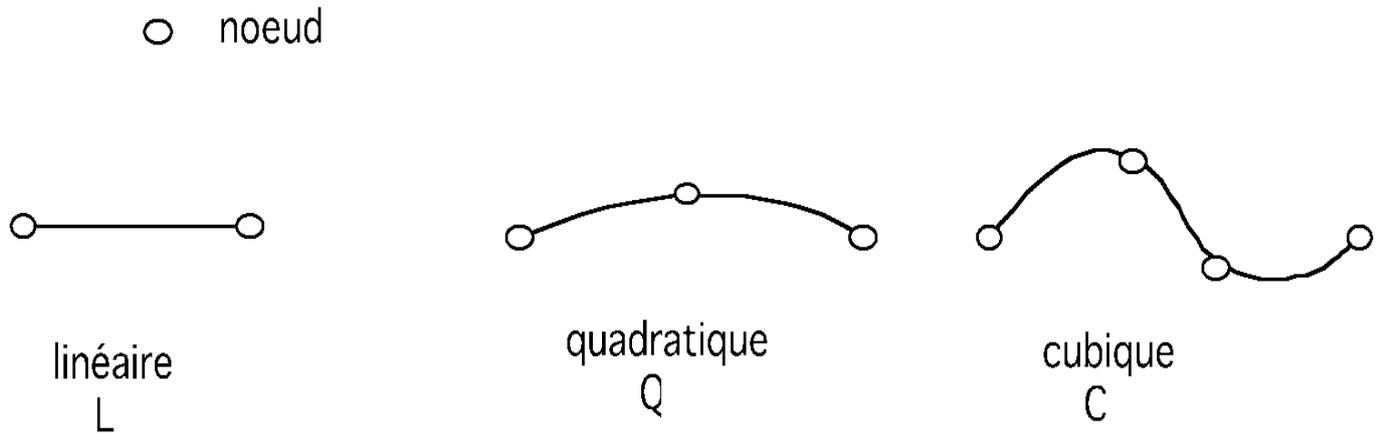


FIG. 13 – éléments à une dimension

Les N_r sont des fonctions dont la forme change d'un élément à l'autre, car elles dépendent des coordonnées X^i , qui sont différentes d'un élément à l'autre. Pour éviter d'avoir à recalculer ces fonctions N_r sur chaque élément, on définit un système de coordonnées identiques pour chaque élément, défini sur un élément particulier dit "élément de référence", figure (17).

Par exemple dans le cas d'un découpage en éléments triangulaires linéaires on obtient pour les fonctions d'interpolation :

$$\begin{aligned}
 \varphi_1 &= 1 - \zeta^1 - \zeta^2 = \varphi_1(\zeta^1, \zeta^2) \\
 \varphi_2 &= \zeta^1 = \varphi_2(\zeta^1, \zeta^2) \\
 \varphi_3 &= \zeta^2 = \varphi_3(\zeta^1, \zeta^2)
 \end{aligned} \tag{8}$$

On remarque que le symbole N_r a été remplacé par φ_r . Les fonctions φ_r sont des fonctions d'interpolation définies sur l'élément de référence. En notant

$$O\vec{M} = X^a \vec{I}_a \tag{9}$$

le vecteur position d'un point courant M, la discrétisation de la surface conduit à :

$$O\vec{M} = X^{ar} \varphi_r(\zeta^1, \zeta^2) \vec{I}_a \tag{10}$$

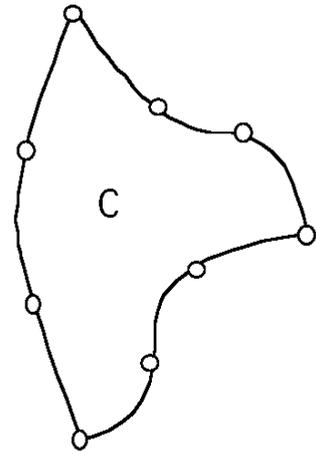
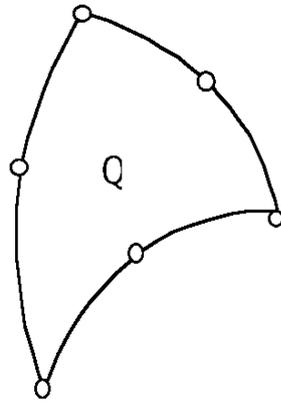
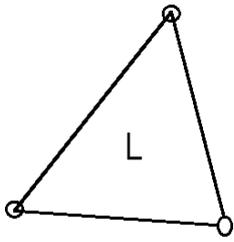
Les coordonnées

$$X^a = X^{ar} \varphi_r(\zeta^1, \zeta^2) \tag{11}$$

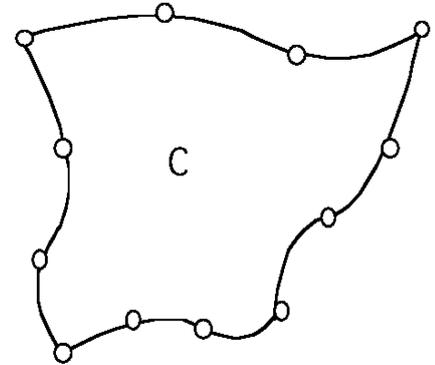
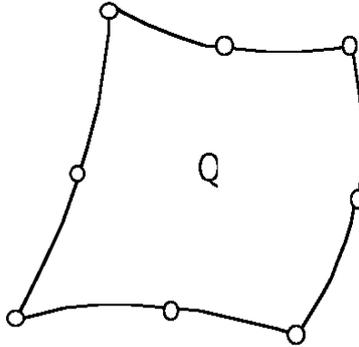
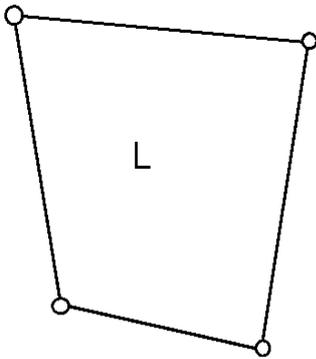
définissent une facette : celle-ci dépend de la position des sommets X^{ar} . Sous forme matricielle, on écrit aussi :

$$(X) = \langle \varphi_r \rangle (X^{ar}) \tag{12}$$

Ramené sur l'élément, le système de coordonnées ainsi défini est attaché à l'élément (il se déforme avec celui-ci). C'est un exemple de systèmes de coordonnées curvilignes, voir la

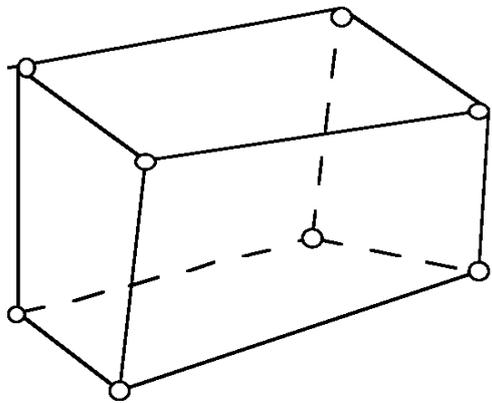
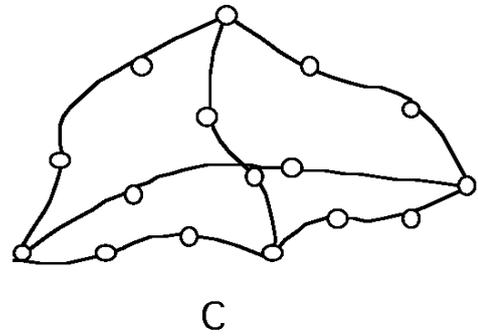
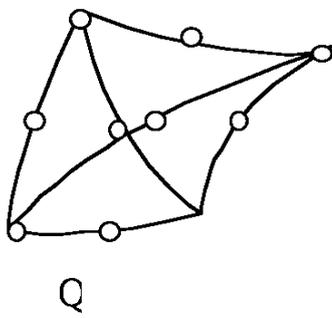
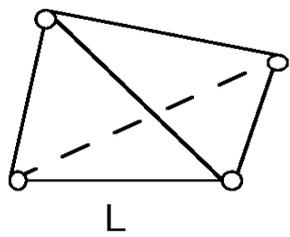


découpage triangulaire



découpage rectangulaire

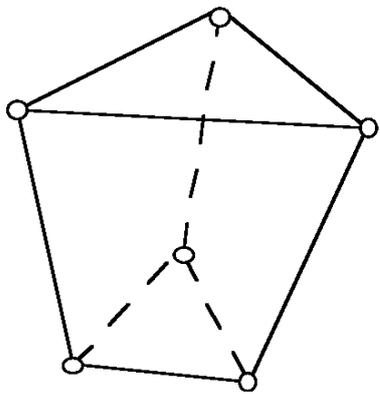
FIG. 14 – éléments à deux dimensions



L Q C

tétraédrique

hexaédrique



L Q C

prismatique

FIG. 15 – éléments à trois dimensions

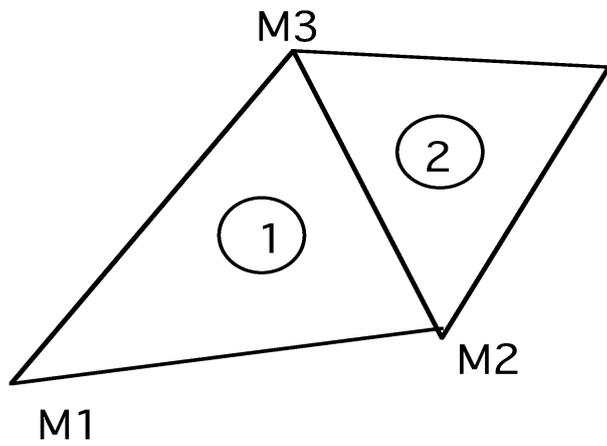


FIG. 16 – Deux éléments triangulaires

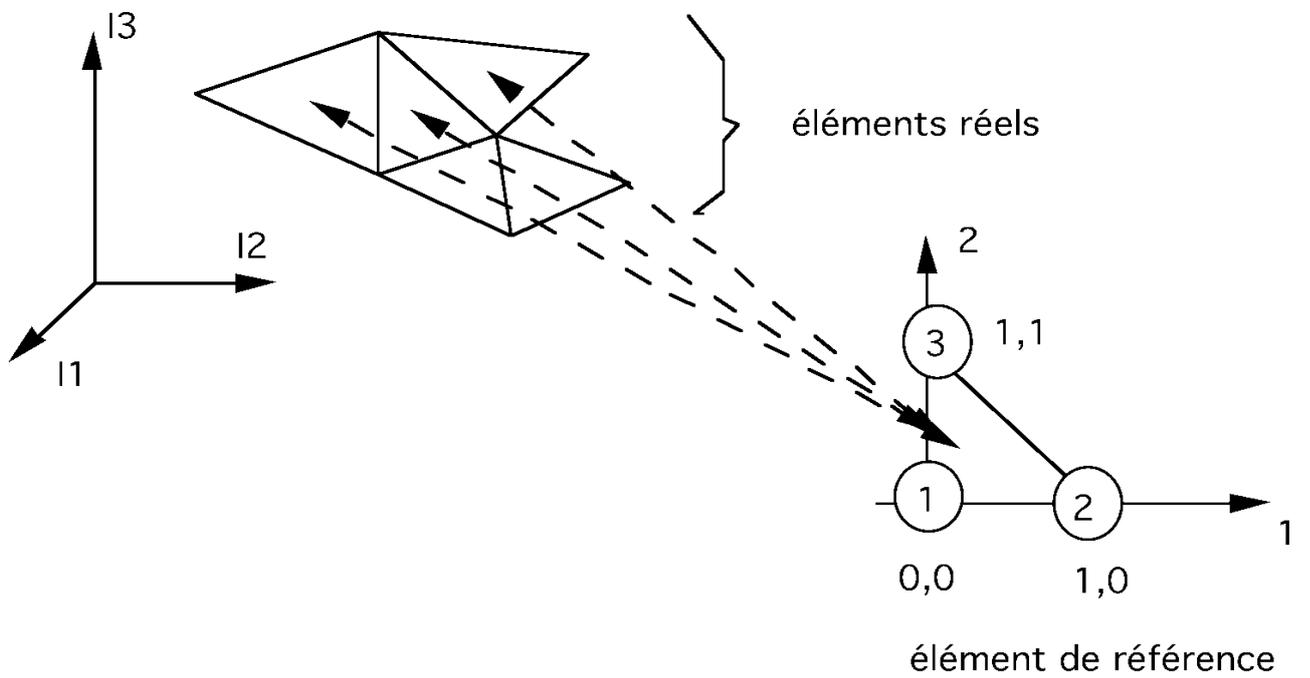


FIG. 17 – relations entre éléments réels et élément de référence

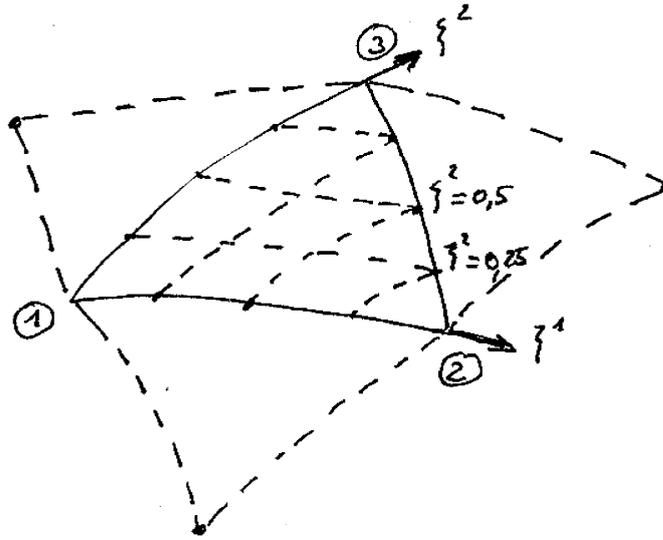


FIG. 18 – paramétrage curviligne

figure (18). Comme il est attaché à la matière, on dit que c'est un paramétrage matériel ou un système de coordonnées matérielles (en plus d'être curviligne!). En utilisant la forme discrétisée, au lieu de la surface réelle, tous les calculs sont alors effectués dans le système de coordonnées qui est celui de l'élément de référence.

remarque :

- De même que pour l'interpolation d'une fonction U , la formule (11) représente une approximation de la géométrie réelle. Dans le cas d'une surface courbe et de l'utilisation d'éléments linéaires on obtient une surface facettisée.
- Les formules (11) peuvent s'interpréter comme des formules de changement de variables.
- Pour l'interpolation d'une fonction U , on utilisera également le système de coordonnées curvilignes ζ^i :

$$U(X^i) = \phi_s(\zeta^i)U^s \quad (13)$$

Les fonctions ϕ_s , sont définies sur le même élément de référence que les fonctions φ_s mais elles peuvent être différentes. D'une manière pratique il est préférable de définir l'interpolation géométrique préalablement à l'interpolation des fonctions U .

Remarque : Calcul de la déformation d'ALMANSI dans le cas d'un élément triangle

- Calcul de la dérivée des fonctions d'interpolation

$$\begin{aligned} \varphi_{1,1} &= -1, \quad \varphi_{1,2} = -1 \\ \varphi_{2,1} &= 1, \quad \varphi_{2,2} = 0 \\ \varphi_{3,1} &= 0, \quad \varphi_{3,2} = 1 \end{aligned} \quad (14)$$

- Détermination des vecteurs \vec{g}_i à partir de la formule $\vec{g}_i = O\vec{M}^r \varphi_{r,i}$

$$\vec{g}_1 = O\vec{M}^2 - O\vec{M}^1 = M^1\vec{M}^2, \quad \vec{g}_2 = O\vec{M}^3 - O\vec{M}^1 = M^1\vec{M}^3 \quad (15)$$

Les vecteurs de base sont représentés par les cotés du triangle.

- Calcul de la déformation dans la base finale, exemple de la première coordonnée :

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{2}(M^1\hat{M}^2.M^1\hat{M}^2 - M^1\vec{M}^2.M^1\vec{M}^2) \quad (16)$$

C'est également la première coordonnée du tenseur de GREEN LAGRANGE dans le repère initiale.

3.4 Formes d'éléments de référence classiques

3.5 Maillage et tableau classique de description

Nous avons vu que la description de la géométrie, de manière approchée par interpolation, nécessitait la décomposition de la surface en éléments. Cette opération est appelée "maillage de la géométrie". C'est en général une opération qui est effectuée via un logiciel particulier : "un mailleur" qui est un pré-processeur au calcul élément fini en ce sens qu'il ne fait pas à proprement parler partie du calcul élément fini mais il représente un préparatif indispensable. Le maillage (mesh en anglais) étant effectué, celui-ci se stocke pour la partie géométrique en deux tableaux (il existe des variantes mais le principe reste en fait identique).

- Un tableau de coordonnées, avec un numéro pour chaque nœud (en fait le numéro peut être omis car au moment de la lecture un compteur d'entrées peut le déterminer) et les trois coordonnées du point. Après lecture de ces coordonnées, elles sont stockées dans un tableau selon par exemple une syntaxe FORTRAN du type :

Real 8 XYZ (3, 100)

ainsi dans ce cas : XYZ (1, 15) représentent la 1ère coordonnée du nœud 15, XYZ (2, 15) la 2ème coordonnée du nœud 15, etc.

- Un tableau de connexions qui contient pour chaque élément les numéros de nœuds servant à construire l'élément dans le bon ordre!

Par exemple supposons que l'on utilise une syntaxe FORTRAN, après lecture, les informations sont stockées dans un tableau qui peut avoir la forme suivante , voir la figure 19 :

integer CONEC (3, 20), tel que l'on a :

CONEC (1,7) contient la valeur 6, signifie que le nœud 6 est le 1er nœud de l'élément 7

CONEC (2,7) contient la valeur 9, signifie que le nœud 9 est le 2ème nœud de l'élément 7

CONEC (3,7) contient la valeur 7, signifie que le nœud 7 est le 3ème nœud de l'élément 7

Les deux tableaux, de nœuds et de connexion, sont suffisants pour décrire complètement la géométrie discrétisée, qui dépend alors d'un nombre fini d'informations.

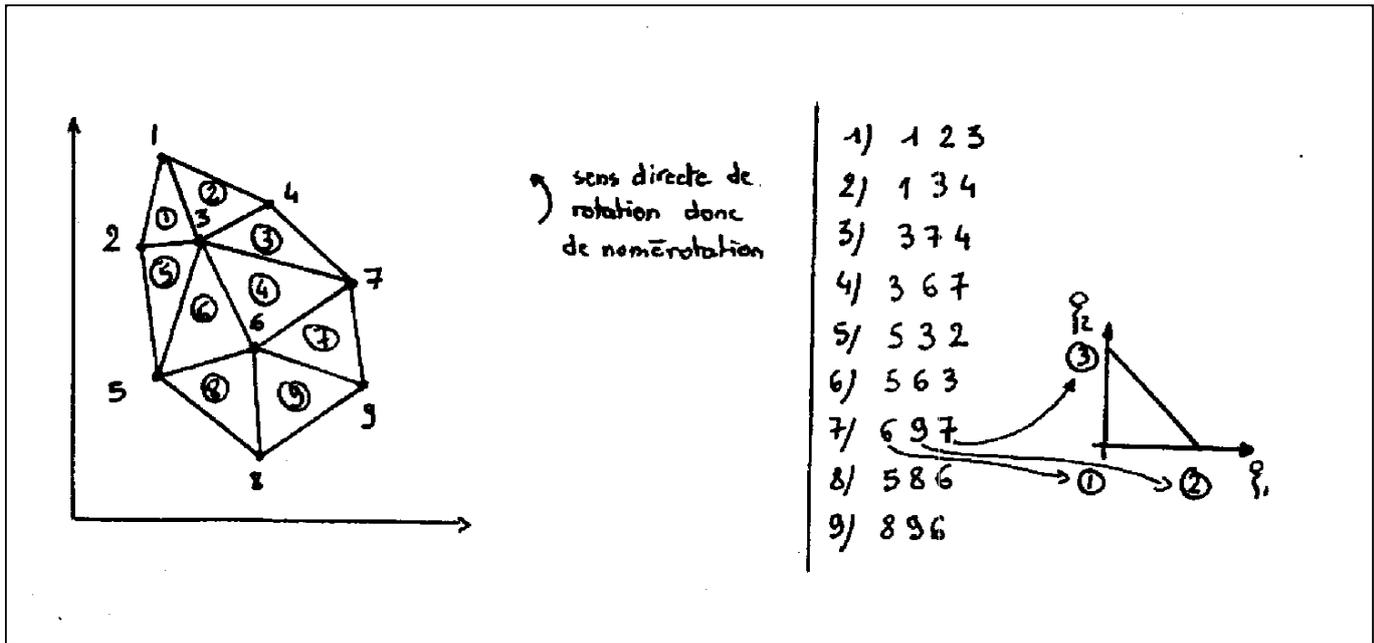


FIG. 19 – exemple de connexions

3.6 Quelques remarques sur les grandes classes d'élément Nous n'avons pas donné d'information particulière concernant la continuité inter-élément.

Au niveau d'une surface facettisée, la continuité de la surface est assurée entre les éléments, mais a priori aucune condition particulière n'est imposée sur les dérivées premières ni supérieures. On dit que l'on a une continuité C^0 pour l'interpolation. Les mêmes conditions sont adoptées pour une fonction interpolée quelconque, ceci dans le cas courant. La continuité C^0 est ainsi la plus courante, la plus facile à obtenir : pour cela il suffit qu'au niveau de la frontière inter-éléments n'interviennent dans l'interpolation que les valeurs nodales de nœuds appartenant à cette frontière. Dans le cas d'interpolation classique, la valeur de la fonction interpolée le long de la frontière est indépendante du choix de l'élément retenu pour le calcul.

Soit par exemple l'interpolation linéaire sur un triangle, vue précédemment : $U = \varphi_r U^r$, $r = 1 \ 2 \ 3$ figure (17) avec φ_r défini selon (8).

Le long de la frontière 2 - 3, sur la figure (20), nous voulons que U ne dépende que des nœuds 2 et 3. D'où cela nécessite que $\varphi_1 = 0$ sur 2 - 3, ce qui est vérifié par la forme de φ_1 : $\varphi_1 = 1 - \zeta^1 - \zeta^2$. En effet le long de 2 - 3 on se déplace sur la droite d'équation $(\zeta^1, 1 - \zeta^1)$ ce qui entraîne bien la condition recherchée. De même $\varphi_2 = 0$ sur 1 - 3 et $\varphi_3 = 0$ sur 1 - 2. Ainsi l'interpolation linéaire triangulaire est de type C^0 . Au niveau de la géométrie, c'est le minimum accepté, par contre au niveau d'une grandeur U , on peut certaines fois avoir une continuité C^{-1} , la fonction elle-même est, dans ce cas, discontinue d'un élément à l'autre. Elle peut également avoir une interpolation plus sophistiquée : continuité des dérivées premières : C^1 ou semi C^1 si seulement certaines des dérivées sont continues. La continuité peut théoriquement être également d'un ordre plus élevé : $C^2 \dots \dots \dots C^n$ dans la

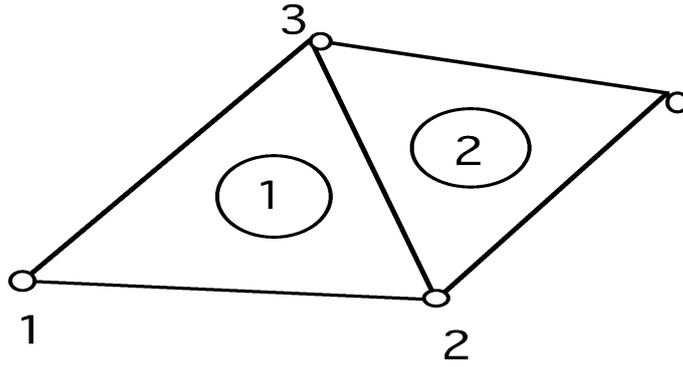


FIG. 20 – exemple de 2 triangles

pratique ce type d'interpolation est difficile à utiliser et n'est de ce fait pas employé (Cf, introduction) .

Concernant la construction des fonctions d'interpolation, on n'utilise en pratique que des polynômes (avec l'idée sous-jacente que toute fonction complexe peut de manière approchée s'exprimer sous forme de polynôme).

Tout polynôme s'exprime en fonction de monôme de base. Plus leur nombre est important, plus le polynôme est riche.

Par exemple en 1D les monômes de base sont :

$$1, (\zeta), (\zeta)^2, (\zeta)^3, (\zeta)^4 \text{ etc..} \quad (17)$$

en 2D les monômes de base sont :

$$\begin{aligned} & 1, \text{ degré } 0 \\ & (\zeta^1), (\zeta^2), \text{ degré } 1 \\ & (\zeta^1)^2, (\zeta^1)(\zeta^2), (\zeta^2)^2, \text{ degré } 2 \\ & \text{etc..} \end{aligned} \quad (18)$$

Remarques

- 1) Un système d'interpolation peut-être incomplet, c'est-à-dire qu'il n'intègre pas tous les monômes d'un certain degré. C'est en général le cas pour les interpolations quadratiques et cubiques lorsque les seuls nœuds de la frontière de l'élément sont pris en compte. Néanmoins, en général la précision maximale est obtenue lorsque l'interpolation est complète.
- 2) L'interpolation des fonctions (ex : U) peut-être différente, c'est-à-dire par exemple ne pas intégrer le même degré de monôme que celui de la géométrie.
- 3) Dans le cas où l'interpolation de la géométrie et des fonctions est identique, on dit que l'élément est isoparamétrique. C'est un cas assez courant et simple.
- 4) Dans le cas où l'interpolation des fonctions est plus riche que l'interpolation de la géométrie, les éléments sont de type sub-paramétrique. Cas contraire : élément super-paramétrique : non conseillé dans la pratique.

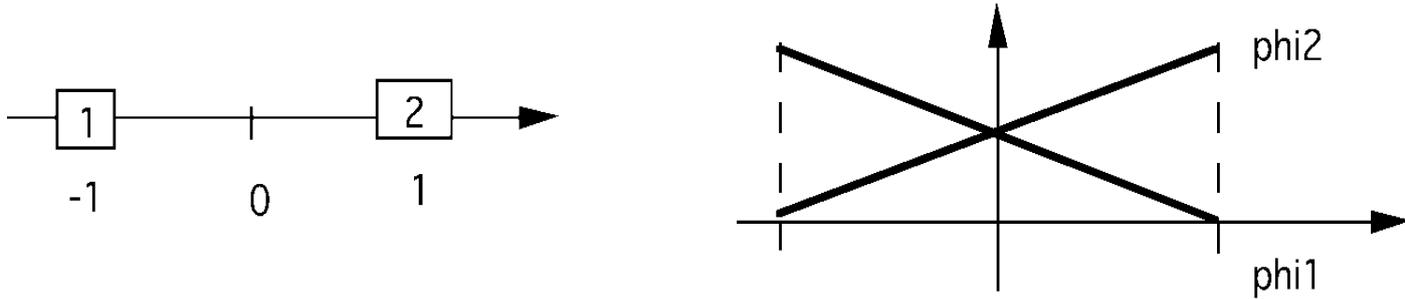


FIG. 21 – élément 1D de référence et interpolations

5) Dans le cas où les deux interpolations sont différentes mais utilisent les mêmes fonctions d'interpolation, l'élément est pseudo-isoparamétrique.

Quant à la construction même des fonctions φ et ϕ une liste exhaustive peut se trouver dans les ouvrages de référence d'éléments finis. On donnera par la suite une liste des cas les plus classiques.

4 Expression de différents types d'interpolation classique

4.1 Éléments à une dimension

4.1.1 linéaire : 2 nœuds, C^0

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{(1 - \zeta)}{2} \quad , \quad \varphi_2 = \frac{(1 + \zeta)}{2} \\ \varphi_{1,1} &= -\frac{1}{2} \quad , \quad \varphi_{2,1} = \frac{1}{2} \end{aligned} \quad (19)$$

4.1.2 quadratique : 3 nœuds, C^0

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= -\frac{\zeta(1 - \zeta)}{2} \quad , \quad \varphi_2 = (1 - \zeta^2) \quad , \quad \varphi_3 = \frac{\zeta(1 + \zeta)}{2} \\ \varphi_{1,1} &= -\frac{1}{2} + \zeta \quad , \quad \varphi_{2,1} = -2\zeta \quad , \quad \varphi_{3,1} = \frac{1}{2} + \zeta \end{aligned} \quad (20)$$

4.1.3 Continuité $C1$, polynômes d'HERMITE, 2 nœuds, cubique

Les inconnues nodales sont : $U, U_{,1}$. Nous utilisons deux nœuds d'interpolation d'où 4 fonctions d'interpolation. La notation suivante est retenue :

$$W^{11} = U^1 \quad , \quad W^{12} = U_{,1}^1 \quad , \quad W^{21} = U^2 \quad , \quad W^{22} = U_{,1}^2 \quad \text{avec} \quad U = P_{rs} W^{rs} \quad (21)$$

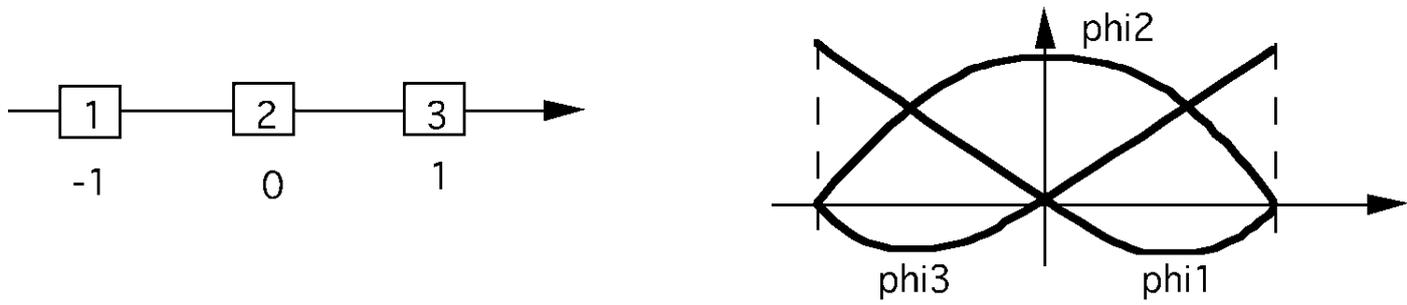


FIG. 22 – élément quadratique de référence et interpolations

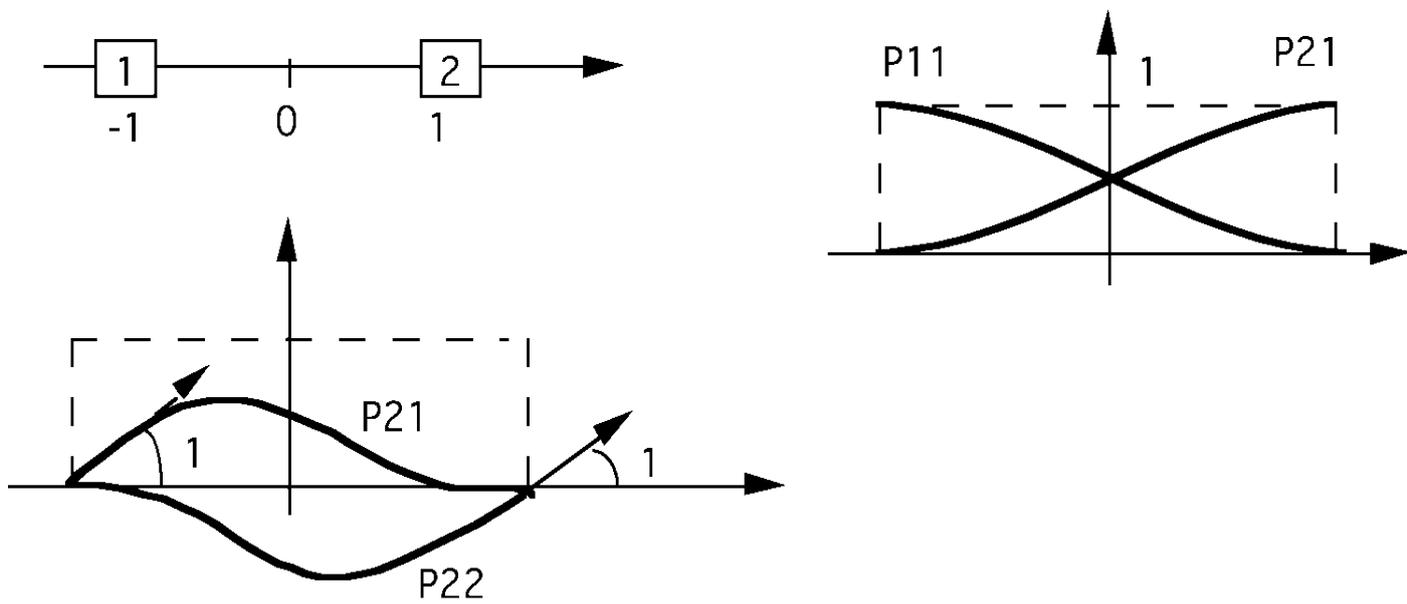


FIG. 23 – élément de continuité C_1 , polynômes d'HERMITE

On remarque : $P_{12} = P_{22} = 0$ aux nœuds, $P_{12,1} = 1$ au nœud 1 et 0 au nœud 2, et le symétrique pour $P_{22,1}$. Ainsi au nœud 1 par exemple on retrouve les relations : $U(-1) = U^1$, $U_{,1} = U_{,1}^1$

ref : "Une présentation de la méthode des éléments finis" - G. DHATT et G. TOUZOT
- Collection Université de Compiègne - 2ème édition, 1984.

5 Formulation variationnelle

5.1 Introduction

L'exposé ne sera pas rigoureux au sens mathématique du terme, l'objectif étant de montrer les idées principales qui gouvernent le principe variationnel le plus utilisé, à savoir le principe de GALERKIN qui se traduit en mécanique par le principe des puissances virtuelles.

Ainsi dans une première partie, nous étudierons le principe des puissances virtuelles, ce qui nous permettra d'introduire la démarche générale d'utilisation d'un principe variationnel puis nous introduirons une forme plus générale de principe variationnel au travers d'un opérateur de projection. Cette forme générale sera utilisable pour toutes les équations aux dérivées partielles, par exemple : équilibre thermique, électromagnétisme, etc.

5.2 Les grandes lignes de la méthode des puissances virtuelles (présentation intuitive)

On part d'une équation qui traduit l'équilibre de la matière.

Dans le cadre de la mécanique des milieux continus, l'équation représente l'équilibre des forces et des moments qui agissent sur un élément de matière. Elle s'écrit sous la forme d'une équation aux dérivées partielles, c'est-à-dire une équation différentielle dans laquelle apparaissent des dérivées selon les trois axes : x, y et z, l'inconnue dans le cas courant, étant le champ de déplacement.

Mathématiquement, l'équation est difficile, voir même impossible à résoudre dans le cas général. Seuls quelques cas simples, de géométrie et/ou de loi, ont une solution analytique connue.

Dans ce contexte, la formulation variationnelle de l'EDP, apparaît comme une forme équivalente de l'équation, mais qui a pour avantage de pouvoir par la suite être résolue de manière approchée, ce qui sera le cas dans la méthode par éléments finis.

Dire qu'un solide sous l'action d'un ensemble de forces est en équilibre, équivaut à dire que la puissance totale mise en jeu par ces forces lors d'un déplacement quelconque, est nulle.

$$\left\{ \sum \vec{F}_i = \vec{0} \right\} \iff \left\{ \dot{P} = \sum \dot{P}_i = \left(\sum \vec{F}_i \right) \cdot \dot{\vec{U}} = 0 \quad \forall \delta \dot{\vec{U}} \right\} \quad (22)$$

$\delta \dot{U}$ représente la vitesse au cours du déplacement.

Les déplacements invoqués ne sont pas réels, ce sont des déplacements "test". On les qualifie de déplacements virtuels, et les puissances associées de puissances virtuelles.

Lorsque l'on considère l'ensemble du déplacement, c'est-à-dire que l'on intègre l'équation suivant le temps, on obtient un équilibre d'énergie ou de travail, on parle de travail virtuel. Cet équilibre correspond également à une formulation variationnelle, qui pour être équivalente aux équations d'équilibre des forces doit être valide quelque soit le déplacement.

$$\left\{ \sum \vec{F}_i = \vec{0} \right\} \iff \left\{ T = \sum T_i = \left(\sum \vec{F}_i \right) \cdot \vec{U} = 0 \quad \forall \delta \vec{U} \right\} \quad (23)$$

L'équation faisant intervenir les puissances est appelée forme variationnelle des équations d'équilibre. Elle est identique à l'équation originale d'équilibre, tant qu'elle est vérifiée pour tout déplacement virtuel $\delta\vec{U}$.

Mais dans le cas où l'on utilise une sélection de déplacements virtuels, on obtient une solution approchée au problème original.

Dans le cadre de l'équilibre interne des forces de cohésion de la matière, représentées par les contraintes, la puissance virtuelle mise en jeu lors d'un déplacement virtuel est une fonction d'une part du déplacement virtuel, et d'autre part du déplacement réel. En effet, les contraintes peuvent être calculées à partir des déformations via la loi de comportement du matériau, et les déformations peuvent être calculées à partir du champ de déplacement. Ainsi la seule inconnue de notre problème variationnel demeure le champ de déplacement \vec{U} . En définitif on peut écrire :

$$\overset{*}{P}=\overset{*}{P}(\vec{U}, \delta\vec{U}) = 0 \quad \forall \delta\vec{U} \quad (24)$$

Supposons maintenant que l'on cherche une forme approchée de \vec{U} à l'aide d'une discrétisation par éléments finis \vec{U}_a . On a vu que le champ approché \vec{U}_a se calcule à partir de la valeur du déplacement en chaque nœud \vec{U}_r , l'indice r étant le numéro du nœud. Dans ce cas, la puissance virtuelle est une fonction des valeurs aux nœuds :

$$\overset{*}{P}=\overset{*}{P}(\vec{U}_r, \delta\vec{U}) = 0 \quad \forall \delta\vec{U} \quad (25)$$

Lorsque l'on connaît toutes les valeurs aux nœuds, appelées valeurs nodales, le problème est résolu ! Si N est le nombre de nœuds, le problème comporte 3 x N inconnues (pour un modèle 3D), que l'on appelle les degrés de liberté du problème.

Sachant que chaque déplacement virtuel $\delta\vec{U}$ conduit à une équation qui doit être vérifiée pour satisfaire l'équilibre, il nous reste à déterminer 3xN déplacements virtuels possibles.

Soit un nœud donné, par exemple le numéro s, et choisissons un déplacement δU_s^a tel que ce déplacement soit nul au niveau de tous les nœuds sauf au nœud s où il vaut la valeur 1. pour la composante a (=1 ou 2 ou 3), et qu'il passe d'une manière continue de 1 à 0 du nœud 5s aux autres nœuds. Il est clair que cette méthode de construction de déplacement virtuel permet de déterminer 3xN déplacements test ou virtuels, élémentaires. A l'aide de ces déplacements, nous allons pouvoir générer 3 x N équations, dont les inconnues sont les déplacements aux nœuds.

Dans le cas où ces équations sont linéaires en inconnues (c'est-à-dire forment une combinaison linéaire des inconnues) on parle de problème linéaire, c'est le cas par exemple de l'étude de la déformation élastique d'un corps (ou structure) en petite déformation, sinon on parle de problème non-linéaire.

Les problèmes linéaires sont évidemment les plus simples à résoudre. Le système d'équation s'écrit alors sous une forme matricielle équivalente à :

$$[K] (U) = (F) \quad (26)$$

où :

- (U) est le vecteur déplacement inconnu, ses composantes sont en fait les composantes des déplacements inconnus pour chaque nœud du maillage,
- (F) est le vecteur second membre connu, ses composantes sont en fait les composantes des forces imposées en chaque nœud,
- $[K]$ est la matrice de raideur, c'est une matrice de composantes connues, fonction de la forme de la pièce calculée et de la loi de comportement : élastique, plastique...

Résoudre le problème équivaut alors à résoudre ce système matriciel par exemple en inversant la matrice.

$$(U) = [K]^{-1} (F) \quad (27)$$

Dans le cas d'un problème non linéaire, par exemple lors de l'étude de grandes transformations, en général on utilise une méthode de résolution numérique, par exemple la méthode de NEWTON-RAPHSON qui consiste à remplacer le problème original par une succession de problèmes linéaires. Il est clair que la résolution est alors plus complexe et que les temps de calcul sont plus longs. Néanmoins, la prise en compte de ce type de problème tend aujourd'hui à se généraliser, due en particulier aux grandes vitesses des calculateurs modernes.

En résumé, il faut retenir que la formulation variationnelle alliée aux techniques de discrétisation permet de transformer l'équation originale d'équilibre, en un système d'équations, linéaire dans les cas simples, qui après résolution fournit les déplacements aux nœuds du maillage.

On remarque que plus le nombre de nœuds est important, plus la taille du système linéaire à résoudre est importante. Couramment la dimension des systèmes atteint plusieurs milliers voire plusieurs dizaines de milliers !

Maintenant que l'on a vu les idées générales de l'utilisation du "principe des puissances virtuelles" , nous allons présenter une forme plus générale de formulation variationnelle qui peut être appliquée à d'autres types d'équations aux dérivées partielles. Néanmoins il faut se rappeler que le fonctionnement suit celui du PPV, d'ailleurs nous verrons que ce principe constitue une forme particulière du principe général de projection.

5.3 Idées générales à l'aide d'opérations de projection

L'équation aux dérivées partielles, l'EDP, peut être considérée comme la recherche de zéro d'une fonction, celle-ci étant en fait une " fonction" de fonction que l'on appelle dans ce cas une fonctionnelle.

Soit l'espace de fonctions à valeurs réelles et un sous-espace qui satisfait aux conditions d'espace vectoriel, de dimension finie. On définit sur cet espace (EV) un produit scalaire relatif à un domaine D appartenant au domaine de définition de f, g .

$$\forall f, g \quad \langle f, g \rangle = \int_D f.g dv \quad (28)$$

On vérifie simplement que l'opération ainsi définie permet de satisfaire les axiomes de produit scalaire.

Soit une base e_i de l'espace vectoriel. Soit une fonction f de l'EV, $\langle f, e_i \rangle$ représente la projection de la fonction f sur la fonction de base e_i , à la norme de e_i près. Ainsi f peut s'écrire sous la forme :

$$f = \alpha^i e_i = \frac{\langle f, e_i \rangle}{\langle e_i, e_i \rangle} e_i \quad (29)$$

Supposons maintenant que g soit une fonction quelconque appartenant à l'espace général. La fonction peut-être décomposée en une partie appartenant à l'EV et une partie appartenant à l'espace complémentaire.

$$g = \frac{\langle g, e_i \rangle}{\langle e_i, e_i \rangle} e_i + h \quad | \quad \langle h, e_i \rangle = 0 \quad \text{et} \quad h \notin EV \quad (30)$$

Dire que g est nulle équivaut à dire que quel que soit un espace vectoriel de dimension aussi grande que voulue, l'on a $\langle g, e_i \rangle$ pour tous les vecteurs de base de l'EV, c'est-à-dire que la projection est nulle.

Soit une application linéaire de fonction de l'espace dans lui-même.

$$\mathcal{L} : g \rightarrow \mathcal{L}(g) \quad | \quad \mathcal{L}(\alpha f + \beta g) = \alpha \mathcal{L}(f) + \beta \mathcal{L}(g) \quad (31)$$

On étend les propositions précédentes :

Dire que $\mathcal{L}(g) = 0$ équivaut à dire que quel que soit un espace vectoriel de dimension aussi grande que voulue on a dans cet espace :

$$\langle \mathcal{L}(g), e_i \rangle = 0 \quad (32)$$

NB :

- $\mathcal{L}(g)$ est une fonctionnelle c'est-à-dire une fonction de fonction.
- Si $\mathcal{L}(g) = 0$ est une équation, l'expression $\langle \mathcal{L}(g), e \rangle = 0$, quel que soit l'EV, en est sa formulation variationnelle.

A première vue la formulation variationnelle est plus complexe à manipuler pour obtenir une solution exacte, mais elle a l'énorme avantage de permettre l'obtention d'une solution approchée. En effet, lorsque l'on se fixe un EV, dans celui-ci les équations en $g : \langle \mathcal{L}(g), e \rangle = 0$ conduisent à une solution approchée de g . Cette solution sera d'autant plus fine que l'EV sera général.

La généralité d'EV s'obtient soit :

- en augmentant la dimension,
- en augmentant la complexité ou la généralité des fonctions de base.

5.4 Cas d'un espace de fonctions discrétisées par éléments finis, définition des fonctions de base

Soit un domaine \mathcal{D} sur lequel on définit une discrétisation. On a pour un vecteur \vec{U} quelconque : $U^a = \phi_r U^{ar}$ sur chaque élément.

Soit un nœud s entouré de k éléments. A partir des fonctions d'interpolation de chaque élément contenant s , il est possible de définir une fonction de base e_s telle que $e_s(s) = 1$

et vaut 0 pour tout nœud t différent de s . Pour définir e_s il suffit de poser $e_s = \phi_r$ sur chaque élément contenant le nœud s , avec r le numéro local du nœud s dans cet élément.

Notons que dans ce cas la fonction ϕ_r qui est définie localement pour chaque élément peut changer d'expression d'un élément à l'autre.

Avec cette notation il est possible d'exprimer le vecteur \vec{V} sur l'ensemble du domaine \mathcal{D} selon : $U^a = e_s U^{as}$ ce qui montre que les fonctions e forment une base généralisée de fonctions scalaires quelconques U^a .

Par extension il est possible de définir simplement une base génératrice de fonctions vectorielles.

$$\vec{U} = U^a \vec{I}_a = U^{as} e_s \vec{I}_a = U^{ak} \vec{f}^{ak} \quad (33)$$

$$\text{avec } e_s \vec{I}_a = \vec{f}^{ak} \quad (34)$$

Tout ce qui a été dit sur les fonctions à valeurs scalaires s'étend aux fonctions vectorielles en particulier au niveau du produit scalaire de fonctions vectorielles quelconques à l'aide de :

$$\forall \vec{f} = f_a \vec{I}^a \text{ et } \vec{g} = g_a \vec{I}^a, \langle \vec{f}, \vec{g} \rangle = \sum_a \langle f_a, g_a \rangle \quad (35)$$

L'extension est identique pour les fonctionnelles vectorielles.

NB : Dans la suite du cours, de manière à alléger l'écriture, souvent les deux indices "ak" des coordonnées de la fonction vectorielle de base \vec{f} seront condensés à un seul indice générique par exemple "i".

Il est à remarquer que plus le nombre de nœuds augmente, plus la dimension de l'espace généré par les fonctions \vec{f} augmente et plus \vec{U} peut-être approchée finement par la discrétisation.

5.5 Cas d'une équation aux dérivées partielles dans le domaine de la mécanique.

Soit l'équilibre mécanique statique d'un solide déformable, en élasticité linéaire petites déformations.

L'équation d'équilibre vectorielle se représente dans un repère local par trois équations scalaires :

$$\sigma^{ij}|_j = 0 \quad (36)$$

C'est-à-dire par exemple pour la première équation :

$$\sigma^{11}|_1 + \sigma^{12}|_2 + \sigma^{13}|_3 = 0 \quad (37)$$

Dans le cas de l'élasticité linéaire, la loi de comportement, c'est-à-dire la relation contrainte/déformation s'écrit :

$$\sigma^{ij} = E^{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (38)$$

ou encore en notation tensorielle $\sigma = \mathbf{E} : \varepsilon$, le tenseur \mathbf{E} étant une donnée du problème, donc connu.

D'où une nouvelle écriture des équations d'équilibre en fonction des déformations : $(E^{ijkl}\varepsilon_{kl})|_j = 0$. Dans le cadre des petites transformations, c'est-à-dire petites déformations et petits déplacements, les déformations sont reliées aux déplacements selon :

$$\varepsilon_{kl} = \frac{1}{2} (U_{i|j} + U_{j|i}) \quad (39)$$

En tenant de la relation : $E^{ijkl}\frac{1}{2}(U_{i|j} + U_{j|i}) = E^{ijkl}U_{k|l}$ on obtient pour l'équation d'équilibre, une équation aux dérivées partielles exprimée en fonction des seules inconnues de déplacements :

$$(E^{ijkl}U_{k|l})|_j = 0 \quad (40)$$

On remarque dans cette équation que l'ordre de dérivation des fonctions inconnues est 2.

5.5.1 Formulation variationnelle de l'équation locale d'équilibre mécanique.

On peut considérer l'équation aux dérivées partielles comme une fonctionnelle.

$$\vec{\mathcal{L}}(U) = \vec{0} \quad (41)$$

Ici c'est une fonctionnelle vectorielle que l'on peut décomposer en 3 fonctionnelles scalaires :

$$\mathcal{L}_k(U) = 0 (k = 1, 3) \quad (42)$$

D'après ce qui a été dit plus haut, la formulation variationnelle équivalente est pour un espace de fonction discrétisée :

$$\langle \vec{\mathcal{L}}(U), \vec{f} \rangle = 0 \quad (43)$$

c'est-à-dire :

$$\int_{\mathcal{D}} \vec{\mathcal{L}}(U) \cdot \vec{f} \, dv = 0 \quad (44)$$

ou encore

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{D}} \sigma^{ij}|_j f_i \, dv &= 0 \\ \int_{\mathcal{D}} (E^{ijkl}U_{k|l})|_j f_i \, dv &= 0 \end{aligned} \quad (45)$$

(i)

Il y a autant d'équations que de fonctions f_i différentes. La fonction f_i est générique, elle représente tous les cas possibles de base génératrice e pour chaque composante.

L'équation (45) représente une forme variationnelle des équations d'équilibre local.

5.5.2 Formulation "faible"

Les équations précédentes peuvent être intégrées par partie pour diminuer le degré de dérivation de la fonction \vec{U} de 2 à 1. Ce qui conduit à :

$$\int_{\mathcal{D}} \sigma^{ij}|_j f_i \, dv = - \int_{\mathcal{D}} \sigma^{ij} f_{i|j} \, dv + \int_{\partial\mathcal{D}} \sigma^{ij} n_j f_i \, dv = 0 \quad (46)$$

Les n_j sont les composantes de la normale \vec{n} à la frontière $\partial\mathcal{D}$. Les équations exprimant les conditions limites de frontière s'écrivent :

$$T^i = \sigma^{ij} n_j \quad (47)$$

d'où la forme finale des équations d'équilibre :

$$- \int_{\mathcal{D}} \sigma^{ij} f_{i|j} dv + \int_{\partial\mathcal{D}} T^i f_i dv = 0 \quad (48)$$

On voit que dans la forme intégrée par partie le degré de dérivation de σ^{ij} donc de \vec{U} a été diminué de 1, en contre-partie le degré de dérivation des fonctions génératrices \vec{f} a été augmenté de 1. Comme ces fonctions sont connues, leur dérivation ne pose pas dans les faits de problème.

L'expression (48) est appelée formulation faible de la formulation originale directe. Cette expression est tout à fait générale, aucune hypothèse simplificatrice n'ayant été utilisée elle est aussi applicable dans le cas des grandes transformations. En fait l'équation ainsi obtenue est l'équation du principe des puissances virtuelles que l'on a présentée plus haut.

Dans le cas des petites transformations linéaires la formulation faible peut-être exprimée en fonction du déplacement seul.

$$- \int_{\mathcal{D}} E^{ijkl} U_{k|l} f_{i|j} dv + \int_{\partial\mathcal{D}} T^i f_i dv = 0 \quad (49)$$

5.6 Remarques sur les continuités pour les fonctions approchées

Lorsqu'une formulation variationnelle fait apparaître des dérivées partielles d'ordre n d'une grandeur sous le signe intégrale, cela impose (admis), du fait de l'intégrale, une continuité minimum C^{n-1} pour la grandeur en question.

Exemple de la mécanique

Pour les équations d'équilibre, la formulation variationnelle initiale nécessite une continuité :

- C^1 pour \vec{U} (minimale)
- C^{-1} pour \vec{f}

dans le cas de la formulation faible

- C^0 pour \vec{U}
- et C^0 également pour \vec{f} .

Tenant compte du fait que la continuité C^1 est bien plus complexe à satisfaire que la continuité C^0 , on utilisera dans la pratique la formulation faible.

6 Autres présentations des formulations variationnelles

6.1 Méthodes des résidus pondérés

Soit une fonctionnelle $\mathcal{L}(U)$ que l'on veut annuler. On écrit que cette condition est approchée par le système suivant :

$$\int_{\mathcal{D}} \mathcal{L}(U) f_i dv = \int_{\mathcal{D}} R(U) f_i dv = 0 \quad (50)$$

Les f_i sont des fonctions particulières dites de pondération, et $R(U)$ est appelé le résidu. L'opération exprimée par l'équation (50) consiste ainsi à pondérer le résidu. Plus l'ensemble des fonctions f_i est important, plus le système est censé approcher la solution exacte. En supposant les fonctions f_i indépendantes, on retrouve le premier exposé. Ici le cadre est plus général, les fonctions f_i ne sont pas censées être génératrices obligatoirement des fonctions inconnues U .

Par exemple, il est possible de chercher U dans un certain espace de fonctions \mathcal{V}_1 alors que les fonctions f_i sont choisies dans un autre espace \mathcal{V}_2 .

6.2 Méthode de Galerkin

C'est la méthode des résidus pondérés avec les fonctions de pondération ou de test génératrice de la fonction inconnue U , ce qui conduit au même résultat que l'exposé général.

6.3 Méthode de Ritz

On exprime l'EDP sous forme de la minimisation d'une nouvelle fonctionnelle. Nous présentons 2 exemples. Le premier utilise un principe mathématique, le principe de minimisation au sens des moindres carrés. Le second utilise un principe physique, l'énergie minimum dépensée.

6.3.1 Principe mathématique : minimisation au sens des moindres carrés

Soit une EDP que l'on notera $\mathcal{L}(U) = 0$. Soit la nouvelle fonctionnelle (somme des carrés) :

$$\mathcal{F}(U) = \int_{\mathcal{D}} \mathcal{L}(U) \mathcal{L}(U) dv \quad (51)$$

que l'on veut annuler :

$$\mathcal{F}(U) = 0 \quad (52)$$

Dire que la fonctionnelle $\mathcal{L}(U)$ est nulle équivaut en effet à dire que la fonctionnelle $\mathcal{F}(U)$ est nulle.

En supposant que U dépende de paramètres a_j , on va chercher à satisfaire la condition de nullité de $\mathcal{F}(U)$ en cherchant à minimiser sa valeur. Une condition nécessaire est d'avoir ses dérivées partielles nulles.

$$\frac{\partial \mathcal{F}(U)}{\partial a_j} = 0 \quad (53)$$

Cet ensemble d'équations représente une condition de minimisation au sens des moindres carrés de la fonctionnelle initiale. Dans la pratique, l'approche de la solution est plus ou moins fine selon le nombre de paramètres a_j que l'on choisit pour exprimer U . Par exemple

si l'on utilise une discrétisation par éléments finis, les paramètres a_j sont les grandeurs aux nœuds de U .

6.3.2 Principe physique : minimum d'énergie

Soit l'énergie de déformation de la pièce \mathcal{T} :

$$\mathcal{T} = - \int_0^t \int_{\mathcal{D}} \sigma^{ij} d\varepsilon_{ij} dv + \int_0^t \int_{\partial\mathcal{D}} T^i V_i ds dt \quad (54)$$

Le champ de déplacement \vec{U} , solution du problème est celui qui rend l'énergie minimale. Une condition nécessaire pour déterminer le minimum est d'annuler les dérivées partielles de cette énergie par rapport aux paramètres qui génèrent la solution.

$$\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial a_i} = 0 \quad (55)$$

Toujours dans le cas où l'on utilise une discrétisation par éléments finis, on obtient une série d'équations semblable à celle que l'on obtient à l'aide du principe général. C'est à l'aide de ce système d'équations qu'on été réalisées les premières résolutions par éléments finis.

6.4 Principe des puissances virtuelles et des travaux virtuels, équations complètes

La méthode repose sur l'utilisation d'un principe de mécanique : Dire qu'un corps est en équilibre équivaut à dire que la puissance totale développée lors d'un mouvement quelconque est nulle. Pour distinguer ce mouvement quelconque possible du mouvement réel, on l'appelle mouvement virtuel noté \vec{U}^* pour un déplacement et \vec{V}^* pour une vitesse virtuelle. Avec ces notations l'équilibre statique de la puissance virtuelle totale s'écrit :

$$\mathcal{P}^* = - \int_{\mathcal{D}} \sigma^{ij} V_{i|j}^* dv + \int_{\partial\mathcal{D}} T^i V_i^* ds = 0 \quad (56)$$

Le premier terme du membre de droite représente la puissance virtuelle interne et le second terme la puissance virtuelle externe. \vec{U}^* doit représenter toutes les vitesses possibles, il est donc générateur de l'espace des vitesses et donc aussi des déplacements possibles, ce qui conduit à une expression identique à la formulation générale vue précédemment. On reconnaît ainsi la formulation générale appliquée aux équations d'équilibre local avec $\vec{V}^* = \vec{f}$. En mécanique on parlera de vitesse virtuelle au lieu de fonction génératrice, sachant que dans la pratique ces deux termes sont équivalents. On notera souvent le principe des puissances virtuelles en abrégé : PPV. Dans le cas d'un phénomène dynamique intégrant des forces de volume \vec{F} et une accélération $\vec{\gamma}$ on obtient le PPV général :

$$\mathcal{P}_{acc}^* = \mathcal{P}_{int}^* + \mathcal{P}_{ext}^* \quad (57)$$

avec

$$\begin{aligned}
\text{puissance d'accélération } \mathcal{P}_{acc}^* &= \int_{\mathcal{D}} \cdot \vec{\gamma} \vec{V}^* dv \\
\text{puissance interne } \mathcal{P}_{int}^* &= - \int_{\mathcal{D}} \sigma^{ij} V_{i|j}^* dv \\
\text{puissance externe } \mathcal{P}_{ext}^* &= \int_{\partial \mathcal{D}} T^i V_i^* ds + \int_{\mathcal{D}} \cdot \vec{F} \vec{V}^* dv
\end{aligned} \tag{58}$$

Cette équation correspond à la forme variationnelle des équations d'équilibre complètes.

$$\begin{aligned}
\rho \vec{\gamma} &= \vec{F} + \text{div}(\vec{\sigma}) \\
\text{ou encore sous forme indicielle } \rho \gamma^i &= F^i + \sigma^{ij}|_j
\end{aligned} \tag{59}$$

par la suite pour simplifier l'écriture on omettra souvent les termes d'accélération et de force de volume, leur prise en compte ne posant aucune difficulté.

Dans le cas où l'on intègre le PPV sur une certaine plage de temps, de t^1 à t^2 par exemple, on obtient :

$$\mathcal{T}^* = - \int_{t^1}^{t^2} \int_{\mathcal{D}} \sigma^{ij} V_{i|j}^* dv + \int_{t^1}^{t^2} \int_{\partial \mathcal{D}} T^i V_i^* ds \tag{60}$$

appelé le principe des travaux virtuels, TPV. Satisfaire ce principe consiste en fait à satisfaire les équations d'équilibre en moyenne entre les temps t^1 et t^2 . Dans l'étude de certains problèmes tels que le flambement, l'utilisation du TPV peut apparaître plus judicieuse que le PPV.

Remarque

- Soit \vec{V} la vitesse réelle des particules matérielles. Supposons que cette vitesse dépende de paramètres a_i , alors les vitesses virtuelles peuvent se calculer selon :

$$\vec{V}^* = \frac{\partial \vec{V}}{\partial a_i} \dot{a}_i^* \tag{61}$$

On décrit systématiquement toutes les vitesses virtuelles que d'indices "i" différents.

- Si l'on écrit le TPV en élasticité linéaire, entre les temps 0 et t, pour chaque vitesse virtuelle différente en prenant $\dot{a}_i^* = 1$ et $\dot{a}_j^* = 0$ pour $j \neq i$ on obtient la même équation que celle obtenue en minimisant l'énergie. Ceci montre que le TPV et donc le PPV sont plus généraux, entre-autre ces deux principes peuvent s'appliquer quel que soit le comportement matériel.

6.5 Méthode de collocation

Cette méthode correspond à l'application des résidus pondérés avec comme fonction de test des impulsions de Dirac c'est-à-dire des fonctions tendant vers l'infini à un point particulier et valant "0" partout ailleurs, et telles que l'intégrale de chaque fonction sur le domaine vaut "1". L'équation obtenue est utilisée uniquement dans des cas particuliers.

6.6 Résumé sur les différentes méthodes.

Soit une équation aux dérivées partielles : $\mathcal{L}(U) = 0$, un espace vectoriel généré par des fonctions e , la formulation variationnelle de l'EDP, approchée par rapport à l'espace vectoriel est :

$$\int_{\mathcal{D}} \mathcal{L}(U)e.dv = 0 \quad (62)$$

Ce qui correspond intuitivement à la projection (à un facteur près) de $\mathcal{L}(U) = 0$ sur les fonctions de base. Traditionnellement, on parle certaines fois de méthode des résidus pondérés, souvent de méthode de "Galerkin" (très connu), et en mécanique l'appellation usitée équivalente est le principe des puissances virtuelles PPV. Lorsqu'un principe physique de minimisation existe tel que celui de l'énergie, celui-ci permet également d'obtenir une forme variationnelle. Sauf cas particulier, les expressions obtenues sont moins générales et moins performantes que la méthode de projection.

7 Application du principe variationnel à une discrétisation par éléments finis

7.1 Cas de la déformation mécanique élastique d'un solide en statique linéaire

Rappelons la formulation faible des équations d'équilibre en statique sans forces de volume.

$$-\int_{\mathcal{D}} \sigma^{ij} V_{i|j}^* dv + \int_{\partial\mathcal{D}} T^i V_i^* ds = 0 \quad (63)$$

- V_i^* : représente la coordonnée "i" du vecteur \vec{V}^* qui est une vitesse cinématiquement admissible c'est-à-dire conforme avec les possibilités de la matière.
- σ^{ij} : coordonnées du tenseur de contraintes
- T^i : coordonnées des forces de surface sur la frontière extérieure du solide
- \mathcal{D} : volume du solide
- $\partial\mathcal{D}$: frontière du solide

Dans la plupart des codes éléments finis classiques l'inconnue est la fonction déplacement. Il faut cependant noter que d'un point de vue conceptuel, il est plus simple de choisir la position \vec{OM} , la définition du vecteur déplacement pouvant poser des problèmes dans le cadre des grandes transformations. La position de l'origine étant tout à fait arbitraire, nous noterons le vecteur position \vec{X} .

Dans le cadre de ce chapitre qui concerne un comportement d'élasticité linéaire en petites déformations, nous utiliserons comme inconnue la fonction déplacement, par contre dans les chapitres relatifs aux grandes transformations et aux comportements non linéaires, nous utiliserons comme inconnue le vecteur position.

\vec{X} et \vec{U} sont discrétisés sur le maillage. Ce maillage décompose \mathcal{D} en n_e volumes élémentaires \mathcal{V}_e .

$$\mathcal{D} = \sum_{ne} \mathcal{V}_e \quad (64)$$

Sur chaque volume on choisit un type d'interpolation d'une part pour la géométrie initiale, et d'autre part pour la géométrie finale qui constitue l'inconnue du problème en grandes transformations, ou \vec{U} pour le cas des petites déformations. Dans notre cas nous retiendrons la même interpolation pour les deux géométries, ce qui conduit à un élément dit isoparamétrique.

$$\begin{aligned} \vec{X}_{(0)} &= X_{(0)}^a \vec{I}_a = X_{(0)}^{ar} \varphi_r \vec{I}_a \\ \vec{X}_{(t)} &= \vec{X} = X^a \vec{I}_a = X^{ar} \varphi_r \vec{I}_a \\ \text{ou encore en petites déformations } \vec{U} &= U^a \vec{I}_a = U^{ar} \varphi_r \vec{I}_a \end{aligned} \quad (65)$$

L'expression (63) s'écrit :

$$\sum_{ne} \left(-\int_{\mathcal{V}_e} \sigma^{ij} V_{i|j}^* dv + \int_{\partial\mathcal{V}_e} T^i V_i^* ds \right) = 0 \quad (66)$$

$\partial\mathcal{V}_e$ est la partie de frontière éventuelle appartenant à \mathcal{V}_e , les éléments internes n'ayant par exemple pas de frontière.

Le champ de contraintes est calculé à partir de la loi de comportement, appelée loi constitutive, en fonction du champ de déplacement. Dans le cas de l'élasticité linéaire :

$$\sigma^{ij} = E^{ijkl} \varepsilon_{kl}(\vec{U}) \quad (67)$$

Une base naturelle est définie en fonction du paramétrage ζ^i de l'élément de référence :

$$\vec{g}_i = X^a_{,i} \vec{I}_a = X^{ar} \varphi_{r,i} \vec{I}_a \quad (68)$$

On en déduit la base duale et les différentes métriques associées. \vec{g}^i , g_{ij} , g^{ij} , g et \sqrt{g} . Dans notre cas (petites déformations) nous travaillerons uniquement sur la configuration initiale, non déformée repérée localement par (M, \vec{g}_i) . Les composantes covariantes du déplacement dans cette base s'en déduisent :

$$\begin{aligned} U_k &= \vec{U} \cdot \vec{g}_k = (U^{ar} \varphi_{r,i} \vec{I}_a) (X^{bs} \varphi_{s,k} \vec{I}_b) \\ &= U^{ar} (X^{as} \varphi_{r,s,k}) \end{aligned} \quad (69)$$

et :

$$\begin{aligned} U_{k|l} &= \vec{U}_{,l} \cdot \vec{g}_k = (U^{ar} \varphi_{r,l} \vec{I}_a) (X^{bs} \varphi_{s,k} \vec{I}_b) \\ &= U^{ar} (X^{as} \varphi_{r,l} \varphi_{s,k}) \end{aligned} \quad (70)$$

Rappelons qu'en petites déformations, dans le calcul de la déformation, le déplacement peut être exprimé dans le repère initial, ce qui conduit à l'expression :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij} &= \frac{1}{2} (U_{i|j} + U_{j|i}) \\ &= U^{ar} \frac{X^{as}}{2} (\varphi_{r,i} \varphi_{s,j} + \varphi_{r,j} \varphi_{s,i}) \end{aligned} \quad (71)$$

où le X^{as} sont les coordonnées initiales connues. Les contraintes sont obtenues à partir du comportement élastique et en tenant compte de la symétrie du tenseur \mathbf{E} : $E^{ijkl} = E^{ijlk}$, et de celle du tenseur des déformations $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$, ce qui permet de simplifier l'expression finale.

$$\begin{aligned} \sigma^{ij} &= E^{ijkl} \varepsilon_{kl} = E^{ijkl} \frac{1}{2} (U_{k|l} + U_{l|k}) \\ &= \frac{1}{2} (E^{ijkl} U_{k|l} + E^{ijkl} U_{l|k}) \\ &= \frac{1}{2} (E^{ijkl} U_{k|l} + E^{ijlk} U_{k|l}) \\ &= \frac{1}{2} (E^{ijkl} + E^{ijlk}) U_{k|l} \\ &= E^{ijkl} U_{k|l} \\ &= E^{ijkl} U^{ar} (X^{as} \varphi_{r,l} \varphi_{s,k}) \end{aligned} \quad (72)$$

Le déplacement virtuel représente tous les déplacements possibles. En utilisant la même discrétisation que pour U , ce qui est cohérent, cela conduit à :

$$\vec{U} = \vec{U}^{*ar} \varphi_r \vec{I}_a \quad (73)$$

d'où pour la vitesse virtuelle :

$$\vec{V} = \vec{V}^{*ar} \varphi_r \vec{I}_a \quad (74)$$

et de même pour la dérivée covariante :

$$\begin{aligned} V_{k|l}^* &= \vec{V}_{,l}^* \cdot \vec{g}_k = (\vec{V}^{*ar} \varphi_{r,l} \vec{I}_a) (X^{bs} \varphi_{s,k} \vec{I}_b) \\ &= \vec{V}^{*ar} (X^{as} \varphi_{r,l} \varphi_{s,k}) \end{aligned} \quad (75)$$

Il reste dans l'équation du PPV à calculer l'élément de volume relativement au système de coordonnées curvilignes ζ^i de l'élément de référence.

$$dv = \sqrt{g} d\zeta^1 d\zeta^2 d\zeta^3 \quad (76)$$

Maintenant nous sommes en mesure de calculer les différents termes de l'équation (66) en cherchant à isoler les inconnues U^{ar} .

7.1.1 L'intégrale sur l'élément :

$$\begin{aligned} - \int_{\mathcal{V}_e} \sigma^{ij} V_{i|j}^* dv &= - \int_{\mathcal{V}_e} E^{ijkl} U^{ar} (X^{as} \varphi_{r,l} \varphi_{s,k}) V^{*bt} (X^{bu} \varphi_{t,j} \varphi_{u,i}) \sqrt{g} d\zeta^1 d\zeta^2 d\zeta^3 \\ &= - \vec{V}^{*bt} U^{ar} \int_{\mathcal{V}_e} E^{ijkl} (X^{as} \varphi_{r,l} \varphi_{s,k}) (X^{bu} \varphi_{t,j} \varphi_{u,i}) \sqrt{g} d\zeta^1 d\zeta^2 d\zeta^3 \end{aligned} \quad (77)$$

Sous le signe intégrale, toutes les fonctions sont connues, ainsi l'intégrale est calculable et on peut écrire :

$$- \int_{\mathcal{V}_e} \sigma^{ij} V_{i|j}^* dv = - \vec{V}^{*ar} U^{bt} k_{ar.bt} = - \langle \vec{V}^{*ar} \rangle [k_{ar.bt}] (U^{bt}) \quad (78)$$

où la matrice $[k_{ar.bt}]$ est connue et les composantes du vecteur (U^{bt}) représentent les inconnues nodales du problème pour l'élément considéré. Il est ensuite nécessaire de faire la somme des intégrales sur chaque élément.

$$\begin{aligned} \sum_{ne} \left(- \int_{\mathcal{V}_e} \sigma^{ij} V_{i|j}^* dv \right) &= - \sum_{ne} \left(\vec{V}^{*ar} U^{bt} k_{ar.bt} \right) \\ &= - \vec{V}^{*ar(g)} U^{bt(g)} \sum_{ne} k_{ar.bt} \\ &= - \vec{V}^{*ar(g)} U^{bt(g)} K_{ar(g).bt(g)} \\ &= - \langle \vec{V}^{*ar(g)} \rangle [K_{ar(g).bt(g)}] (U^{bt(g)}) \end{aligned} \quad (79)$$

L'opération qui consiste à regrouper les différentes matrices, en les sommant, dans une grande matrice $[K]$ s'appelle l'assemblage. De manière à différencier les indices de nœuds locaux à l'élément ' r ' et ' t ', des indices globaux de numéros de nœud, c'est-à-dire variant de 1 au nombre total de nœuds, nous utilisons pour ces derniers : ' $r_{(g)}$ ' et ' $t_{(g)}$ '. Les vecteurs locaux de vitesses virtuelles et d'inconnues ont aussi été assemblés dans des vecteurs globaux d'où le changement d'indice.

Remarque

Dans la suite du texte lorsqu'aucune confusion ne sera à craindre, nous utiliserons les indices ' r ' et ' t ' etc., même pour les numéros globaux.

La matrice $[K]$ s'appelle la matrice de raideur, nom qui sera justifié par la suite.

7.1.2 L'intégrale éventuelle sur la frontière de l'élément :

Concernant la contribution des efforts extérieurs connus \vec{T} , dans le cas où l'élément a une frontière soumise à un chargement :

$$\begin{aligned} \int_{\partial\mathcal{V}_e} \vec{T} \vec{V}^* ds &= \int_{\partial\mathcal{V}_e} T^a \vec{V}^{*ar} \varphi_r ds \\ &= \vec{V}^{*ar} \int_{\partial\mathcal{V}_e} T^a \varphi_r ds \\ &= \langle \vec{V}^{*ar} \rangle \left(\int_{\partial\mathcal{V}_e} T^a \varphi_r ds \right) \end{aligned} \quad (80)$$

Le terme à intégrer est connu, l'intégration est donc possible et on écrira :

$$\begin{aligned} \int_{\partial\mathcal{V}_e} \vec{T} \vec{V}^* ds &= \vec{V}^{*ar} S m_{ar} \\ &= \langle \vec{V}^{*ar} \rangle (S m_{ar}) \end{aligned} \quad (81)$$

où $(S m_{ar})$ représente un vecteur connu que l'on appellera le vecteur second membre. Tout comme pour l'intégrale de volume, il est maintenant nécessaire d'assembler les seconds membres c'est-à-dire de les sommer dans un vecteur global.

$$\begin{aligned} \sum_{ne} \left(\int_{\partial\mathcal{V}_e} T^i \vec{V}_i^* ds \right) &= \sum_{ne} \left(\vec{V}^{*ar} S m_{ar} \right) \\ &= \vec{V}^{*ar(g)} S M_{ar(g)} \\ &= \langle \vec{V}^{*ar(g)} \rangle (S M_{ar(g)}) \end{aligned} \quad (82)$$

Le vecteur $(S M_{ar(g)})$ est dénommé second membre global.

7.1.3 Expression matricielle de la forme variationnelle

A partir des différents calculs précédents nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned}
0 &= \sum_{ne} \left(- \int_{\mathcal{V}_e} \sigma^{ij} \dot{V}_{i|j}^* dv + \int_{\partial\mathcal{V}_e} T^i \dot{V}_i^* ds \right) \\
&= - \left\langle \dot{V}^{*ar(g)} \right\rangle [K_{ar(g).bt(g)}] (U^{bt(g)}) + \left\langle \dot{V}^{*ar(g)} \right\rangle (SM_{ar(g)}) \\
&= - \left\langle \dot{V}^{*ar(g)} \right\rangle \left([K_{ar(g).bt(g)}] (U^{bt(g)}) - (SM_{ar(g)}) \right)
\end{aligned} \tag{83}$$

La vitesse virtuelle est une vitesse générique, elle représente toutes les vitesses possibles. Dans ce cas, pour que l'équation (83) soit toujours vérifiée quel que soit $\dot{V}^{*ar(g)}$, il est nécessaire que l'on ait :

$$0 = \left([K_{ar(g).bt(g)}] (U^{bt(g)}) - (SM_{ar(g)}) \right) \tag{84}$$

que l'on peut aussi écrire sous la forme :

$$[K_{ar(g).bt(g)}] (U^{bt(g)}) = (SM_{ar(g)}) \tag{85}$$

Pour résoudre cette équation il suffit d'inverser la matrice de raideur $[K]$. En fait sous cette forme, la matrice est singulière. Ceci traduit la condition physique que l'équation d'équilibre local qui est le point de départ de la formulation variationnelle, ne rend compte que de l'état de déformation de la pièce, indépendamment de tout mouvement solide, c'est-à-dire que résoudre l'équilibre local ne fournit pas une seule solution mais un ensemble de solutions différentes à un mouvement solide près. Ceci se traduit mathématiquement par une singularité de la matrice de raideur. Pour éviter cette singularité, de manière à n'obtenir qu'une seule solution, nous devons bloquer les mouvements solides. Par exemple en 3 dimensions, nous avons 6 mouvements solides, qui peuvent se représenter par le blocage de 3 translations et 3 rotations ou encore de 6 translations différentes qui permettent de définir : 1 plan (3 translations), 1 droite (2 translations) et 1 point (1 translation). La définition de ces 6 translations ou de ces 6 positions (cas de 6 translations nulles) doit positionner exactement le solide avant chargement, mais ceci de manière isostatique pour ne pas engendrer de contrainte supplémentaire lors du chargement.

D'un point de vue pratique, nous verrons qu'en éléments finis, la prise en compte de ces conditions cinématiques de blocage conduit à une modification de la matrice de raideur et certaines fois du second membre. Dans tous les cas, la raideur finale que nous noterons $[K']$ ne sera plus singulière, ce qui permet alors de l'inverser. On obtient alors la solution à notre problème sous la forme :

$$(U^{bt(g)}) = [K'_{ar(g).bt(g)}]^{-1} (SM_{ar(g)}) \tag{86}$$

Remarque concernant le terme "raideur". Dans le cas de l'extension δU d'un ressort de raideur "k", soumis à une force F , on a la relation suivante :

$$k\delta U = F \quad \text{ou encore} \quad \delta U = k^{-1}F \tag{87}$$

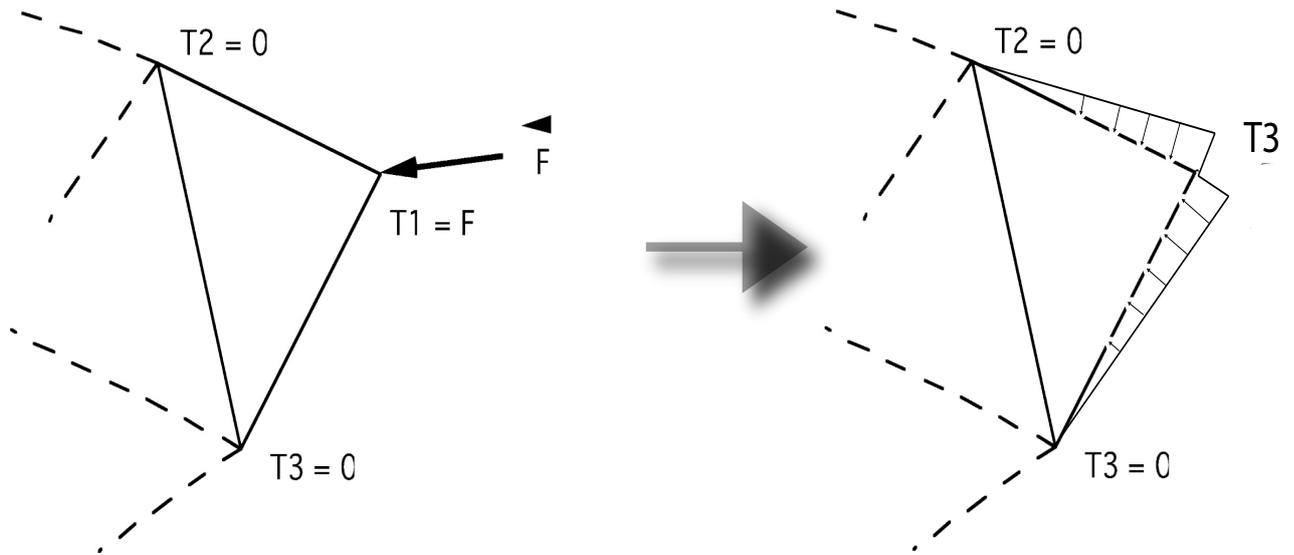


FIG. 24 – cas d’une force ponctuelle, et équivalence en force surfacique

On retrouve une forme d’équation identique aux expressions (85,86), d’où le nom de raideur à la matrice $[K]$. On verra que dans tous les cas de résolution d’un problème d’éléments finis, on obtient en finale des expressions analogues à (85,86), seul le nom des degrés de liberté change, aussi par extension, quel que soit le problème traité (thermique, électromagnétique, ...) on utilisera toujours le terme de “matrice de raideur” pour la matrice multiplicative des degrés de liberté, dont le symbole sera souvent pris égal à K .

Remarque concernant l’application de forces ponctuelles. Le calcul du second membre utilise les efforts extérieurs surfaciques \vec{T} , appliqués sur la frontière du solide. En fait, d’un point de vue physique, il n’est pas possible d’avoir des forces ponctuelles, car dans ce cas celles-ci entraîneraient une contrainte infinie dans le matériau de part par exemple les équations de continuité :

$$\vec{T} = \sigma \cdot \vec{n} \quad (88)$$

avec \vec{n} la normale à la surface externe. En fait un effort externe s’applique toujours sur une certaine portion de surface.

Néanmoins, il est souvent pratique d’utiliser la notion de force ponctuelle, par exemple lorsque l’on ne connaît pas la surface d’application de la force. Il s’agit alors de calculer la puissance virtuelle de ces efforts ponctuels, ou encore le second membre qui lui correspond. Pour cela on peut appliquer le principe de la dynamique qui stipule que la puissance développée par une force ponctuelle en \vec{M} est donnée par :

$$\dot{P}^* = \vec{F} \cdot \dot{V}^*(M) \quad (89)$$

L’application d’une force ponctuelle se révèle être équivalente dans les faits à l’application

d'une charge surfacique (cf. figure 24). Soit \vec{F} la force ponctuelle et $\vec{T} = \vec{T}^r \varphi_r$ la charge surfacique discrétisée correspondante. Dans ce cas nous avons :

$$\begin{aligned}\vec{T}^1 &= \vec{F} \\ \vec{T}^2 &= \vec{0} \\ \vec{T}^3 &= \vec{0}\end{aligned}$$

et

$$\vec{F} \cdot \vec{V}^*(M) = \int_{\partial\mathcal{D}} \vec{T} \cdot \vec{V}^* ds \quad (90)$$

La force surfacique équivalente à la force ponctuelle, concerne les éléments contenant le nœud sur lequel la force ponctuelle est appliquée. La force surfacique est numériquement égale à la force ponctuelle au nœud d'application, puis elle décroît vers 0 aux autres nœuds. Ainsi plus la taille des éléments contenant la force ponctuelle est faible, plus la contrainte générée par la force surfacique équivalente sera d'intensité forte et vice-versa. Lorsque la taille tend vers zéro, la contrainte tend vers l'infini, ce qui est cohérent avec la notion de singularité d'une force ponctuelle.

En résumé, il est possible d'utiliser des forces ponctuelles. Mais il faut être conscient que près de l'application des forces ponctuelles, l'intensité des contraintes générées sera dépendante de la taille des éléments. Il faut donc soit s'éloigner du point d'application de la force ponctuelle pour retrouver des contraintes physiquement admissibles, soit remplacer cette force ponctuelle par une densité d'effort sur une surface donnée.

7.1.4 Exemple de la traction d'une poutre.

De manière à illustrer la méthode, nous allons étudier le cas d'une poutre, supposée encastree à une extrémité et soumise à un effort de traction à l'autre extrémité, figure 25.

La poutre, dont les caractéristiques géométriques et physiques sont considérées connues i.e longueur et section L S , module d'YOUNG E , est maillée à l'aide d'un seul élément fini linéaire. Rappelons les caractéristiques des fonctions d'interpolation :

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= \frac{(1-\xi)}{2}, \quad \varphi_2 = \frac{(1+\xi)}{2} \\ \varphi'_1 &= \frac{-1}{2}, \quad \varphi'_2 = \frac{1}{2}\end{aligned} \quad (91)$$

Tout d'abord nous discrétisons la géométrie selon la formule générale $X^a = X^{ar} \varphi_r$ avec dans notre cas une seule coordonnée $X^1 = X$ d'où ici :

$$X = X^r \varphi_r(\xi) = X^1 \frac{(1-\xi)}{2} + X^2 \frac{(1+\xi)}{2} \quad (92)$$

Les éléments de la métrique relativement au paramétrage retenu (ξ) s'en déduisent selon la formule générale $\vec{g}_i = \vec{X}_{,i}$, pour notre cas seul le vecteur \vec{g}_1 est disponible.

$$\vec{g}_1 = X^r \varphi_{r,i} \vec{I}_1$$

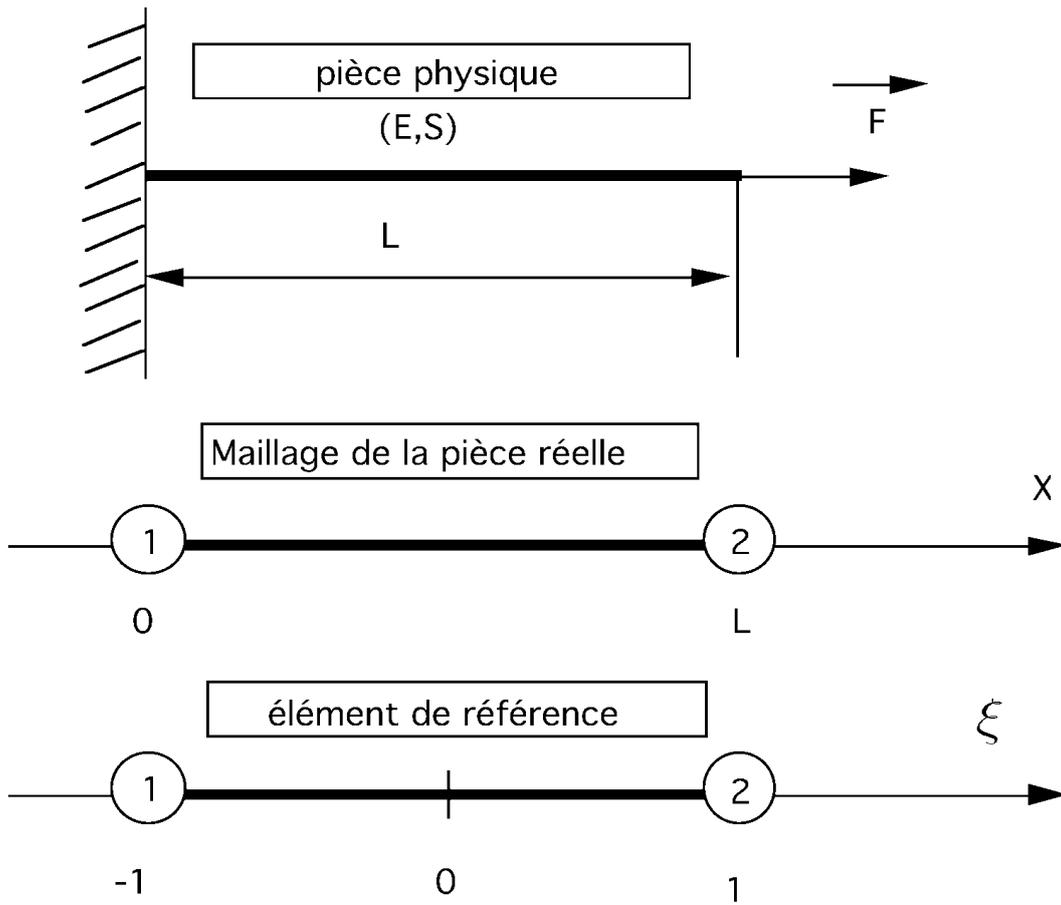


FIG. 25 – Traction simple d'une poutre

$$\begin{aligned}
&= X^1\left(\frac{-1}{2}\right) + X^2\left(\frac{1}{2}\right)\vec{I}_1 \\
&= \frac{L}{2}\vec{I}_1 \\
\text{et} \\
g_{11} &= \left(\frac{L}{2}\right)^2
\end{aligned} \tag{93}$$

et pour le jacobien en 1D :

$$\sqrt{g} = \sqrt{|[g_{ij}]|} = \sqrt{\left(\frac{L}{2}\right)^2} = \frac{L}{2} \tag{94}$$

Puis les vecteurs de la base duale sont calculés à l'aide de $\vec{g}_i \cdot \vec{g}^j = \delta_i^j$. En 1D les vecteurs \vec{g}_1 et \vec{g}^1 sont colinéaires :

$$\vec{g}^1 = \frac{2}{L}\vec{I}_1 \quad \text{et} \quad g^{11} = \frac{4}{L^2} \tag{95}$$

Nous pouvons maintenant exprimer la déformation puis la contrainte en fonction des inconnues nodales.

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{11} &= U_{1|1} = \vec{U}_{,1} \cdot \vec{g}_1 \\
&= U^r \varphi_{r,1} \vec{I}_1 \cdot \vec{g}_1 \\
&= \left(U^1\left(\frac{-1}{2}\right) + U^2\left(\frac{1}{2}\right) \right) \frac{L}{2} \\
&= \frac{L}{4} \langle -1, 1 \rangle \begin{pmatrix} U^1 \\ U^2 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{96}$$

et en considérant que seule la déformation longitudinale est non nulle :

$$\begin{aligned}
\sigma_1^1 &= E\varepsilon_1^1 = E\varepsilon_{11}g^{11} = E\varepsilon_{11}\frac{4}{L^2} \\
&= \frac{(EL)}{4} \langle -1, 1 \rangle \begin{pmatrix} U^1 \\ U^2 \end{pmatrix} \frac{4}{L^2} \\
&= \frac{(E)}{L} \langle -1, 1 \rangle \begin{pmatrix} U^1 \\ U^2 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{97}$$

et

$$\begin{aligned}
\sigma^{11} &= \sigma_1^1 g^{11} \\
&= \frac{(4E)}{L^3} \langle -1, 1 \rangle \begin{pmatrix} U^1 \\ U^2 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{98}$$

La vitesse virtuelle est générique de toutes les vitesses possibles, elle doit donc être cohérente avec la vitesse réelle c'est-à-dire être interpolée d'une manière identique au déplacement réel.

$$\vec{V}_{1,1}^* = \frac{L}{4} \langle -1, 1 \rangle \begin{pmatrix} \vec{V}^1 \\ \vec{V}^2 \end{pmatrix} \tag{99}$$

que nous utiliserons plutôt sous la forme matricielle transposée :

$$\dot{V}_{1,1}^* = \langle \dot{V}^*, \dot{V}^2 \rangle \frac{L}{4} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (100)$$

Nous avons maintenant tous les éléments pour calculer la puissance interne virtuelle, ceci en tenant compte des termes constants que l'on peut sortir de l'intégrale.

$$\begin{aligned} \dot{P}_i^* &= - \int_{\mathcal{D}} \sigma^{11} \dot{V}_{1,1}^* dv \\ &= - \int_{-1}^1 \sigma^{11} \dot{V}_{1,1}^* S \sqrt{g} d\xi \\ &= - \int_{-1}^1 \frac{(4E)}{L^3} \langle -1, 1 \rangle \begin{pmatrix} U^1 \\ U^2 \end{pmatrix} \langle \dot{V}^*, \dot{V}^2 \rangle \frac{L}{4} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} S \frac{L}{2} d\xi \\ &= - \langle \dot{V}^*, \dot{V}^2 \rangle \frac{(ES)}{2L} \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} d\xi \begin{pmatrix} U^1 \\ U^2 \end{pmatrix} \\ &= - \langle \dot{V}^*, \dot{V}^2 \rangle \frac{(E S)}{2L} 2 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} U^1 \\ U^2 \end{pmatrix} \\ &= - \langle \dot{V}^*, \dot{V}^2 \rangle \frac{(E S)}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} U^1 \\ U^2 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (101)$$

Concernant le calcul du vecteur second membre correspondant à la puissance externe, il s'agit de prendre en compte l'influence d'une force ponctuelle.

$$\begin{aligned} \dot{P}_{ex}^* &= F \dot{V}^2 \\ &= \langle \dot{V}^*, \dot{V}^2 \rangle \begin{pmatrix} 0 \\ F \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (102)$$

D'où la forme variationnelle des équations d'équilibre :

$$\begin{aligned} \dot{P}_i^* + \dot{P}_{ex}^* &= 0 \\ &= \langle \dot{V}^*, \dot{V}^2 \rangle \left(-\frac{(E S)}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} U^1 \\ U^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ F \end{pmatrix} \right) \end{aligned} \quad (103)$$

qui devant être satisfaite quel que soit le champ de vitesse virtuelle retenu conduit à :

$$\frac{(E S)}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} U^1 \\ U^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ F \end{pmatrix} \quad (104)$$

Comme nous l'avons précisé plus haut, la matrice de raideur obtenue est singulière car nous n'avons pas tenu compte des conditions d'immobilisation initiales de la pièce, ici l'encastrement de la poutre. Dans notre cas, cette condition limite correspond à la condition $U^1 = 0$. Nous verrons par la suite que la méthode pratique pour imposer numériquement une telle condition consiste, pour la ligne et la colonne correspondant respectivement au degré de liberté réel et virtuel bloqué, à annuler tous les termes de la matrice de raideur

excepté le terme diagonal qui est remplacé par la valeur 1, le second membre restant inchangé. Appliquée à notre problème, cette méthode conduit au système suivant :

$$\frac{(E S)}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} U^1 \\ U^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ F \end{pmatrix} \quad (105)$$

Nous remarquons que la matrice de raideur est ici non singulière, ce qui permet son inversion et la détermination de la solution de notre problème discrétisé :

$$U^{(2)} = \frac{F L}{S E} \quad (106)$$

La solution obtenue s'avère être la solution exacte du problème non discrétisé!

7.2 Cas général de la déformation mécanique d'un solide en statique

Dans le cas général, différentes hypothèses de linéarisation sont à reconsidérer. On peut retenir trois principales hypothèses qui peuvent conduire à une réponse fortement non linéaire par rapport aux inconnues recherchées :

- **La loi de comportement.** Par exemple, dans le cas de la mise en forme par déformation, emboutissage, estampage, extrusion, ..., le tenseur des contraintes obtenu n'est plus une forme linéaire du champ de déformation.
- **Les grandes transformations.** On entend par là les grands déplacements et les états de grandes déformations. Il est clair que dans ce cas les relations déplacements/déformations ou positions/déformations sont des fonctions non linéaires, en général quadratiques.
- **Conditions limites de contact.** Ces conditions limites dans la pratique très courantes, introduisent une dépendance de la puissance virtuelle extérieure au champ de déplacement ou de position.

Ainsi dans le cas général, la formulation variationnelle alliée à une discrétisation ne s'exprime pas simplement sous la forme d'un système matriciel linéaire : $\langle V^* \rangle ([K](U) - (SM)) = 0$ mais plutôt sous la forme d'une fonction non linéaire à annuler \mathcal{R} appelée résidu telle que la forme variationnelle soit exprimée selon $\langle V^* \rangle (\mathcal{R}) = 0$. Néanmoins nous verrons que ce problème général peut se résoudre au travers d'une suite de problèmes linéaires dont la résolution successive permet de converger vers la solution du problème non linéaire (voir par la suite la méthode de NEWTON RAPHSON par exemple).

7.3 Remarque sur l'intégration par partie, à partir d'exemples

7.3.1 Deux Exemples d'équations aux dérivées partielles représentant un phénomène mécanique.

Poutre en traction Soit une poutre de longueur L, encastée à une extrémité et soumise à une force de traction à l'autre extrémité. L'équilibre mécanique dans le cas où il n'y a pas de force de volume et en statique, se modélise en 1D par

$$\frac{d\sigma}{dx} = 0 \quad (107)$$

En tenant compte d'une loi de comportement de Hooke et en petites déformations on a :

$$\sigma = E\varepsilon = E \frac{dU}{dx} \quad (108)$$

avec U le déplacement en x.

L'équilibre locale est donc représentée par une équation du second ordre :

$$E \frac{d^2U}{dx^2} = 0 \quad (109)$$

Pour trouver une solution, il est de plus nécessaire d'imposer des conditions limites soit en déplacements imposés aux extrémités ou soit mixte en déplacements et forces.

Poutre en flexion Soit une poutre en flexion dans le cadre des petites déformations, et de la loi de Hooke. Soient x l'axe de la poutre, et y le déplacement transversal. L'équation classique d'équilibre local obtenue dans le cadre des hypothèses de la RDM est :

$$M(x) = EI_{yy}y'' \quad (110)$$

En supposant connue la fonction M(x) à l'aide par exemple de l'étude de l'équilibre d'un tronçon de poutre, on obtient une équation du second ordre :

$$y'' = \frac{M(x)}{EI_{yy}} \quad (111)$$

Pour trouver une solution il est nécessaire d'imposer des conditions limites en déplacements imposés ou mixte en forces et déplacements.

7.3.2 Généralisation et formulations variationnelles

Forme générale de l'équation différentielle Les deux cas présentés peuvent se mettre sous la forme :

$$y'' - f(x) = 0 \quad (112)$$

dans laquelle f(x) est une fonction connue. On suppose de plus que des conditions limites soient connues en des points x particuliers soit sous forme de y connue, ou soit sous forme de y' connue.

Dans le cas de la poutre en traction, f(x)=0 et y est représenté par le déplacement.

Formulation variationnelle de Galerkin Soit un espace de fonction, par exemple les fonctions polynomiales, dans lequel on cherche une solution. Appelons \tilde{y}^* l'ensemble des fonctions possible pour y, alors la formulation variationnelle de Galerkin de l'équation différentielle est :

$$\int_D (y'' - f(x)) \tilde{y}^* dx = 0 \quad (113)$$

Dans le cas d'une discrétisation par éléments finis, on découpe le domaine de travail D en éléments distincts. Le fait d'avoir une dérivée seconde dans l'expression impose alors que la fonction discrétisée sur chaque élément soit de continuité C^1 entre deux éléments.

C'est-à-dire que sa dérivée première soit continue. Ceci impose d'utiliser des fonctions d'interpolation plus complexe que celles obtenues par interpolation de Lagrange classique, d'où l'intérêt d'utiliser plutôt une forme variationnelle équivalente appelée forme faible obtenue par intégration par partie de la dérivée seconde.

Ceci étant la forme faible est mathématiquement strictement équivalente à la forme initiale. Aussi, supposons que l'on utilise une interpolation linéaire. Avec la forme variationnelle initiale, y'' interpolé sera nulle, on voit bien que dans ce cas l'expression (113) conduit à :

$$\int_D (-f(x)) \dot{y}^* dx = 0 \quad (114)$$

expression dans laquelle il n'y a plus d'inconnue. Il n'est donc pas possible d'utiliser des polynômes d'ordre 1. Si l'on utilise la forme faible on a en supposant $D = [a, b]$ le domaine d'étude :

$$[y' \dot{y}^*]_a^b - \int_D y' \dot{y}'^* dx - \int_D f(x) \dot{y}^* dx = 0 \quad (115)$$

Dans cette expression, il n'y a que des dérivée première donc a priori la fonction y' interpolée n'est pas nulle. En fait tout calcul fait la partie de l'expression contenant la dérivée seconde est quand même nulle dans le cas d'une interpolation linéaire car mathématiquement la forme intégrée par partie est strictement égale à la forme initiale contenant la dérivée seconde :

$$\int_D y'' \dot{y}^* dx = [y' \dot{y}^*]_a^b - \int_D y' \dot{y}'^* dx = 0 \quad (116)$$

Ainsi en résumé, en l'absence d'information supplémentaires, en présence de dérivées secondes dans la forme variationnelle initiale, il est nécessaire d'utiliser des polynômes de degré supérieur ou égal à 2, c'est-à-dire des éléments au minimum quadratique même si l'on adopte une formulation faible.

Cas d'une poutre en traction Cependant dans le cas de la mécanique, il est possible de retenir dans certain cas une interpolation linéaire. Reprenons le cas d'une poutre en traction. On aura pour la forme faible :

$$\int_D EU'' \dot{U}^* dx = [EU' \dot{U}^*]_a^b - \int_D EU' \dot{U}'^* dx = 0 \quad (117)$$

On utilise alors les conditions d'équilibre à la frontière en 1D $\sigma = F/S$ (ou en 3D $\sigma \cdot \vec{n} = \vec{T}$ \vec{T} représentant les densités de forces appliquées sur la frontière, éventuellement nulle mais connues). En utilisant cette expression dans (117) on obtient :

$$\int_D EU'' \dot{U}^* dx = \left[\frac{F}{S} \dot{U}^* \right]_a^b - \int_D EU' \dot{U}'^* dx = 0 \quad (118)$$

L'expression est alors tout à fait utilisable même avec des éléments linéaires

Cas d'une poutre en flexion Soit une poutre en flexion sur les deux extrémités. Dans ce cas à chaque extrémités on a $y = 0$. Comme \dot{y}^* représente toutes les fonctions possibles respectants la cinématique réelle, on doit également avoir $\dot{y}^* = 0$ à chaque extrémité. Dans

ce cas dans l'expression (116) le terme $[y' \overset{*}{y}]_a^b$ est systématiquement nul. Dans ce cas le terme restant $-\int_D y' \overset{*}{y} dx$ est non nul même avec une interpolation linéaire.

Par contre le cas d'une poutre encastree à une extrémité, calculée sans précaution particulière, pose des problèmes et ne permet pas d'obtenir une solution correcte avec une interpolation linéaire.

8 Méthodes numériques

8.1 Assemblage des matrices de raideur et de second membre

Considérons un maillage de plusieurs éléments. Nous avons vu que la forme variationnelle des équations aux dérivées partielles fait apparaître une intégrale sur le domaine d'étude. Dans le cas des éléments finis, ce domaine est discrétisé et représenté par un recouvrement de plusieurs éléments. Ainsi l'intégration est obtenue par la somme de l'intégrale sur chaque élément.

Cette décomposition a été vue par exemple au chapitre 7.1. Elle a abouti au calcul de matrices de raideur et de vecteurs second membre locaux. Ces matrices et vecteurs doivent ensuite être réunies au sein d'une matrice générale et d'un vecteur général, ce qui constitue l'opération d'assemblage. En fait cette étape d'assemblage sera nécessaire quel que soit le problème abordé, linéaire ou non linéaire.

Soit NbN le nombre total de noeuds, dim la dimension de l'espace, $NBDDL$ le nombre total de degrés de liberté et $NDDL$ le nombre de degrés de liberté par noeud. Ce nombre de degrés de liberté par noeud sera considéré constant pour tous les noeuds ; nous verrons par la suite comment étendre la méthode dans le cas contraire.

Dans le cas d'un problème de mécanique par exemple, l'inconnue est la position finale des points matériels, c'est-à-dire les coordonnées finales des noeuds. Alors le nombre total de degrés de liberté s'obtient selon :

$$NBDDL = dim NBN$$

La dimension "théorique" de la matrice de raideur totale $[K]$ est : $NBDDL^2$ et celle du vecteur second membre : $NBDDL$. Soit NBE le nombre d'éléments et le tableau à deux indices $CONEC(NL, NE)$, la table de connexion des éléments. Le premier indice, NL , varie de 1 au nombre total de noeuds par élément $NBNEL$. Le second indice NE représente le numéro de l'élément considéré, il appartient donc à $[1, NBE]$. Ainsi l'élément du tableau : $CONEC(NL, NE)$ représente le numéro global du noeud de numéro local NL dans l'élément NE .

Une première méthode simple qui vient tout de suite à l'esprit pour assembler les matrices locales en une matrice globale est de construire explicitement les matrices et vecteurs locaux $[k]$, (Sm) , étendus à l'ensemble des degrés de liberté, c'est-à-dire en remplaçant tous les termes non calculés par 0. La matrice de raideur $[K]$ et le second membre (SM) pour toute la structure sont obtenus alors par addition de toutes les raideurs et seconds membres locaux. En fait il faudrait sommer alors sur un nombre important de 0 que contiennent les matrices $[k]$ de dimension $NBDDL$, ce qui n'est pas avantageux au niveau temps de calcul. Ce nombre important d'éléments nuls provient du fait que la dimension de la matrice locale, qui dépend du nombre de noeuds de l'élément considéré, est bien plus petite que celle de la matrice globale qui dépend du nombre total de noeuds. Pour éviter ces additions inutiles d'éléments nuls, la méthode consiste à définir une matrice et un vecteur second membre globaux de composantes nulles, puis successivement, pour chaque élément, on vient rajouter les termes des grandeurs locales dans les grandeurs globales à l'endroit adéquat. La table de connexion est utilisée à cet effet.

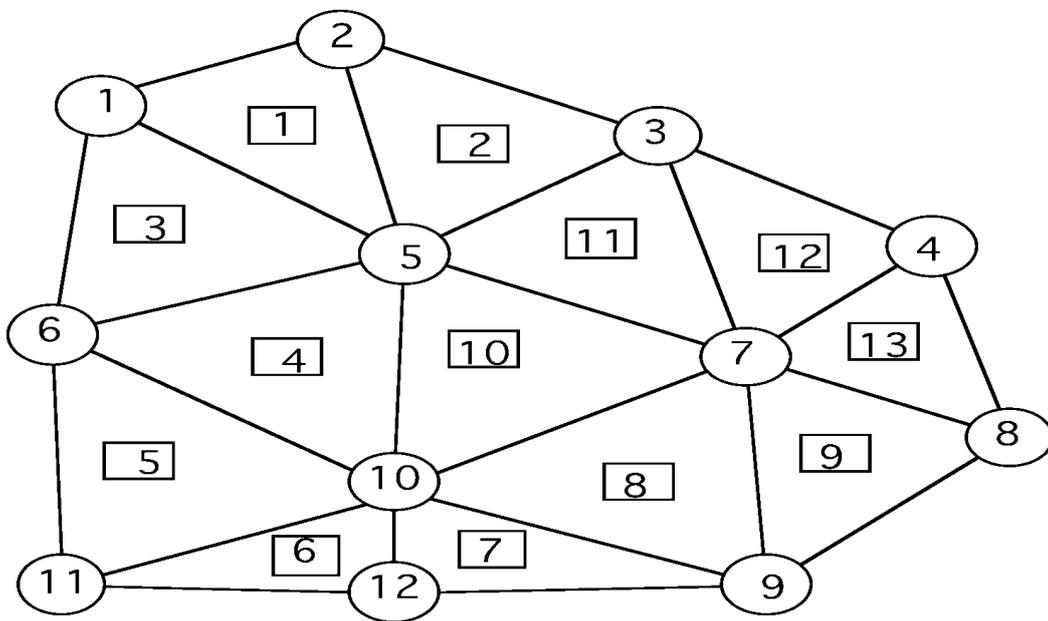


tableau de connections :

élément : 1 noeuds -> 1 5 2
 " 2 -> 2 5 3
 3 -> 1 6 5
 4 -> 6 10 5
 5 -> 6 11 10
 6 -> 11 12 10
 7 -> 10 12 9
 8 -> 10 9 7
 9 -> 7 9 8
 10 -> 5 10 7
 11 -> 5 7 3
 12 -> 3 7 4
 13 -> 7 8 4

FIG. 26 – exemple de maillage avec le tableau de connexion associé

Considérons le maillage défini par la figure 26. Soit un élément déterminé, 4 par exemple, $CONNEC(NL, 4)$ contient les numéros globaux des noeuds locaux NL c'est-à-dire 6 10 5. Ainsi l'élément local

$$[k_{b \ 2,a \ 3}]$$

doit être ajouté à l'élément global

$$[K_{b \ CONNec(2,4),a \ CONNec(3,4)}] = [K_{b \ 10,a \ 5}]$$

D'une manière générale pour l'élément fini de numéro NE , l'élément local

$$[k_{b \ s,a \ r}]$$

doit être ajouté à l'élément global

$$[K_{b \ CONNec(s,NE),a \ CONNec(r,NE)}]$$

Le même principe est adopté pour le second membre, l'élément local

$$Sm_{b \ s}$$

est ajouté à l'élément global

$$SM_{b \ CONNec(s,NE)}$$

L'algorithme global de calcul pour $[K]$ et (SM) est alors :

- Mise à zéro de $[K]$ et (SM) ,
- Faire pour $NE = 1$ à NBE
 - calcul de $[k]$ et (Sm) ,
 - assemblage de $[k]$ et (Sm) par ajout dans $[K]$ et (SM) des éléments de $[k]$ et (Sm) correspondants.

Remarque

Au niveau de chaque passage dans la boucle, seules sont modifiées les valeurs de $[K]$ et (SM) correspondant au ddl de l'élément.

8.2 Intérêt d'un stockage particulier pour la matrice de raideur - cas du stockage bande

Nous allons maintenant nous intéresser à la méthode de stockage de la raideur. En effet, la méthode des éléments finis conduit à une topographie particulière des éléments non nuls dans la matrice d'où des techniques particulières d'optimisation de stockage.

La matrice $[K]$ initiale et théorique contient en général un grand nombre de valeurs nulles. C'est une matrice carrée de dimension $NBDDL$ par $NBDDL$. Soit $[K_{bs,ar}]$ le terme courant. Ce terme peut être non nul si et seulement si il existe un élément fini qui contient les noeuds s et r . Supposons que l'on numérote les différents noeuds de telle sorte que quels que soient les éléments, on ait la relation :

$$s - r \leq lbn \tag{119}$$

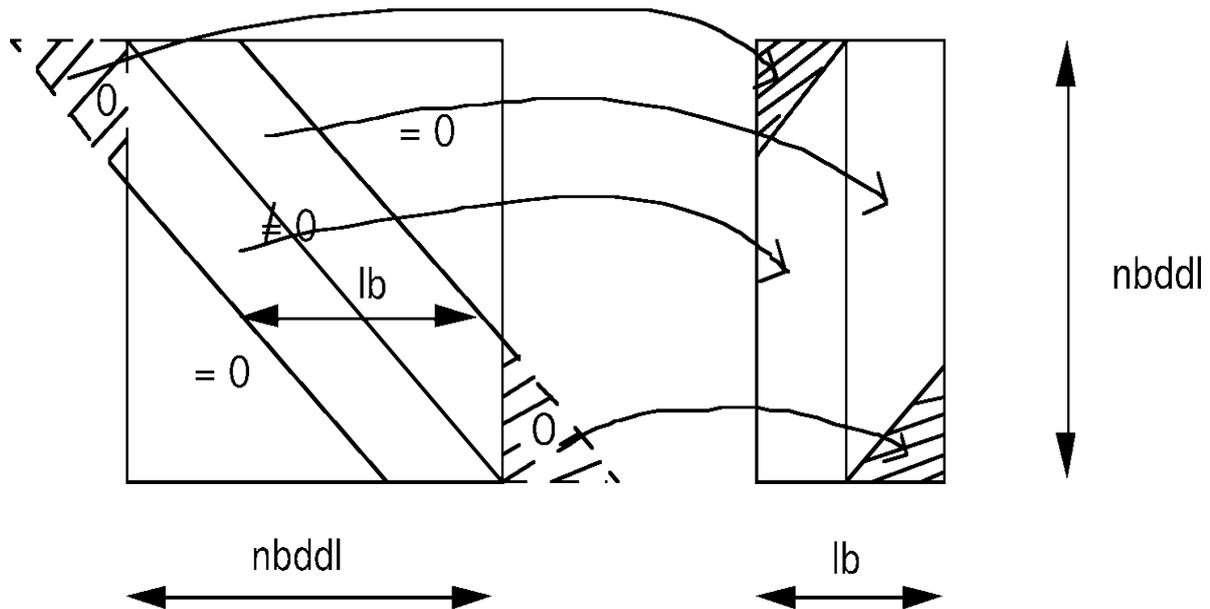


FIG. 27 – Stockage bande : relation avec la matrice carrée d’origine

lbn représente la différence maximale qui existe entre deux numéros de nœud dans un élément. Par exemple dans le cas de la figure (26), $lbn = 5$. La grandeur lbn existe toujours, elle a pour valeur maximale : $NBNE$. D’après ce qui a été vu plus haut, tous les termes $[K_{bs,ar}]$ de la matrice de raideur tels que $s - r > lbn$ sont nuls. Ainsi lbn délimite une bande centrée sur la diagonale de la matrice, en dehors de laquelle tous les termes sont nuls. En tenant compte de cette spécificité, il s’avère utile de ne stocker que cette bande centrale d’où un mode de stockage dit : stockage bande.

Remarquons que si l’on exprime la matrice de raideur avec deux indices, nous avons :

$$[K_{bs,ar}] = [K_{ij}] \text{ avec } i = (s - 1)NDDL + b \text{ et } j = (r - 1)NDDL + a \quad (120)$$

La largeur de la bande centrale non nulle est alors de :

$$lb = (2 lbn + 1) NDDL \quad (121)$$

d’où le nom usuel donné à lb : largeur de bande, tandis que la grandeur lbn est appelée largeur de bande en nœud. Il est clair qu’une minimisation de la zone de stockage passe par une minimisation de la largeur de bande c’est-à-dire de lbn . Or la numérotation des nœuds est arbitraire. Ainsi dans la pratique, une fois la pièce discrétisée en éléments finis, les nœuds sont renumérotés à l’aide d’un algorithme particulier dit de “renumérotation” de manière à obtenir un lbn le plus faible possible. Le ratio $\frac{NBDDL}{lb}$ indique l’optimisation réalisée. Il n’est pas rare d’obtenir des ratios supérieurs à 10, voire 50.

8.2.1 Particularités du stockage bande

Dans le cas d’un stockage bande, seule la partie centrale est stockée suivant la figure (27). On remarque que du fait de la transformation, une partie supplémentaire, hachurée

sur la figure, est rajoutée à la bande centrale originale. Ces termes supplémentaires situés hors de la matrice d'origine sont mis à zéro dans la matrice bande finale. Malgré ces termes supplémentaires, le stockage bande est bien moins consommateur d'espace mémoire que le stockage en matrice carrée.

Très souvent, la matrice de raideur est symétrique. Dans ce cas, il est possible de ne stocker que la moitié de la matrice, par exemple la moitié supérieure. La largeur de la nouvelle matrice bande, appelée également largeur de bande, sera pratiquement diminuée de moitié.

$$lb = (lbn + 1) NDDL \quad (122)$$

Voyons d'une manière pratique la relation qu'il existe entre les indices dans la matrice carrée $[K_{ij}]$ et ceux de la matrice bande que l'on notera pour la distinguer $[KB_{IJ}]$. Il existe plusieurs possibilités, par exemple :

$$J = j \quad \text{et} \quad I = lb - (i - j) \quad (123)$$

c'est-à-dire même indice de ligne, et pour la colonne l'indice est tel que la diagonale $[K]$ se retrouve être la dernière colonne de $[KG]$, les termes les plus excentrés de $[K]$ se retrouvant dans les premières colonnes de $[KG]$.

Notons que le stockage bande est un mode de stockage très utilisé. Néanmoins d'autres stockages optimisés existent : stockage par ligne de ciel, stockage de matrice creuse, etc. Nous allons donner quelques indications concernant ces modes.

8.2.2 Stockage ligne de ciel (skyline)

Pour chaque nœud il existe une largeur de bande différente. Sur la figure (28) on a reporté la ligne brisée qui délimite toutes les largeurs de bande différentes. L'idée est de stocker la portion de matrice délimitée par les deux lignes de ciel. La portion située à l'extérieur des lignes de ciel, mais à l'intérieur des limites de la bande centrale, représente le gain par rapport au stockage bande. Dans le cas de matrice symétrique, comme pour le stockage bande, seule la moitié de la matrice est sauvegardée.

D'une manière pratique, le stockage est réalisé à l'aide de deux vecteurs, un vecteur pour les composantes de la matrice que l'on veut sauvegarder, et un vecteur qui définit le rang dans le premier vecteur de chaque début de nouvelle colonne ou nouvelle ligne. Par exemple pour un stockage de la matrice représentée sur la figure (28) :

$$\begin{aligned} V_1 &= (K_{11}, K_{12}, K_{22}, K_{23}, K_{24}, K_{25}, K_{33}, K_{34}, 0, K_{44}, K_{45}, K_{46}, \dots) \\ V_2 &= (1, 3, 7, 10, \dots) \end{aligned}$$

V_1 contient les composantes de la matrice situées entre la ligne de ciel supérieure et la diagonale et V_2 contient la position de chaque début de ligne. Ainsi par exemple le troisième élément de V_3 correspond au début de la seconde ligne, le septième celui de la troisième ligne, etc.

A l'aide de ces deux vecteurs, il est possible de reconstituer la matrice originale. Le stockage obtenu est compact, mais il nécessite des algorithmes particuliers pour la résolution de systèmes linéaires, par exemple, qui prennent en compte la particularité de l'indilage.

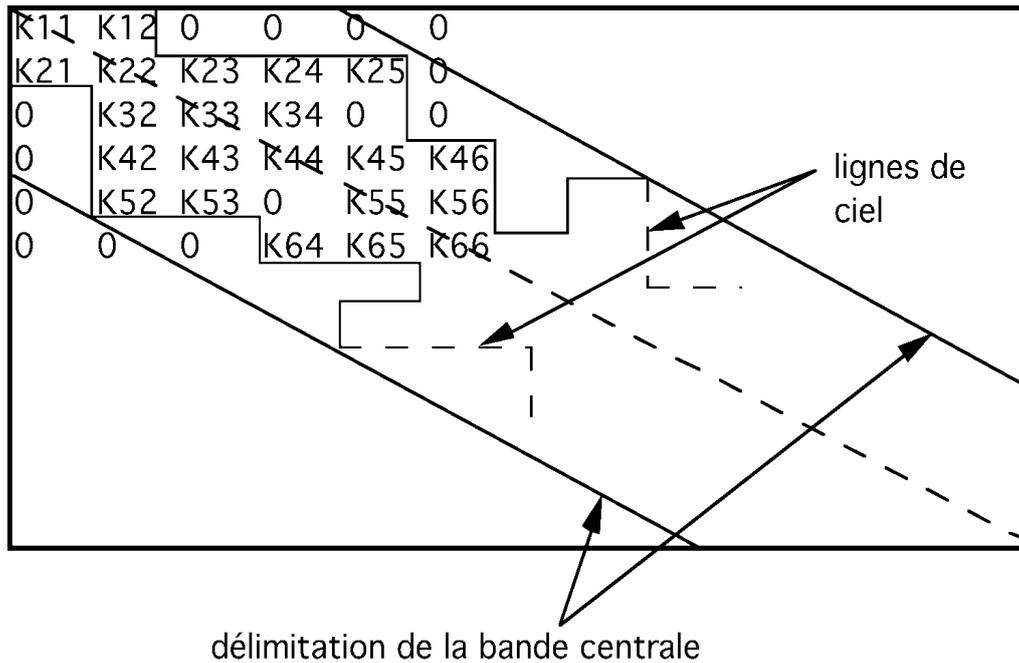


FIG. 28 – Exemple de lignes de ciel

8.2.3 Matrices creuses

On parle de matrices creuses lorsque la matrice comporte une majorité de zéros, ce qui est le cas de la raideur. L'idée est de ne stocker que les termes non nuls dans un premier vecteur, puis leur position dans la matrice, ce qui nécessite par exemple un vecteur d'indices de lignes et un vecteur d'indices de colonnes supplémentaires. La place mémoire occupée par ces vecteurs supplémentaires est contrebalancée par la très faible taille du premier vecteur par rapport à la matrice originale. Par ailleurs, un avantage supplémentaire de cette méthode est qu'elle ne nécessite pas d'optimiser la numérotation pour diminuer la largeur de bande, ce qui peut se révéler intéressant par exemple dans des cas particuliers de modélisation où la largeur de bande varie en cours de traitement.

Comme pour les autres méthodes de stockage, les algorithmes de résolution de système linéaire doivent être adaptés pour tenir compte du mode de repérage particulier utilisé.

8.3 Prise en compte des conditions limites sur les inconnues nodales

Par exemple dans le cas de la mécanique, deux types de conditions limites peuvent être appliquées : conditions en position ou déplacement, et conditions en efforts. Ces dernières conditions sont intégrées au travers de la formulation faible. En effet non avons vu qu'après l'intégration par partie, on tient compte de la relation $\vec{T} = \sigma \cdot \vec{n}$, relation qui constitue les conditions limites en contrainte.

Il reste donc à prendre en compte les conditions limites sur les déplacements ou positions, qui constituent les inconnues nodales. Ces conditions s'expriment en général soit sous

forme d'une valeur fixe : $U^i =$ valeur fixée que l'on notera \bar{U}^i ou encore une combinaison linéaire de degré de liberté : $\alpha_i U^i = \beta$ où les coefficients α_i, β sont connus.

8.3.1 Cas d'un degré de liberté fixé

Méthode du terme diagonale dominant Soit $U^i = \bar{U}^i$ la condition limite que l'on veut imposer. La formulation variationnelle a conduit au système : $[K](U) = (SM)$ de dimension n , qu'il faut maintenant modifier pour tenir compte de la condition. L'idée ici est d'effectuer les transformations suivantes :

$$\begin{bmatrix} K_{11} & \cdots & K_{1i} & \cdots & K_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ K_{i1} & \cdots & K_{ii} & \cdots & K_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ K_{n1} & \cdots & K_{ni} & \cdots & K_{nn} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} K_{11} & \cdots & K_{1i} & \cdots & K_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ K_{i1} & \cdots & K_{ii} + a & \cdots & K_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ K_{n1} & \cdots & K_{ni} & \cdots & K_{nn} \end{bmatrix}$$

avec a très grand

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_i \\ \vdots \\ F_n \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} F_1 \\ \vdots \\ a \bar{U}^i \\ \vdots \\ F_n \end{bmatrix} \quad (124)$$

La ligne d'indice i est modifiée de manière à obtenir automatiquement la condition recherchée. Du fait que l'on cherche à imposer la valeur de U^i , cela signifie que le terme de second membre correspondant F^i est inconnu. En effet, il n'est pas possible par exemple d'imposer un effort et un déplacement simultanément. Soit l'effort est imposé et le déplacement s'en déduit, soit l'inverse. Ainsi dans notre cas, la valeur \bar{U}^i étant connue entraîne F^i inconnue. Il n'y a donc aucun problème à la remplacer par $a \bar{U}^i$ et on voit que pour un coefficient a grand par rapport aux coefficients $K_{i,k}$ k variant de 1 à n , la ligne i sera très peu différente au moment de la résolution, de $a U^i = a \bar{U}^i$, ce qui permet d'imposer la condition voulue.

D'une manière pratique, on choisit par exemple $a = 10^{15} \text{Max } |K_{i,k}|$.

Une fois la résolution effectuée, on réutilise la ligne originale d'indice i de la matrice de raideur pour calculer l'effort F^i initialement inconnu. On parle de "remontée" aux efforts. Pour effectuer cette opération, il est nécessaire de sauvegarder initialement la ligne i de la raideur.

De la même manière, une fois le champ de déplacement connu, on peut en déduire le champ de contrainte et de déformation associé. On parle de "remontée" aux contraintes et déformations. Ces deux grandeurs représentent des inconnues secondaires, par opposition aux degrés de liberté U^i qui sont les inconnues primaires.

Remarque

- La technique du terme diagonale dominant est très simple mais peut poser des problèmes lorsque la matrice est mal conditionnée.

Méthode du terme unité sur la diagonale Comme dans la méthode précédente, la technique consiste à modifier la matrice et le second membre initial de manière à imposer la condition limite voulue, de manière automatique.

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} K_{11} & \cdots & K_{1i} & \cdots & K_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ K_{i1} & \cdots & K_{ii} & \cdots & K_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ K_{n1} & \cdots & K_{ni} & \cdots & K_{nn} \end{bmatrix} &\rightarrow \begin{bmatrix} K_{11} & \cdots & 0 & \cdots & K_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ K_{n1} & \cdots & 0 & \cdots & K_{nn} \end{bmatrix} \\
 \begin{bmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_i \\ \vdots \\ F_n \end{bmatrix} &\rightarrow \begin{bmatrix} F_1 - K_{1i}\bar{U}^i \\ \vdots \\ \bar{U}^i \\ \vdots \\ F_n - K_{ni}\bar{U}^i \end{bmatrix} \tag{125}
 \end{aligned}$$

Cette méthode est un peu plus complexe à mettre en oeuvre que la précédente, mais elle a l'avantage de conduire à la solution exacte, indépendamment de tout facteur numérique tel que le paramètre a de la méthode précédente. C'est une méthode très employée.

Dans le cas, qui est en fait très courant, où la valeur \bar{U}^i est nulle, le second membre, en dehors du terme i reste inchangé, ce qui simplifie la méthode.

Méthode de suppression des équations Si l'on reprend la méthode du terme diagonal sur la diagonale, on se rend compte que la ligne et la colonne i n'interviennent pas dans la résolution. Une méthode plus concise est de supprimer cette ligne et cette colonne dans la matrice de raideur et au niveau du second membre. On parle de condensation, car la dimension du système restant est diminuée de un et passe de n à $n - 1$.

8.3.2 Cas d'une relation linéaire entre degrés de liberté

Soit une condition limite qui s'exprime sous une relation linéaire entre degrés de liberté.

$$\alpha_i U^i = \beta \tag{126}$$

Dans cette relation l'indice i peut n'avoir que quelques valeurs, ou encore de manière équivalente, on peut avoir plusieurs coefficients α_i nuls.

L'idée de la méthode est de définir un changement de base pour les degrés de liberté, tel que dans la nouvelle base, la condition linéaire s'exprime sous forme d'un degré de liberté bloqué, condition que l'on impose à l'aide d'une des techniques précédemment exposées.

On choisit un indice donné k tel que α_k soit différent de zéro et on considère la transformation qui permet de passer des degrés de liberté actuels U^i aux nouveaux degrés de liberté U'^j telle que :

$$U'^i = U^i \quad \forall i \neq k \quad \text{et} \quad U'^k = \beta = \alpha_i U^i \tag{127}$$

ou encore la transformation inverse :

$$U^i = U'^i \quad \forall i \neq k \quad \text{et} \quad U^k = \frac{U'^k}{\alpha_k} - \frac{\alpha_i U'^i}{\alpha_k} \tag{128}$$

Relation qui peut aussi être exprimée sous forme matricielle.

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} U^1 \\ \vdots \\ U^k \\ \vdots \\ U^n \end{pmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & & & & & & & \\ & 0 & \ddots & & & & & & & \\ & \vdots & & & & & & & & \\ & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & & & 0 \\ \cdots & \frac{-\alpha_j}{\alpha_k} & \cdots & \frac{-\alpha_{k-1}}{\alpha_k} & \frac{1}{\alpha_k} & \frac{-\alpha_{k+1}}{\alpha_k} & \cdots & \frac{-\alpha_l}{\alpha_k} & \cdots & \\ & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & \cdots & \cdots & 0 & \\ & \vdots & & & & & \ddots & & \vdots & \\ & & & & & \cdots & 0 & \ddots & 0 & \\ & & & & & \cdots & 0 & 0 & 1 & \end{bmatrix} \begin{pmatrix} U'^1 \\ \vdots \\ U'^k \\ \vdots \\ U'^m \end{pmatrix} \\
 &= [R_m^i] (U'^m) = [R] (U') \tag{129}
 \end{aligned}$$

Il est à noter que ce changement de variables peut aussi s'appliquer aux vitesses virtuelles, celles-ci devant être compatibles avec les vitesses réelles.

A l'aide de changement de coordonnées, l'équation matricielle initiale est modifiée :

$$\begin{aligned}
 \left\{ \langle V^* \rangle ([K](U^i) - (SM)) = 0 \right\} &\longrightarrow \left\{ ([R](V')^t ([K][R](U'^i) - (SM)) = 0 \right\} \\
 &\longrightarrow \left\{ \langle V' \rangle ([R]^t [K] [R](U'^i) - [R]^t (SM)) = 0 \right\} \\
 &\longrightarrow \left\{ \langle V' \rangle ([K'](U'^i) - (SM')) = 0 \right\} \tag{130}
 \end{aligned}$$

avec les notations $[K'] = [R]^t [K] [R]$ et $(SM') = (SM)$.

On obtient alors un nouveau système dans lequel la condition linéaire correspond au blocage du degré de liberté d'indice k, à la valeur β i.e $U'^k = \beta$, condition que l'on impose selon une des méthodes vues précédemment.

Après avoir imposé les conditions limites puis résolu le système, il est nécessaire de revenir au système initial de coordonnées, ce qui se réalise à l'aide de la relation (129) qui permet d'exprimer les coordonnées initiales U^i en fonction des nouvelles coordonnées U'^j .

Il est à noter que le choix de la matrice $[R]$ n'est pas unique. La géométrie ou le comportement peuvent aider au choix d'une matrice judicieuse.

8.4 Méthodes numériques d'intégration

D'une manière générale, il est nécessaire d'intégrer en 1,2 ou 3 dimensions, relativement à des éléments de référence, des fonctions quelconques qui n'ont pas a priori de primitives explicites.

La première partie présente le cas d'une fonction à une dimension puis la seconde partie montre comment la technique est étendue au cas des dimensions supérieures.

8.4.1 Intégration à une dimension

Soit l'intégration suivante :

$$\int_{-1}^1 f(\zeta) d\zeta \quad (131)$$

L'idée générale est d'approcher la fonction f par un polynôme, polynôme que l'on saura parfaitement intégrer par la suite.

Supposons tout d'abord que l'on choisisse n points ζ^i régulièrement espacés de -1 à 1 , et utilisons par exemple une interpolation de LAGRANGE .

$$f(\zeta) \approx \sum_{i=1}^n f(\zeta^i) L_i(\zeta) \quad (132)$$

d'où l'intégration :

$$\int_{-1}^1 f(\zeta) d\zeta \approx \sum_{i=1}^n f(\zeta^i) \underbrace{\int_{-1}^1 L_i(\zeta) d\zeta}_{(i)} \quad (133)$$

Les termes (i) de la relation précédente sont des constantes et peuvent être calculés une fois pour toutes.

$$\int_{-1}^1 L_i(\zeta) d\zeta = w_i \quad (134)$$

leurs valeurs w_i sont appelées poids d'intégration.

La formule générale d'intégration numérique s'écrit :

$$\int_{-1}^1 f(\zeta) d\zeta \approx \sum_{i=1}^n f(\zeta^i) w_i \quad (135)$$

Dans cette formule, tous les membres de droite sont des constantes. L'intégrale a été remplacée par une somme finie de valeurs particulières de la fonction, pondérées par les coefficients que sont les poids d'intégration.

Remarque

- Il est à noter que la formule précédente sera d'autant plus précise que l'approximation par les polynômes sera performante. Cela sera réalisé par exemple en ayant des polynômes de degré élevé.
- Bien que la formule précédente ait été établie à partir des polynômes de LAGRANGE, elle se révèle être générique, les autres méthodes numériques d'intégration que nous étudierons s'appuient sur une formule du même type.

Méthode de GAUSS Supposons que l'on parte de l'expression générale précédente et que l'on se fixe un nombre de points n où la fonction f est calculée. On cherche alors pour n donné, à intégrer exactement un polynôme de degré le plus élevé possible. Soit m ce degré, on montre que $m \leq 2n - 1$.

En effet, on doit intégrer tous les monômes de degré inférieur à m , c'est-à-dire $(2n - 1) + 1 = 2n$ équations. Pour chaque monôme l'intégrale a pour valeur :

$$\int_{-1}^1 \zeta^a d\zeta = \left[\frac{\zeta^{a+1}}{a+1} \right] = \begin{cases} 0 & \text{si } a \text{ est impaire} \\ 1 & \text{si } a \text{ est paire} \end{cases} \quad (136)$$

Les $2n$ inconnues sont les n valeurs de w_i et les n valeurs de ζ^i , que l'on obtient en résolvant le système de $2n$ équations.

Ainsi dans la méthode de GAUSS, les poids et les coordonnées où l'on doit calculer la fonction à intégrer, sont imposés. En contrepartie, cette méthode se révèle beaucoup plus précise que la première méthode présentée. Aussi de manière pratique, la méthode de GAUSS est la méthode de quadrature la plus utilisée dans le cadre du calcul par éléments finis.

Méthode de NEWTON-COTES Dans le cas où l'on veut des points d'intégration régulièrement espacés et symétriques par rapport à l'origine, on intègre exactement un polynôme de degré $n-1$. La méthode est moins précise que dans le cas de GAUSS par contre elle peut permettre des simplifications au niveau des fonctions d'interpolation. Par exemple, supposons que l'on retienne la position des nœuds pour les points d'intégration. Seule la fonction d'interpolation relative au nœud considéré est non nulle pour ce point d'intégration, et sa valeur est un. D'où un calcul immédiat !

La méthode obtenue est appelée méthode de NEWTON-COTES. Elle est utilisée par exemple pour intégrer la partie dynamique de l'équation d'équilibre mécanique. Nous verrons que dans ce cas la matrice obtenue, appelée matrice de masse, est diagonale, particularité importante, qui est mise à profit dans les méthodes explicites, cf. la résolution des équations temporelles que nous verrons par la suite.

8.4.2 Intégration à deux ou trois dimensions

La méthode est identique au cas 1D. D'une manière identique elle conduit à une expression de la forme :

$$\int_{\mathcal{D}_{ref}} f(A) d\zeta_1 \zeta_2 \zeta_3 \approx \sum_{i=1}^n f(A_k) w_k \quad (137)$$

A est un point de la surface (ou du volume)

A_k est un point de la surface (ou du volume) de référence, il représente un point d'intégration.

\mathcal{D}_{ref} est le domaine de l'élément de référence (surface ou volume)

w_k : poids d'intégration.

Plusieurs méthodes différentes existent pour obtenir les points et poids d'intégration. Les méthodes de type GAUSS ou dérivées sont les plus utilisées. Par exemple, pour un découpage triangulaire on peut avoir un point d'intégration : le centre de gravité du triangle, 3 points : les milieux des cotés ou les 2/3 des médianes ou encore 4 points, 5 points, 7 points, etc. Dans la pratique, bien qu'un nombre important de points d'intégration soit la garantie d'une grande précision, seules les intégrations à 1 ou certaines fois à 3 ou 4 points sont couramment utilisées.

8.5 Résolution de systèmes linéaires

La présentation précise de ces méthodes relève de l'analyse numérique. Nous présentons quelques informations concernant les deux classes de méthodes classiques.

Les méthodes itératives Le calcul est effectué plusieurs fois jusqu'à convergence vers la solution. Le nombre d'opérations n'est pas connu à l'avance, il dépend du type du système d'équation considéré. Par contre, la méthode permet de résoudre économiquement des systèmes de grande dimension, via par exemple un stockage partiel sur disque dur. La méthode classique est GAUSS SEIDEL.

Les méthodes directes La résolution du système est directe, mais sans réellement inverser la matrice, en un nombre fini d'opérations connu à l'avance, en fait qui dépend de la taille de la matrice. Une méthode classique dans le cas de matrice symétrique, est la méthode de CHOLESKY.

Soit à résoudre : $[K](ddl) = (SM)$. La méthode consiste dans un premier temps à transformer la matrice $[K]$ en un produit de deux matrices triangulaires $[K] = [L][L]^T$. Cette étape de triangulation est la partie la plus longue du processus. La seconde étape concerne la résolution proprement dite, on parle de "descente/remontée". On résout successivement : $[L](Y) = (SM)$ ce qui détermine le vecteur (Y) puis : $[L]^T(ddl) = (Y)$ qui détermine le vecteur "degré de liberté". Ces deux résolutions sont immédiates grâce à la forme triangulaire des matrices : il suffit de résoudre chaque ligne successivement en commençant par le haut où la ligne se résume à un scalaire non nul, d'où le qualificatif de "descente", pour la seconde matrice (transposée de la première) on part du bas, d'où le qualificatif de "remontée".

Cette méthode de CHOLESKY est très employée.

9 Résolution de problèmes non linéaires

9.1 Introduction

Le problème de l'équilibre mécanique statique d'un solide, dans le cas de petites déformations et de petits déplacements, avec une loi élastique linéaire, conduit au travers de la méthode des éléments finis, à un système linéaire d'équation algébrique. Dans le cas général, grandes transformations, comportement complexe type plasticité par exemple, conditions limites de contact, etc., le système d'équations obtenu n'est pas linéaire par rapport aux degrés de liberté.

Nous allons examiner quelques méthodes classiques d'études de tels systèmes d'équations. En fait, l'idée est de remplacer la résolution directe de ce système par une succession de résolutions de systèmes linéaires, qui conduit progressivement à la solution recherchée. On parle de méthode itérative.

On part de la formulation variationnelle qui conduit dans tous les cas à une équation du type : $\langle V^* | \mathcal{R}(X) \rangle = 0$ le vecteur (X) étant le vecteur degré de liberté. L'équation devant être vérifiée pour toute vitesse virtuelle, on obtient le système d'équation : $\mathcal{R}(X) = (0)$, qui dans le cas général n'est pas linéaire en (X) , c'est-à-dire qu'il ne peut pas s'écrire sous la forme du produit d'une matrice $[K]$ par le vecteur (X) .

En pratique, la recherche est itérative sous forme d'un schéma "prédiction correction".

0) On part d'une solution initiale a priori : par exemple la solution nulle : $(X) = (0)$.

1) Une amélioration de la solution est calculée : $\delta(X)$ telle que $\mathcal{R}(X + \delta(X))$ soit plus proche de (0) . Cette grandeur est appelée le vecteur résidu.

2) Un test de convergence est effectué. Par exemple, on calcule le maximum des composantes du résidu. Soit ce maximum est suffisamment petit, auquel cas le calcul est terminé et le résultat final est $(X + \delta(X))$. Soit ce maximum est encore trop élevé.

On prend comme solution de départ la solution améliorée d'où informatiquement : $(X) = X + \delta(X)$, puis l'algorithme est repris à l'étape 1).

L'amélioration de la solution s'effectue en général au travers de la résolution d'un système linéaire, et les différentes étapes vues dans les chapitres précédents s'appliquent moyennant quelques modifications mineures.

En fait, l'objectif est la recherche du vecteur degré de liberté (X) qui annule le vecteur résidu, c'est-à-dire on recherche le zéro de la fonction vectorielle résidu. Ainsi, la plupart des techniques classiques de recherche de zéro de fonction s'appliquent : méthode de la sécante, de la tangente ou NEWTON, etc., mais leur dénomination sont parfois particulières aux EF.

Nous allons présenter la méthode de NEWTON RAPHSON totale ou incrémentale. Cette méthode est très utilisée, elle se révèle être actuellement la méthode la plus robuste et versatile.

9.2 Méthode de NEWTON RAPHSON

C'est la méthode connue de la tangente en dimension un (cf. figure 29).

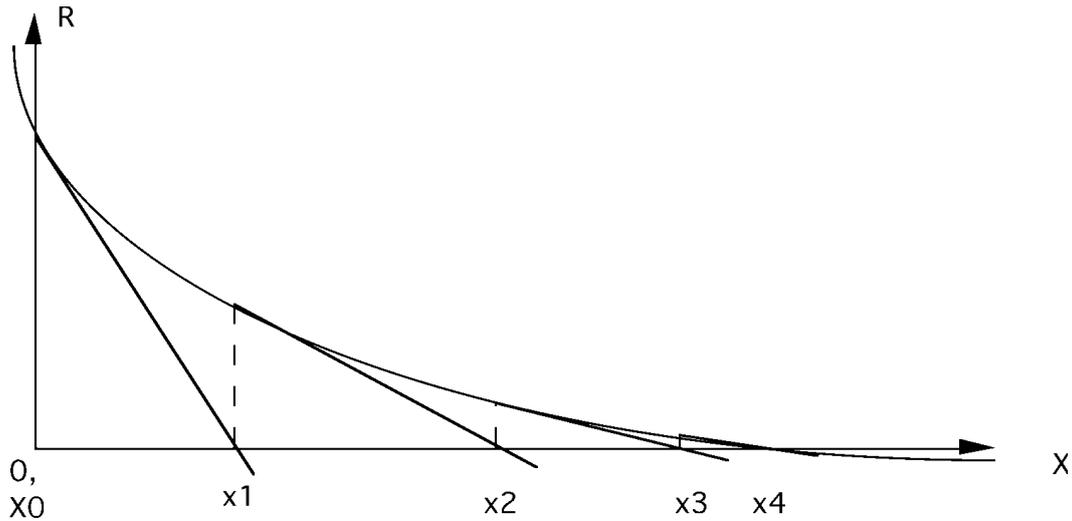


FIG. 29 – méthode de Newton en dimension 1

Supposons connue une approximation de la solution $(X_{(i)})$, on cherche une meilleure approximation de la solution $(X_{(i+1)})$. L'algorithme est construit à partir du développement du résidu en série de TAYLOR.

On cherche :

$$\mathcal{R}(X_{(i+1)}) = 0 \quad (138)$$

En développant :

$$\mathcal{R}(X_{(i+1)}) = \mathcal{R}(X_{(i)}) + \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial X_{(i)}} \delta X_{(i)} + 0(\delta X_{(i)}^2) \quad (139)$$

en négligeant le terme du second ordre et en utilisant (138) :

$$\left[-\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial X_{(i)}} \right] (\delta X_{(i)}) = (\mathcal{R}(X_{(i)})) \quad (140)$$

Le premier terme du membre de gauche est la matrice tangente.

$$[K] = \left[-\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial X_{(i)}} \right] \quad (141)$$

Après avoir résolu le système d'équation (140), la solution est mise à jour.

$$(X_{(i+1)}) = (X_{(i)}) + (\delta X_{(i)}) \quad (142)$$

La qualité de la solution à l'itération $(i+1)$ peut s'apprécier à l'aide de la valeur des composantes du vecteur résidu (cf. la suite du cours avec l'analyse de la convergence).

D'une manière pratique, la matrice tangente est calculée soit par dérivation directe de l'expression du résidu (méthode la plus utilisée) soit par dérivation numérique de la fonction résidu. Cette dernière solution peut être intéressante lorsque les non-linéarités sont difficiles à approcher par une évolution tangente.

Par exemple, on se fixe une valeur arbitraire d'une composante de ddl $\Delta X^{ar} = 10^{-9}$, a et r fixés, et l'on a :

$$\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial X_{(i)}^{ar}} \approx \frac{\mathcal{R}(X + \Delta X) - \mathcal{R}(X)}{\Delta X^{ar}} \quad (143)$$

La méthode NEWTON RAPHSON est adaptée pour les problèmes non linéaires, mais rien n'empêche de l'appliquer à un problème linéaire, voyons ce que l'on obtient dans ce cas.

Nous avons vu que dans le cas d'un problème linéaire, la puissance virtuelle interne pouvait s'exprimer sous la forme du produit d'une matrice, la matrice de raideur, et du vecteur degré de liberté, d'où la forme suivante du résidu : $\mathcal{R} = [K](X) + (SM)$ avec le vecteur (SM) second membre ne dépendant pas des degrés de liberté.

Supposons que l'on choisisse le vecteur nul comme vecteur initial dans la méthode de NEWTON RAPHSON. Calculons la première matrice tangente.

$$[K] = \left[-\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial X_{(0)}} \right] = \left[-\frac{\partial [K](X) + (SM)}{\partial X_{(0)}} \right] = -[K] \quad (144)$$

On voit que la matrice tangente est identique à la matrice de raideur du problème linéaire. C'est pourquoi nous appellerons la matrice tangente la raideur du système, même quand le problème ne sera pas linéaire. Poursuivons la résolution.

Avec comme vecteur initial le vecteur nul, le résidu vaut :

$$\mathcal{R}(X_0) = [K](0) + (SM) = (SM) \quad (145)$$

D'où la résolution à la première itération :

$$-[K](\delta X) = (SM) \quad (146)$$

On retrouve la même expression que dans le cas linéaire! Après résolution, la solution recherchée est directement égale à celle trouvée lors de cette première itération $(X_1) = (0) + (\delta X) = (\delta X)$, et le calcul du nouveau résidu donne :

$$\mathcal{R}(X_1) = [K](\delta X) + (SM) = (-SM) + (SM) = (0) \quad (147)$$

Le nouveau résidu est nul, on a donc la solution exacte dès la première itération dans le cas d'un problème linéaire! On effectue donc une seule résolution tout comme dans le cas linéaire classique vu au début du cours.

Ceci montre que la résolution d'un problème non linéaire est en fait une succession de résolutions de problèmes linéaires, qui à chaque itération, tente d'améliorer la solution précédente.

Tout ce qui a été vu lors de problèmes linéaires, en particulier concernant les conditions limites, les méthodes de stockage, d'intégration, etc., s'applique de manière identique aux cas non linéaires par de la résolution linéaire à chaque itération.

Remarque Un algorithme non linéaire ne converge pas toujours vers la solution voulue. La figure (30) montre un cas où, dès la seconde itération, la solution trouvée tend vers l'infini.

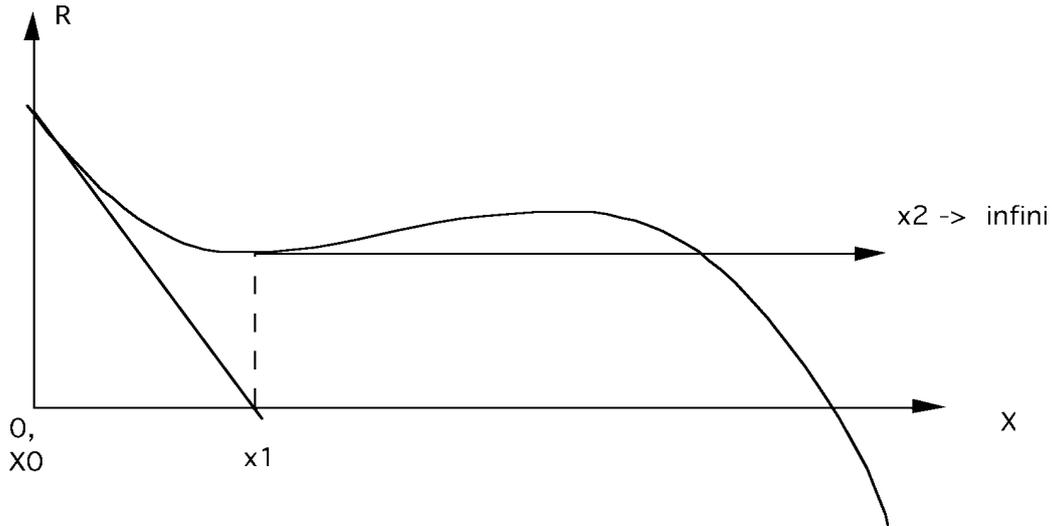


FIG. 30 – méthode de Newton en dimension 1, cas d'une divergence

9.3 Méthode incrémentale

L'idée est de ne pas appliquer en une étape la totalité du chargement prescrit, mais d'utiliser plusieurs étapes intermédiaires.

Soit des conditions limites en déplacement (ou position) $\vec{U}_{(f)}$ et-ou en force $\vec{F}_{(f)}$ fixées. Ces conditions limites sont appliquées progressivement, à l'aide d'un paramètre multiplicatif λ qui varie de 0 à 1. Une variation simple est de décomposer l'intervalle $[0,1]$ en n parties égales, ainsi le calcul global s'effectuera en n étapes telles que le chargement courant sera :

$$\begin{aligned}\vec{U}_{(i)} &= \lambda_i \vec{U}_{(f)} = \frac{i}{n} \vec{U}_{(f)} \\ \vec{F}_{(i)} &= \lambda_i \vec{F}_{(f)} = \frac{i}{n} \vec{F}_{(f)}\end{aligned}\quad (148)$$

i variant de 1 à n .

A chaque étape, le problème non linéaire est résolu par un algorithme non linéaire au choix, par exemple la méthode de NEWTON RAPHSON. Dans ce dernier cas, on parle de NEWTON RAPHSON incrémentale. Cette dernière méthode est très classique.

La figure (31) montre un exemple 1D de cette méthode dans le cas où n vaut deux.

La méthode incrémentale permet de résoudre des problèmes fortement non linéaires. Classiquement, elle est ainsi employée pour la simulation de la mise en forme, emboutissage, usinage, etc.

9.4 Méthode de NEWTON modifiée

Lorsque le nombre de degrés de liberté est important, le temps de résolution du système linéaire peut devenir prépondérant par rapport aux autres calculs, raideurs et seconds membres locaux par exemple.

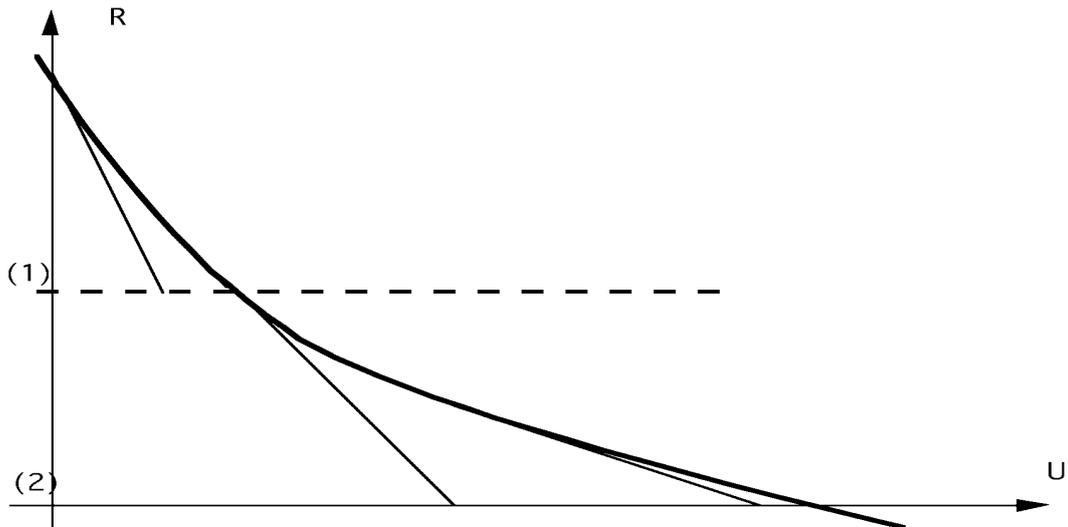


FIG. 31 – méthode incrémentale à deux pas, (1) position de $R=0$ pour $\lambda = 0.5$, (2) position pour $\lambda = 1$

Supposons que l'on utilise la méthode de CHOLESKY pour résoudre le système d'équation. Nous avons vu que le calcul s'effectue en deux étapes, tout d'abord triangulation de la matrice de raideur, puis résolution de deux systèmes linéaires. En fait, c'est l'étape de triangulation qui se révèle la plus pénalisante en temps de calcul, et elle est effectuée à chaque changement de la matrice de raideur. Or, le calcul d'une matrice de raideur plus ou moins approché influe sur la rapidité de convergence mais pas sur la précision du résultat final, d'où l'idée d'utiliser une forme constante de la matrice de raideur à chaque itération, seul le résidu étant mis à jour. Dans ce dernier cas, il n'est plus nécessaire de trianguler la matrice de raideur à chaque itération, mais seulement de résoudre les deux systèmes triangulaires, ce qui est très rapide.

La méthode ainsi définie s'appelle la méthode de NEWTON modifiée. Par rapport à la méthode de NEWTON RAPHSON originale, la convergence est évidemment plus lente, et bien que le temps de chaque itération soit plus faible, on observe que dans de nombreux cas de non-linéarité, le temps de résolution globale du problème est plus important qu'avec une méthode classique de NEWTON RAPHSON.

Néanmoins, dans le cas de faibles non-linéarité, la matrice de raideur varie peu d'une itération à l'autre. L'emploi de la méthode de NEWTON modifiée peut alors se révéler très intéressant.

La figure (32) illustre en 1D cette méthode.

Remarques Par exemple, avec 900 ddl, la méthode de NEWTON RAPHSON nécessite 12 secondes de temps CPU à chaque itération, alors que la méthode de NEWTON modifiée ne demande que 3 secondes.

9.5 Sur-relaxation et sous-relaxation

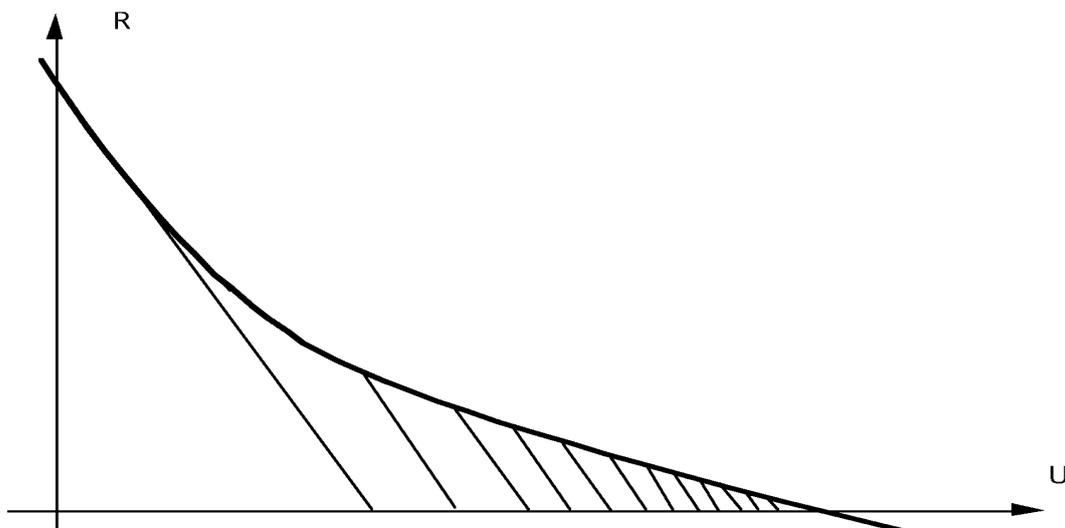


FIG. 32 – Méthode de NEWTON modifiée

Dans certain cas, il est possible d'améliorer la vitesse de convergence en augmentant à chaque itération la variation δX^{ar} d'un facteur α appelé facteur de sur-relaxation. L'idée est d'anticiper la modification des degrés de liberté d'une itération à l'autre. Ainsi, au lieu d'effectuer $(X_{(i+1)}) = (X_{(i)}) + (\delta X)$, on effectue $(X_{(i+1)}) = (X_{(i)}) + \alpha (\delta X)$.

Le facteur α est déterminé empiriquement. Par exemple TOUZOT propose pour les problèmes de plasticité une valeur comprise entre 1,7 et 1,9 .

D'une manière identique, dans le cas où il y a des valeurs intermédiaires du vecteur (δX) qui sont trop importantes, par exemple lors d'un début de divergence, on peut parfois utiliser un facteur multiplicatif, qui s'appellera alors de sous-relaxation pour limiter temporairement les variations du vecteur. Par exemple, le facteur α est alors déterminé pour limiter la norme du vecteur à une valeur maximale prédéterminée.

9.6 Mesure de la convergence

La convergence peut se mesurer en pratique de plusieurs manières.

- 1) $\|\mathcal{R}(X)\| \leq \epsilon$ petit, norme absolue.
- 2) $\frac{\|\mathcal{R}(X)\|}{\max|(\text{réactions})|} \leq \epsilon$ petit, norme relative.
- 3) Norme absolue sur l'incrément de variation de ddl. $\|\delta(X)\| \leq \epsilon$ petit.
- 4) Norme relative sur l'incrément de variation de ddl. $\frac{\|\delta(X)\|}{\|X\|} \leq \epsilon$ petit.

Le type de norme est également important. La norme euclidienne est en pratique peu employée, car elle nécessite un grand nombre de calculs, on lui préfère la norme $\|\cdot\|_\infty$ qui est définie comme le maximum de la valeur absolue des composantes. La norme euclidienne a également tendance à tendre vers l'infini lorsque le nombre de degrés de liberté tend vers l'infini, ce qui est incompatible avec une mesure intrinsèque.

Un choix correct habituel est celui de la norme relative sur le résidu.

$$\frac{\|\mathcal{R}(X)\|_\infty}{\max |(réactions)|} \leq \epsilon \quad (149)$$

9.7 Remarque sur le pilotage de la recherche de solution

Il est possible que le calcul n'aboutisse pas. Il peut y avoir plusieurs raisons à cela. Tout d'abord, le problème peut-être fortement non-linéaire. Dans ce cas lorsque le pas de chargement est important, le calcul peut ne pas converger. Nous avons vu qu'une solution était de sub-diviser le chargement en plusieurs incréments. Le problème est de trouver le pas de chargement optimum. En effet, un pas de chargement trop petit induit de longs temps de calcul, un pas trop grand peut conduire à une divergence. En fait il est souvent utile de modifier la valeur du pas de chargement en fonction de l'état d'avancement du calcul. Par exemple en début du calcul, le comportement de la structure est plus facilement linéaire (en l'absence de contact), d'où un pas important, par contre à mesure que la structure se plastifie, il peut-être nécessaire de diminuer le pas de chargement. Ces différentes remarques conduisent en général à la mise en place dans les codes de calcul "d'un algorithme de pilotage" qui tente d'optimiser automatiquement le pas de chargement tout au long du déroulement du calcul. Les fondements de cet algorithme s'appuient souvent sur l'expérience acquise sur des calculs analogues via des formules empiriques.

Un algorithme simple serait le suivant :

- si "bonne" convergence durant "n" incréments consécutifs
 - . augmentation du pas de chargement selon au facteur multiplicatif "a"
- si "divergence"
 - . diminution du pas de chargement selon au facteur multiplicatif "b"

et on notera "bonne" convergence lorsque la convergence s'effectue en moins de "m" itérations.

Ainsi cette algorithme dépend de 4 paramètres que l'on identifiera avec l'expérience. Par exemple : $n=3$, $m=4$, $a=\sqrt{2}$, $b=0.5$

Cependant, la valeur du pas de chargement influe également sur la précision des résultats obtenus en fin de chaque incrément. En effet, durant un incrément, on suppose que le déplacement est linéaire avec le pas de chargement c'est-à-dire $O\vec{M}_\alpha = \alpha O\vec{M}_{fin}$ avec α qui varie de 0 à 1 pendant l'incrément. On voit ainsi que si l'équation d'équilibre est satisfaite (à la précision pres) en fin d'incrément, il n'en est pas de même pendant le déroulement de l'incrément. Par exemple certain algorithme de pilotage utilise également l'erreur d'équilibre qui existe à mis parcours de l'incrément, pour décider d'augmenter ou diminuer le pas de chargement.

Enfin, une non convergence peut-être due à l'existence de solutions multiples différentes, comme par exemple lors du flambage d'une structure. Dans ce cas en général, il n'est pas suffisant de diminuer le pas de chargement pour permettre la convergence. On a recours à des algorithmes spécifiques, telques le pilotage en longueur d'arc qui permettent de contrôler conjointement la cinématique et les efforts de manière à rejoindre une des courbes bifurquées. Eventuellement, il est même possible de choisir la courbe bifurquée. Nous verrons à la fin du cours une introduction à ce type d'algorithme. De même après la

partie temporelle, une introduction au pilotage utilisant l'erreur de quadrature temporelle sera présentée.

9.8 Autres méthodes pour la résolution des non-linéarités

Nous avons insistés sur les méthodes de type Newton. Ces méthodes, lorsqu'elles fonctionnent présentent l'intérêt de converger rapidement vers la solution. Par contre une difficulté non négligeable induite est la détermination de la raideur ou matrice tangente. Cette difficulté est d'autant plus importante lorsque l'on a affaire à un comportement matériel complexe tel que la plasticité par exemple, pour lequel il n'est pas toujours aisé de déterminer le comportement tangent c'est-à-dire le tenseur qui représente la variation du tenseur contrainte par rapport aux variations du tenseur de déformation, ce tenseur étant nécessaire pour le calcul de la raideur globale.

Une solution qui a été proposée est d'utiliser un algorithme de Gradient Conjugué non pas pour la résolution du système linéaire mais pour la résolution de l'équilibre global. Dans ce cas on utilise uniquement le vecteur résidu comme gradient de la puissance virtuelle que l'on cherche à minimiser. Il n'est pas nécessaire de construire la matrice de raideur, seul le calcul du résidu est nécessaire. Par contre, on doit calculer un grand nombre de fois le résidu ce qui peut être long en temps de calcul, de plus la convergence de la méthode peut-être améliorée par un préconditionnement adéquate.