

Cours sur la méthode des éléments finis

seconde partie

Université de Bretagne Sud
École Nationale Supérieure d'Ingénieurs de Bretagne Sud
(UBS - ENSIBS)
Gérard Rio

16 décembre 2014

Table des matières

I	Equations bilan	9
1	Introduction	9
2	Remarques sur les différents types de coordonnées et dérivées temporelles	9
2.1	Dérivée temporelle dans le cas d'un paramétrage eulérien	10
2.2	Dérivée temporelle dans le cas d'un paramétrage matériel	10
3	Bilan masse	10
3.1	Vision Eulérienne, par rapport à un volume géométrique fixe	10
3.2	Vision Eulérienne, par rapport à un volume matériel	12
3.3	Vision Lagrangienne, par rapport à un volume matériel	13
4	Bilan de conservation de soluté	14
4.1	Vision Eulérienne, par rapport à un volume géométrique fixe	14
4.2	Vision Eulérienne, par rapport à un volume matériel	15
4.3	Vision Lagrangienne, par rapport à un volume matériel	16
4.4	Cas d'une grandeur massique	16
4.4.1	Cas des coordonnées géométriques	17
4.4.2	Cas du paramétrage eulérien et Lagrangien	17
5	Bilan de la quantité de mouvement	17
5.0.3	Cas d'un bilan sur un volume géométrique fixe : utilisation de coordonnées géométriques	17
5.0.4	Bilan sur un volume matériel : cas du paramétrage eulérien et Lagrangien . . .	18

6	Bilan de conservation d'énergie	18
6.0.5	Puissance cinétique pour un volume fixe	18
6.0.6	Puissance cinétique pour un volume matériel : cas d'un paramétrage eulérien ou lagrangien	19
6.0.7	Bilan énergie interne : cas d'un volume fixe	20
6.0.8	Bilan énergie interne : cas d'un volume matériel	20
6.0.9	Bilan d'enthalpie : introduction	21
6.0.10	Bilan d'enthalpie : cas d'un volume fixe	22
6.0.11	Bilan d'enthalpie : cas d'un volume matériel	22
6.0.12	Equation de la chaleur	22
7	Forme générique des équations de conservation	23
8	Equations de comportement	24
8.1	Exemple d'équation de comportement associé au bilan masse	24
8.2	Exemple d'équation de comportement associé au bilan de soluté	24
8.3	Terme source	24
8.4	Loi associée au bilan d'énergie	25
8.5	Exemple de loi de comportement mécanique du matériau	25
9	Conditions limites et initiales	26
II	Méthodes d'avancement temporel	27
10	Introduction	27
11	Phénomène du premier ordre	27
11.1	Méthode explicite d'Euler	28
11.2	Méthode implicite d'Euler	29
11.3	Méthode semi-implicite d'Euler	30
12	Phénomène du second ordre	31
12.1	Introduction	31
12.2	Présentation des différents algorithmes	32
12.3	Différences centrées	33
12.4	Newmark	34
12.5	Tchamwa	35
12.6	Convergence des différents schémas numériques	35
12.6.1	Consistance	36
12.6.2	Stabilité de la méthode de Tchamwa	37
12.7	Amortissement artificiel	38
12.7.1	Amortissement critique	39
12.7.2	Bulk viscosity	39
12.8	Algorithme de Relaxation dynamique	40
12.8.1	Introduction	40
12.8.2	Amortissement visqueux	40
12.8.3	Amortissement cinétique	42

12.8.4	Remarque générale sur la matrice masse	44
13	Analyse de la propagation d'un signal	44
13.1	Introduction	44
13.2	Cas de l'oscillation d'un système masse ressort	45
13.3	Cas de l'oscillation d'une barre c'est-à-dire un système de masses réparties	45
III	Schéma de Runge-Kutta	51
14	Introduction	51
15	Avancement temporel avec le modèle de Runge-Kutta imbriqué	51
16	Implantation	52
IV	Méthodes "espace-temps" : Galerkin discontinu	54
17	Introduction	54
18	Le modèle de Bonelli	55
19	Quelques résultats	58
19.1	Temps de calcul - précision	58
19.2	Remarques et conclusions partielles	61
V	Méthodes de calcul des problèmes non linéaires	66
20	Origine	66
21	Introduction de la méthode de Newton dans le cas 1D	67
21.1	Méthode du point fixe	67
21.2	Vitesse de convergence de la méthode du point fixe	67
21.3	Méthode de Newton	68
22	Cas d'un système d'équations	69
23	Exemple d'application	70
24	Pilotage : paramètres et fonctionnement	73
VI	Eléments de classifications des équations aux dérivées partielles	75
24.1	Introduction : notions d'équations hyperboliques, paraboliques et elliptiques	75
24.2	Etude des lignes de discontinuité	76
24.3	Application à l'équation des ondes en 1D	77
24.4	Application à une équation générique elliptique	78
24.5	Exercices d'application	79

24.6	Bibliographie	79
VII	Particularités liés à l'intégration numérique	80
25	Remarques sur les méthodes d'intégrations	80
25.1	introduction	80
25.2	Quand faut-il utiliser la méthode de Newton-Côte par rapport à la méthode de Gauss	80
25.3	Notion d'intégration exacte / sous-intégrations : en 1D, 2D ou 3D, en petites et en grandes transformations	80
25.4	Singularité de la matrice de raideur : condition sur le nombre de point d'intégration minimum, cas d'un élément, cas de plusieurs éléments	82
25.5	Modes d'hourglass, stabilisation	83
25.6	Utilisation de la sous-intégration pour relâcher les bloquages : en flexion dans le cas d'éléments plaques et coques, pour les comportements matériels dit incompressibles .	83
VIII	Formulations mixtes	85
26	Introduction	85
27	Exemple de la mécanique	85
28	Extension à un système d'EDP quelconques	87
29	Exemple du couplage fort thermo-mécanique	87
IX	Problèmes sous contraintes	88
30	Introduction	88
30.1	Première présentation des multiplicateurs de Lagrange	88
30.2	Seconde présentation des multiplicateurs de Lagrange	89
30.3	Equivalence entre plusieurs conditions	91
30.4	Cas d'une procédure de résolution itérative de type Newton	91
30.5	Exemple d'application de la méthode des multiplicateurs de Lagrange	92
30.6	Méthode de pénalisation	93
30.7	Exemple d'application de la méthode de pénalisation	95
30.8	Exemple de problème sous une contrainte non linéaire	96
30.9	Méthode : Lagrangien augmenté	97
30.10	Méthode : Lagrangien perturbé	97
30.11	Bibliographie	98
X	Estimateur d'erreur	99
31	Estimation de l'erreur	99
31.1	Calcul d'erreur	99
31.1.1	introduction	99

31.1.2	La fonctionnelle	99
31.1.3	Exercice d'application	102
XI	Maillage adaptatif	105
32	Introduction	105
33	Concepts généraux sur la définition d'une nouvelle géométrie	106
33.1	Méthodologie retenue pour améliorer le maillage	107
33.2	Relocation à l'aide d'une méthode variationnelle	107
34	Exemple de Remaillage sur une ligne courbe en 2 D	108
35	Exemple de remaillage sur une surface en 3D	109
36	Remaillage dans un volume 3D	109
37	Raffinement du maillage	110
37.1	Cas d'un espace de dimension 1	110
37.2	Cas d'un espace de dimension 2	110
37.3	Cas d'un espace de dimension 3	112
XII	Condensation statique	114
38	Technique de condensation	114
XIII	Contact	115
39	Simulation des phénomènes de contact	115
39.1	Introduction	115
39.1.1	Modélisation simple (historique)	115
39.1.2	Modélisation plus précise analytique	116
39.1.3	Modélisation par éléments finis	116
39.2	Formulation - Remarques générales	118
39.2.1	Discrétisation	118
39.2.2	Procédure de recherche de la surface de contact	118
39.3	Prise en compte du contact - problème sous contrainte	119
39.4	Exemple d'application : contact entre deux barres	120
39.5	Exemple de la prise en compte des conditions limites de contact dans le code de calcul Herezh++ : description de quelques particularités de l'implantation	123
39.5.1	Réponse à la question : le point est-il intérieur à l'élément ?	123
39.5.2	Création des éléments de frontière	123
39.5.3	Éléments de Contact	124
39.5.4	Pénalisation	124
39.5.5	Adaptation du facteur de pénalité	124
39.5.6	Frottement	125

39.5.7 Loi de Coulomb	125
XIV Elements d'implantation informatique : partie 1	127
40 Introduction	127
41 conception_objet	127
XV partie 2 : Utilisation d'XML dans le cadre du calcul par éléments finis	128
42 Introduction	128
42.1 Contexte et état de l'art	128
42.2 Intérêt d'XML	129
43 Constitution d'un Schéma général	129
43.1 Quelques propriétés utiles	130
43.2 Implantation	131
44 Conclusion	132
Bibliographie	134

Liste des tableaux

1	Grandeurs génériques(selon M. Rappaz, M. Bellet, and M. Deville)	23
2	Comparaison des temps d'exécution en seconde : algorithme DFC classique et celui proposé par Bonelli, $h = 0.9h_{critique}$, $r =$ ratio par rapport à DFC	58
3	Classement des équations différentielles	77

Table des figures

1	Réponse de 0 à 4.10^{-3} d'une poutre en traction compression, soumise à un échelon de vitesse, discrétisée en 1 élément : influence du paramètre Φ	36
2	système masse ressort simulé par un élément barre et une masse ponctuelle : déplacement de l'extrémité libre (en y) en fonction du temps (en x), méthode explicite, $\Delta t = 0.2$ pas critique	45
3	système masse ressort simulé par un élément barre et une masse ponctuelle : déplacement de l'extrémité libre (en y) en fonction du temps (en x), méthode implicite, $\Delta t = 8$ pas critique	46
4	Barre soumise à un créneau de force de 40N sur 1s ($S=4\text{mm}^2$, $L=400$, $E= 2.10^5 \text{MPa}$) : déplacement de 3 points (en y) en fonction du temps (en x), méthode explicite, $\Delta t = 0.5$ pas critique	47
5	Barre soumise à un créneau de force de 40N sur 1s ($S=4\text{mm}^2$, $L=400$, $E= 2.10^5 \text{MPa}$) : déplacement de 3 points (en y) en fonction du temps (en x), méthode explicite de Tchamwa, $\Delta t = 0.8$ pas critique, pour $t=0$ à 1940	48
6	Barre soumise à un créneau de force de 40N sur 1s ($S=4\text{mm}^2$, $L=400$, $E= 2.10^5 \text{MPa}$) : déplacement de 3 points (en y) en fonction du temps (en x), méthode explicite de Tchamwa, $\Delta t = 0.8$ pas critique, pour quelques périodes après 900s	49
7	Barre soumise à un créneau de force de 40N sur 1s ($S=4\text{mm}^2$, $L=400$, $E= 2.10^5 \text{MPa}$) : déplacement de 3 points (en y) en fonction du temps (en x), méthode explicite de Tchamwa, $\Delta t = 0.8$ pas critique, pour quelques périodes après 1900s	50
8	Comparaison du modèle de Bonelli et du modèle DFC classique pour différent pas de temps	59
9	Agrandissement sur la comparaison du modèle de Bonelli et du modèle DFC classique pour différent pas de temps	59
10	évolution de l'énergie cinétique	60
11	Influence du nombre de points d'intégration	61
12	Evolution de l'extrémité libre en fonction du temps : premiers aller/retours	61
13	Evolution de l'extrémité libre en fonction du temps : après 20 aller/retours	62
14	vitesse de l'extrémité libre : influence du pas de temps sur l'amortissement	62
15	vitesse de l'extrémité libre à l'origine de temps : influence du pas de temps sur l'amortissement	63
16	vitesse de l'extrémité libre : comparaison Bonelli Tchamwa près de la zone de chargement	63
17	vitesse de l'extrémité libre : influence du rayon spectral ρ	64
18	vitesse de l'extrémité libre : influence du rayon spectral ρ après une vingtaine d'aller/retours	65
19	exemples de lignes caractéristiques	77
20	exemple de condition en 2D	90

21	Différents cas de repositionnement en fonction de la ligne tangente et de la ligne avant relocation	109
22	Raffinement dans le cas 1D	110
23	Raffinement dans le cas 2D pour un triangle linéaire	111
24	Raffinement dans le cas 2D pour un quadrangle bilinéaire.	111
25	Raffinement de triangle entraînant l'utilisation un seul type d'élément.	112
26	Raffinement de quadrangle entraînant l'utilisation de deux types d'éléments.	112
27	Raffinement dans le cas 3D, cas d'un hexaèdre et d'un pentaèdre.	113
28	Interactions entre des solides en contact	115
29	Exemple de contact entre des géométries circulaires : hypothèse de répartition sinusoidale de la pression q entre les deux cylindres (modèle de Hertz)	116
30	Solides en vis-à-vis : figure de gauche pas de contact et présence d'un gap "g" non nul, figure de droite, cas d'un contact et présence d'un effort de réaction de sens négatif par rapport à la normale (on considère l'effort de contact du solide 1 sur le solide 2) .	117
31	Géométrie des barres avant contact	120
32	Géométrie des barres après contact	121

Première partie

Equations bilan

1 Introduction

L'objectif est ici de rappeler succinctement quelques équations de bilan que l'on rencontre fréquemment dans les phénomènes de physique (mécanique) - chimie. Ces bilans se représentent généralement via des EDP, sous la forme d'un opérateur linéaire (de la fonction inconnue). Ce point est fondamental dans le cas d'une résolution de l'EDP par éléments finis (car il permet, dans le cas d'une forme de Galerkin, de conserver le produit scalaire des fonctions cf, l'introduction des formulations variationnelles).

Ces bilans peuvent s'effectuer relativement à deux types de volume :

- volume fixe dans l'espace géométrique : il s'agit donc d'un volume géométrique, et on regarde le passage de la matière relativement à ce volume. Il s'agit d'une vision Eulérienne du bilan.
- volume matériel : il s'agit d'un volume lié à une certaine matière. Le volume suit la matière considérée, il s'agit d'une vision Lagrangienne du bilan.

2 Remarques sur les différents types de coordonnées et dérivées temporelles

Le calcul de la dérivée temporelle diffère selon de type de coordonnées retenues. On considère trois types de coordonnées pour repérer le point matériel.

Le premier type est un système de coordonnées fixes dans le temps θ^i . On parle de coordonnées matérielles (ou coordonnées Lagrangiennes) θ^i , un système attaché à la matière considérée. Le système de coordonnées matérielles décrit un volume de référence fixe par rapport au temps.

Un premier exemple simple est constitué par les coordonnées initiales X_{geom} . C'est souvent ces coordonnées qui sont utilisées classiquement pour définir un système de coordonnées Lagrangiennes. Le second exemple très utile en éléments finis est constitué par les coordonnées de l'élément fini de référence (c'est également un système de coordonnées Lagrangiennes). Un point matériel repéré par ses coordonnées dans l'élément de référence conserve les mêmes coordonnées pendant toute la transformation.

Un second type de coordonnées est la position géométrique $X^a \vec{I}_a$ que le point M prend en fonction du temps. A tout moment, le point matériel M est en coïncidence avec un point géométrique et on a $X_{geom}^a = X_M^a(t)$. Le système de coordonnées $X_M^a(t)$ est mobile en fonction du temps. C'est un système de coordonnées Eulériennes. Bien noter que le point géométrique $X^a \vec{I}_a$ est évidemment fixe, c'est le point matériel coïncidant qui lui est mobile!!

Soit une grandeur f , fonction d'un point matériel P . On peut décrire l'évolution de f en fonction des deux systèmes de coordonnées introduit : soit $f(t, \theta^i)$ ou soit $f(t, X_M^a(t))$. Pour un même point matériel, la valeur de la fonction est identique, par contre il faut noter que la forme mathématique de la fonction est a priori différente (vu qu'elle ne s'adresse pas aux mêmes paramètres!!). Il est donc fondamental de spécifier le type de coordonnées que l'on utilise, or dans bien des cas, le type de coordonnées est implicite!!

Enfin, il est possible également de retenir le système de coordonnées géométriques pour décrire à un instant donné, les points matériels coïncidant avec les points géométriques, dans un volume

particulier fixe. Là on ne cherche pas à suivre une particule de matière, mais on regarde défile les particules qui sont coïncidant avec le point géométrique au cours du temps. Le système de coordonnées géométriques est utilisé pour décrire par exemple un volume “géométrique” fixe dans le temps.

Dans le cas de la mécanique du solide, “en général ” on retient un système de coordonnées Lagrangiennes. Dans le cas de la mécanique des fluides, “en général ” on retient un système de coordonnées Eulériennes, et enfin dans le cas de la description d’un volume géométrique fixe, on utilisera les coordonnées géométriques.

2.1 Dérivée temporelle dans le cas d’un paramétrage eulérien

Soit $f(t, X_M^a(t))$ une fonction d’un point matériel, et du temps, sa variation total par rapport au temps s’écrit :

$$\frac{df(t, X_M^a(t))}{dt} = \frac{\partial f(t, X_M^a(t))}{\partial t} + \frac{\partial f(t, X_M^a(t))}{\partial X_M^a(t)} \frac{dX_M^a(t)}{dt} = \frac{\partial f(t, X_M^a(t))}{\partial t} + \vec{V}(t, X_M^a(t)) \cdot \vec{grad}(f) \quad (1)$$

On parle également de dérivée particulaire. Le terme $\vec{V}(t, X_M^a(t)) \cdot \vec{grad}(f)$ s’appelle le terme de transport ou “d’advection”. Il est due au fait que les coordonnées qui servent à paramétrer la particule matérielle, varient en fonction du temps. Dans le cas où le fluide est immobile il n’y a pas de terme advectif.

2.2 Dérivée temporelle dans le cas d’un paramétrage matériel

Soit $f(t, \theta^i)$ une fonction d’un point matériel et du temps (bien noter que cette fonction, même si elle conduit aux mêmes valeurs numériques que la fonction du paragraphe précédent, n’a a priori pas la même forme mathématique que la précédente du fait qu’elle dépend d’un système de paramètre différent). Comme le paramétrage θ^i est indépendant du temps, la variation total de f par rapport au temps s’écrit :

$$\frac{df(t, \theta^i)}{dt} = \frac{\partial f(t, X_M^a(t))}{\partial t} \quad (2)$$

Ici il n’y a pas de terme de transport, car les coordonnées qui servent à paramétrer la particule matérielle, sont fixes en fonction du temps.

3 Bilan masse

3.1 Vision Eulérienne, par rapport à un volume géométrique fixe

Soit la masse volumique $\rho(t, X_{geom})$, fonction du temps et de la position géométrique considérée.

Remarque : *Il faut noter que comme à chaque instant on a la relation : $X_{geom} = X_M(t)$, toutes les fonctions des points matériels coïncidant ont la même forme mathématique que leur version fonction du point géométrique. En particulier on a la valeur numérique pour : $\rho(X_{geom})$ et pour $\rho(X_M(t))$, par contre les dérivées ou intégrales par rapport au temps sont différentes, le point géométrique étant fixe dans le temps contrairement au point matériel. On maintient donc la distinction dans la suite de l’exposé. A noter cependant que les dérivées partielles spatiales sont identiques.*

On considère un matériau homogène. Supposons que la matière soit animée d'une vitesse $\vec{V}(t, X_{geom})$. La masse de matière qui traverse les frontières du volume considéré est :

$$\int_{\partial\Delta V} \rho(t, X_{geom}) \vec{V}(t, X_{geom}) \cdot \vec{n} \, dS = \int_{\Delta V} \text{div} \left(\rho(t, X_{geom}) \vec{V}(t, X_{geom}) \right) \, dv \quad (3)$$

La variation de la masse interne est :

$$\frac{dm}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{\Delta V} \rho(t, X_{geom}) \, dV = \int_{\Delta V} \frac{\partial \rho(t, X_{geom})}{\partial t} \, dV \quad (4)$$

Le volume est constant, on peut donc passer l'opérateur de dérivation à l'intérieur de l'intégrale. On utilise une dérivée partielle, car on veut tenir compte uniquement de la variation temporelle pour un point géométrique fixé. D'où le bilan total :

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Delta V} \text{div}(\rho(t, X_{geom}) \vec{V}(t, X_{geom})) \, dv + \int_{\Delta V} \frac{\partial \rho(t, X_{geom})}{\partial t} \, dV \\ &= \int_{\Delta V} \left(\frac{\partial \rho(t, X_{geom})}{\partial t} + \text{div} \left(\rho(t, X_{geom}) \vec{V}(t, X_{geom}) \right) \right) \, dV \end{aligned} \quad (5)$$

Le bilan doit être vérifié quelque soit le volume géométrique considéré, ce qui conduit à l'équation bilan local :

$$\frac{\partial \rho(t, X_{geom})}{\partial t} + \text{div} \left(\rho(t, X_{geom}) \vec{V}(t, X_{geom}) \right) = 0 \quad (6)$$

L'équation (5) s'écrit également :

$$\int_{\Delta V} \text{div}(\rho(t, X_{geom}) \vec{V}(t, X_{geom})) \, dv = - \int_{\partial\Delta V} \rho(t, X_{geom}) \vec{V}(t, X_{geom}) \cdot \vec{n} \, dS \quad (7)$$

ce qui s'interprète par : "la variation de masse à l'intérieur d'un volume fixe est égale à moins les flux de matière entrants ou sortants du volume, elle est donc due uniquement à ces flux", on parle également de flux d'advection.

Dans le cas particulier où le régime est stationnaire, ce qui signifie que pour un point géométrique donnée, la dérivée partielle temporelle est nulle, le bilan des flux est donc nul :

$$\text{div}(\rho(X_{geom}) \vec{V}(X_{geom})) = 0 \quad (8)$$

Enfin si la masse volumique est constante en temps et en espace, le matériau est incompressible et on doit avoir :

$$\text{div}(\vec{V}(X_{geom})) = 0 \quad (9)$$

qui est égale également à la trace du tenseur **grad**(\vec{V}), et donc signifie que la vitesse de variation relative de volume est nulle, d'où sur un temps donné une variation de volume nulle.

Maintenant on considère les points matériels en coïncidence avec les points géométriques.

Comme les dérivées spatiales sont identiques, on a également pour le point matériel coïncidant la même formule mathématiquement équivalente à l'expression précédente (6) :

$$\frac{\partial \rho(t, X_M(t))}{\partial t} + \text{div} \left(\rho(t, X_M(t)) \vec{V}(t, X_M(t)) \right) = 0 \quad (10)$$

Bien noter que cette équation locale s'exprime ici par rapport à un point matériel et non géométrique comme en (6).

En développant le terme de divergence, on obtient :

$$\operatorname{div} \left(\rho(t, X_{geom}) \vec{V}(t, X_{geom}) \right) = \vec{V}(t, X_{geom}) \cdot \vec{\operatorname{grad}}(\rho(t, X_{geom})) + \rho(t, X_{geom}) \operatorname{div} \left(\vec{V}(t, X_{geom}) \right) \quad (11)$$

toujours en utilisant le fait que les dérivées spatiales sont identiques cette expression peut aussi s'écrire sous la forme :

$$\operatorname{div} \left(\rho(t, X_M(t)) \vec{V}(t, X_M(t)) \right) = \vec{V}(t, X_M(t)) \cdot \vec{\operatorname{grad}}(\rho(t, X_M(t))) + \rho(t, X_M(t)) \operatorname{div} \left(\vec{V}(t, X_M(t)) \right) \quad (12)$$

On note que pour un point matériel (**mais pas pour un point géométrique!**) en utilisant la relation générale (1) appliquée à $\rho(t, X_M(t))$:

$$\frac{d\rho(t, X_M(t))}{dt} = \frac{\partial \rho(t, X_M(t))}{\partial t} + \vec{V}(t, X_M(t)) \cdot \vec{\operatorname{grad}}(\rho(t, X_M(t))) \quad (13)$$

Maintenant, à l'aide des 2 expressions précédentes et l'expression (10), on obtient une équation locale équivalente à (10), en considérant le paramétrage eulérien :

$$\frac{d\rho(t, X_M(t))}{dt} + \rho(t, X_M(t)) \operatorname{div} \left(\vec{V}(t, X_M(t)) \right) = 0 \quad (14)$$

A noter également une expression équivalente pour la divergence du vecteur vitesse :

$$\operatorname{div} \left(\vec{V}(t, X_M(t)) \right) = V^i|_i = \operatorname{trace} \left(\mathbf{grad} \left(\vec{V}(t, X_M(t)) \right) \right) = \operatorname{trace}(\mathbf{D}) \quad (15)$$

\mathbf{D} étant le tenseur de vitesse de déformation. Sa trace mesure la vitesse de variation relative de volume. C'est un invariant, c'est-à-dire que sa valeur est indépendante du type de coordonnées que l'on utilise. Ainsi, la formule (14) montre que si la vitesse de variation relative de volume est nulle (donc pas de variation de volume), cela implique que la variation totale de masse volumique est nulle ce qui est évidemment logique! (en l'absence de réactions nucléaires...)

3.2 Vision Eulérienne, par rapport à un volume matériel

On considère un volume attaché à la matière $D(t)$ et pas de dispositif de création ou de disparition de matière. On considère un paramétrage eulérien $X_M(t)$. Le volume peut évoluer dans le temps d'où une masse volumique qui peut également varier : $\rho(X_M(t))$.

Le volume suit la matière, ce qui signifie que par rapport au volume de matière il n'y a pas de flux entrant ou sortant.

$$\frac{dm}{dt} = 0 = \frac{d}{dt} \int_{D(t)} \rho(t, X_M(t)) dv \quad (16)$$

On montre (voir par exemple le cours de Jean Garrigues <http://jgarrigues.perso.ec-marseille.fr/>) que l'expression générale de la dérivée de tout champ scalaire exprimé en paramétrage eulérien $A(t, X_M(t))$ est :

$$\frac{d}{dt} \int_{D(t)} A(t, X_M(t)) dv = \int_{D(t)} \frac{\partial A(t, X_M(t))}{\partial t} dv + \int_{\partial \Delta D(t)} A(t, X_M(t)) \vec{V}(t, X_M(t)) \cdot \vec{n} dS \quad (17)$$

qui peut également s'écrire uniquement sur le volume en utilisant le théorème de la divergence pour remplacer l'intégrale de surface par une intégrale de volume :

$$\frac{d}{dt} \int_{D(t)} A(t, X_M(t)) dv = \int_{D(t)} \left(\frac{\partial A(t, X_M(t))}{\partial t} + \text{div}(A(t, X_M(t)) \vec{V}(t, X_M(t))) \right) dv \quad (18)$$

On applique cette expression à la masse volumique :

$$0 = \frac{d}{dt} \int_{D(t)} \rho(t, X_M(t)) dv = \int_{D(t)} \left(\frac{\partial \rho(t, X_M(t))}{\partial t} + \text{div}(\rho(t, X_M(t)) \vec{V}(t, X_M(t))) \right) dv \quad (19)$$

qui devant être vrai quelque soit le volume de matière considérée conduit à l'équation locale :

$$\frac{\partial \rho(t, X_M(t))}{\partial t} + \text{div}(\rho(t, X_M(t)) \vec{V}(t, X_M(t))) = 0 \quad (20)$$

On remarque que c'est la même équation que (10) obtenue après transformation de l'équation locale obtenue par rapport aux coordonnées géométriques, en l'expression équivalente obtenue par rapport aux coordonnées eulériennes. Ce qui montre que (10) représente le cas du bilan sur un volume matériel alors que (6) représente le cas du bilan sur un volume géométrique fixe ! En fait, on obtient les mêmes expressions mathématiques, mais il faut garder en tête qu'elles représentent deux bilans différents. L'utilisation soit d'un paramétrage géométrique (cas du bilan sur le volume fixe) soit d'un paramétrage eulérien (cas du bilan sur un volume matériel) permet, il me semble, de bien différencier les deux cas !

En utilisant le même raisonnement que dans le paragraphe précédant le bilan peut aussi s'écrire sous la forme équivalente (14).

3.3 Vision Lagrangienne, par rapport à un volume matériel

Soit un volume matériel. Cette description est intéressante principalement pour une masse de matière fixe (pas de dispositif de création). Par contre, le volume d'encombrement de la matière peut bouger. On considère la masse volumique $\rho(t, \theta^i)$, repéré par rapport à un paramétrage matériel (donc, fixe dans le temps). Le système de coordonnées matérielles décrit ainsi un volume de référence fixe par rapport au temps.

Le volume suit la matière, ce qui signifie que par rapport au volume de matière il n'y a pas de flux entrant ou sortant.

$$\frac{dm}{dt} = 0 = \frac{d}{dt} \int_D \rho(t, \theta^i) dv = \frac{d}{dt} \int_{D_{ref}} \rho(t, \theta^i) \sqrt{g} d\theta^i \quad (21)$$

avec $\sqrt{g} = |J|$ le jacobien de la transformation du volume de matière au volume de référence. Le volume de référence étant fixe par rapport au temps, la dérivée temporelle peut se mettre à l'intérieur du signe intégral et on a :

$$0 = \frac{d}{dt} \int_{D_{ref}} \rho(t, \theta^i) \sqrt{g} d\theta^i = \int_{D_{ref}} \frac{\partial \{ \rho(t, \theta^i) \sqrt{g} \}}{\partial t} d\theta^i \quad (22)$$

Ce qui signifie que la grandeur $\rho(t, \theta^i) \sqrt{g}$ est constante en fonction du temps, ou encore en notant que $d\theta^i$ est également constant en fonction du temps et que $\sqrt{g} d\theta^i = dV =$ le volume infinitésimal de matière, on peut écrire de manière équivalente :

$$\rho(t, \theta^i) dV = C_{te} = \rho(0, \theta^i) dV_0 \quad (23)$$

En reprenant la relation (22) qui devant être vérifiée quelque soit le volume donne une forme locale :

$$0 = \frac{\partial \{\rho(t, \theta^i) \sqrt{g}\}}{\partial t} = \rho(t, \theta^i) \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial t} + \frac{\partial \rho(t, \theta^i)}{\partial t} \sqrt{g} \quad (24)$$

en considérant que l'on a : $\sqrt{g} = \sqrt{g}(t, \theta^i)$, sa dérivée temporelle partielle est également sa dérivée totale :

$$\frac{\partial \{\sqrt{g}(t, \theta^i)\}}{\partial t} = \frac{d \{\sqrt{g}(t, \theta^i)\}}{dt} = \dot{\sqrt{g}}(t, \theta^i) \quad (25)$$

de plus notons que :

$$\frac{\dot{\sqrt{g}}(t, \theta^i)}{\sqrt{g}(t, \theta^i)} = \frac{\dot{\sqrt{g}}(t, \theta^i) d\theta^i}{\sqrt{g}(t, \theta^i) d\theta^i} = \frac{d\dot{V}}{dV} = \text{trace}(\mathbf{D}) \quad (26)$$

ce qui montre que $\text{trace}(\mathbf{D})$ représente donc la vitesse de variation relative de volume.

En notant également que $\frac{\partial \rho(t, \theta^i)}{\partial t} = \frac{d\rho(t, \theta^i)}{dt}$, l'expression (24) peut finalement s'écrire sous la forme :

$$\frac{d\rho(t, \theta^i)}{dt} + \rho(t, \theta^i) \text{trace}(\mathbf{D}) = 0 \quad (27)$$

qui est la même expression que (20), mais ici écrite en fonction de coordonnées matérielles, ce qui est logique car, d'une part on utilise une dérivée temporelle totale en suivant un même point matériel dans les deux cas d'où un même résultat, d'autre part l'opérateur $\text{trace}(\mathbf{D})$ est invariant.

4 Bilan de conservation de soluté

On considère une quantité $C_i(t, M)$ appelé "soluté", dépendant du temps et du point matériel (ou du point géométrique coïncidant à l'instant t, dans ce cas on écrit : $C_i(t, X_{geom})$). L'indice "i" indique qu'il peut y avoir plusieurs solutés existants en même temps. C_i peut par exemple représenter la concentration d'une espèce chimique ou d'un élément d'alliage. C_i s'exprime alors par unité de volume. On considère une matière homogène et animée d'une vitesse $\vec{V}(t, M)$.

4.1 Vision Eulérienne, par rapport à un volume géométrique fixe

En reprenant un raisonnement similaire au cas de la masse, la variation du soluté par rapport à un volume fixe se compose de deux termes :

$$\int_{\Delta V} \left(\frac{\partial C_i(t, X_{geom})}{\partial t} + \text{div} \left(C_i(t, X_{geom}) \vec{V}(t, X_{geom}) \right) \right) dV \quad (28)$$

Le premier terme mesure la variation dépendant directement du temps tandis que le second mesure le terme d'advection (transfert par les parois due au déplacement de la matière).

Contrairement à la masse, d'une manière générale, il peut de plus y avoir création de soluté ou apport par les parois.

— La création volumique est prise en compte sous forme d'un terme source $\dot{Q}_i(t, X_{geom})$,

— l'apport par les parois (en plus du transport) est représenté par un terme "diffusif" $\vec{J}_i(t, X_{geom})$

Ce second apport peut se représenter sous forme volumique à l'aide du théorème de la divergence :

$$- \int_{\partial \Delta V} \vec{J}_i(t, X_{geom}) \cdot \vec{n} ds = - \int_{\Delta V} \text{div} \left(\vec{J}_i(t, X_{geom}) \right) dV \quad (29)$$

Dans le cas où \vec{J}_i est dirigé vers l'intérieur du volume, par convention, on considère que le flux est positif d'où le signe “-” devant l'intégrale. Le vecteur densité de courant \vec{J}_i (unité par exemple : $mole\ s^{-1}\ m^{-1}$) satisfait en général la première loi de Fick.

$$\vec{J}_i(t, X_{geom}) = -D_i^m \vec{grad}(C_i(t, X_{geom})) \quad (30)$$

D_i^m est le coefficient de diffusion de i dans le milieu m considéré.

Le bilan global de soluté par rapport au volume fixe s'écrit :

$$\int_{\Delta V} \left(\frac{\partial C_i(t, X_{geom})}{\partial t} + div \left(C_i(t, X_{geom}) \vec{V}(t, X_{geom}) \right) \right) dV = \int_{\Delta V} \left(\dot{Q}_i - div(\vec{J}_i) \right) dV \quad (31)$$

L'expression devant être vérifiée quelque soit le volume conduit à l'équation locale :

$$\frac{\partial C_i(t, X_{geom})}{\partial t} + div \left(C_i(t, X_{geom}) \vec{V}(t, X_{geom}) \right) = \dot{Q}_i(t, X_{geom}) - div \left(\vec{J}_i(t, X_{geom}) \right) \quad (32)$$

Maintenant on considère les points matériels en coïncidence avec les points géométriques.

Comme les dérivées partielles, en particulier spatiales sont identiques, on a également pour le point matériel coïncidant la même formule mathématiquement équivalente à l'expression précédente :

$$\frac{\partial C_i(t, X_M(t))}{\partial t} + div \left(C_i(t, X_M(t)) \vec{V}(t, X_M(t)) \right) = \dot{Q}_i(t, X_M(t)) - div \left(\vec{J}_i(t, X_M(t)) \right) \quad (33)$$

comme pour la masse volumique en notant que :

$$\frac{dC_i(t, X_M(t))}{dt} = \frac{\partial C_i(t, X_M(t))}{\partial t} + \vec{V}(t, X_M(t)) \cdot \vec{grad}(C_i(t, X_M(t))) \quad (34)$$

On obtient une équation locale équivalente à (32), en considérant le paramétrage eulérien :

$$\frac{dC_i(t, X_M(t))}{dt} + C_i(t, X_M(t)) div \left(\vec{V}(t, X_M(t)) \right) = \dot{Q}_i(t, X_M(t)) - div \left(\vec{J}_i(t, X_M(t)) \right) \quad (35)$$

4.2 Vision Eulérienne, par rapport à un volume matériel

On considère un volume attaché à la matière $D(t)$ et contrairement au cas de la masse, on tiens compte de la création ou de la disparition de matière au travers du terme source volumique et du terme flux diffusif. On considère un paramétrage eulérien $X_M(t)$ et le volume peut évoluer dans le temps.

Le volume suit la matière, ce qui signifie que par rapport au volume de matière il n'y a pas de flux entrant ou sortant du au transport, reste uniquement le flux diffusif d'où en suivant une procédure identique au cas de la masse on obtient :

$$\frac{d}{dt} \int_{D(t)} C_i(t, X_M(t)) dv = \int_{D(t)} \left(\dot{Q}_i(t, X_M(t)) - div(\vec{J}_i(t, X_M(t))) \right) dV \quad (36)$$

Et en calculant la dérivée temporelle (cf. méthode générale rappelée pour la masse volumique (17)) :

$$\int_{D(t)} \left(\frac{\partial C_i(t, X_M(t))}{\partial t} + div \left(C_i(t, X_M(t)) \vec{V}(t, X_M(t)) \right) \right) dv = \int_{D(t)} \left(\dot{Q}_i(t, X_M(t)) - div(\vec{J}_i(t, X_M(t))) \right) dV \quad (37)$$

qui devant être vrai quelque soit le volume de matière considérée conduit à l'équation locale :

$$\frac{\partial C_i(t, X_M(t))}{\partial t} + \text{div}(C_i(t, X_M(t)) \vec{V}(t, X_M(t))) = \dot{Q}_i(t, X_M(t)) - \text{div}(\vec{J}_i(t, X_M(t))) \quad (38)$$

Comme pour la masse volumique, on remarque que c'est la même équation que (33) obtenue après transformation de l'équation locale obtenue par rapport aux coordonnées géométriques, en l'expression équivalente obtenue par rapport aux coordonnées eulériennes.

En suivant maintenant la procédure habituelle, l'expression peut aussi se mettre sous la forme(35).

4.3 Vision Lagrangienne, par rapport à un volume matériel

Soit un volume matériel et un paramétrage lagrangien θ^i .

Le volume suit la matière, ce qui signifie que par rapport au volume de matière il n'y a pas de flux entrant ou sortant par transport. En suivant une procédure identique au cas de la masse volumique et en tenant compte du terme source et du flux par diffusion le bilan s'écrit :

$$\frac{d}{dt} \int_D C_i(t, \theta^i) dv = \int_{D_{ref}} \frac{\partial \{C_i(t, \theta^i) \sqrt{g}\}}{\partial t} d\theta^i = \int_{D_{ref}} \left(\dot{Q}_i(t, X_M(t)) - \text{div}(\vec{J}_i(t, X_M(t))) \right) \sqrt{g} d\theta^i \quad (39)$$

Sachant que :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \{C_i(t, \theta^i) \sqrt{g}\}}{\partial t} &= \frac{dC_i(t, \theta^i)}{dt} \sqrt{g} + C_i(t, \theta^i) \frac{d\sqrt{g}}{dt} \\ &= \frac{dC_i(t, \theta^i)}{dt} \sqrt{g} + C_i(t, \theta^i) \text{trace}(\mathbf{D}) \sqrt{g} \\ &= \frac{dC_i(t, \theta^i)}{dt} \sqrt{g} + C_i(t, \theta^i) \text{div}(\vec{V}(t, \theta^i)) \sqrt{g} \\ &= \left(\frac{dC_i(t, \theta^i)}{dt} + C_i(t, \theta^i) \text{div}(\vec{V}(t, \theta^i)) \right) \sqrt{g} \end{aligned} \quad (40)$$

On en déduit :

$$\frac{dC_i(t, \theta^i)}{dt} + C_i(t, \theta^i) \text{div}(\vec{V}(t, \theta^i)) = \dot{Q}_i(t, \theta^i) - \text{div}(\vec{J}_i(t, \theta^i)) \quad (41)$$

équation identique à (35) mais par rapport à des coordonnées Lagrangiennes.

4.4 Cas d'une grandeur massique

Supposons qu'au lieu d'une grandeur par unité de volume C_i on considère une grandeur massique W_i (titre massique ou concentration spécifique, ou concentration massique).

$$C_i = \rho W_i \quad (42)$$

Les relations se simplifient en utilisant les relations de bilan masse.

4.4.1 Cas des coordonnées géométriques

On reprend la relation (32) obtenue pour C_i , en utilisant (42).

$$\begin{aligned} & W_i(t, X_{geom}) \frac{\partial \rho(t, X_{geom})}{\partial t} + \rho(t, X_{geom}) \frac{\partial W_i(t, X_{geom})}{\partial t} \\ & + \rho(t, X_{geom}) \vec{V}(t, X_{geom}) \cdot \vec{grad}(W_i(t, X_{geom})) + W_i(t, X_{geom}) \operatorname{div} \left(\rho(t, X_{geom}) \vec{V}(t, X_{geom}) \right) \\ & = \dot{Q}_i(t, X_{geom}) - \operatorname{div} \left(\vec{J}_i(t, X_{geom}) \right) \end{aligned} \quad (43)$$

en tenant compte du bilan masse :

$$\rho(t, X_{geom}) \left(\frac{\partial W_i(t, X_{geom})}{\partial t} + \vec{V}(t, X_{geom}) \cdot \vec{grad}(W_i(t, X_{geom})) \right) = \dot{Q}_i(t, X_{geom}) - \operatorname{div} \left(\vec{J}_i(t, X_{geom}) \right) \quad (44)$$

4.4.2 Cas du paramétrage eulérien et Lagrangien

On considère la dérivée totale temporelle avec (42) et on ne mentionne pas le type de paramétrage, car le résultat est identique pour les deux. On reprend par exemple la relation (35) ou (41), et on tient compte du bilan masse (27) ou (20) et on obtient :

$$\frac{d\{\rho W_i\}}{dt} + \rho W_i \operatorname{div}(\vec{V}) = W_i \left(\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div}(\vec{V}) \right) + \rho \frac{dW_i}{dt} = \rho \frac{dW_i}{dt} \quad (45)$$

D'où la relation finale vraie pour les deux types de paramétrage, lorsque l'on suit une particule matérielle :

$$\rho \frac{dW_i(t, M)}{dt} = \dot{Q}_i(t, M) - \operatorname{div} \left(\vec{J}_i(t, M) \right) \quad (46)$$

Dans le cas du paramétrage eulérien, il s'agit de la dérivée temporelle particulière (matérielle), dans le cas du paramétrage lagrangien, les dérivées temporelles totales ou partielles sont identiques.

5 Bilan de la quantité de mouvement

On considère la quantité de mouvement : $\rho \vec{V}$ et on applique les résultats obtenus précédemment pour le soluté, pour chaque composante de la quantité de mouvement. Le terme source est constitué des forces de volume et le terme diffusif est constitué par $\vec{div}(\boldsymbol{\sigma})$, sans le signe moins, car contrairement aux autres flux on veut une contribution positive pour des forces dirigées vers l'extérieur du volume !

5.0.3 Cas d'un bilan sur un volume géométrique fixe : utilisation de coordonnées géométriques

En appliquant directement les relations déjà vues pour le soluté dans le cas de grandeurs massiques :

$$\rho(t, X_{geom}) \left(\frac{\partial \vec{V}(t, X_{geom})}{\partial t} + \vec{V}(t, X_{geom}) \cdot \mathbf{grad} \left(\vec{V}(t, X_{geom}) \right) \right) = \vec{F}_{vol}(t, X_{geom}) + \vec{div}(\boldsymbol{\sigma}(t, X_{geom})) \quad (47)$$

A noter qu'ici la quantité de mouvement étant un vecteur (3 scalaires), on obtient un gradient de vecteur qui est un tenseur, et la divergence d'un tenseur qui est un vecteur.

L'équation obtenue représente le principe fondamental de la dynamique, dans le cas de l'étude d'un domaine géométrique fixe.

5.0.4 Bilan sur un volume matériel : cas du paramétrage eulérien et Lagrangien

Toujours en appliquant les formules précédemment vues, on obtient une relation finale vrai pour les deux types de paramétrage, lorsque l'on suit une particule matérielle :

$$\rho \frac{d\vec{V}(t, M)}{dt} = \vec{F}_{vol}(t, M) + \vec{div}(\boldsymbol{\sigma}(t, M)) \quad (48)$$

Dans le cas du paramétrage eulérien, il s'agit de la dérivée temporelle particulière (matérielle), dans le cas du paramétrage lagrangien, les dérivées temporelles totales ou partielles sont identiques.

On retrouve évidemment l'équation fondamentale de la dynamique dans son cadre classique d'application.

6 Bilan de conservation d'énergie

Le premier principe de la thermodynamique stipule que la variation totale de l'énergie d'un domaine étudié est induite par la puissance mécanique des efforts extérieurs et la puissance calorifique apportée. Cette variation totale d'énergie se décompose en une énergie cinétique et une énergie interne.

$$\frac{d E_c}{dt} + \frac{d E_i}{dt} = P_{méca} + P_{cal} \quad (49)$$

Dans le cas d'un volume (géométrique ou matériel), la puissance mécanique est composée de l'action des forces de volume et de l'action des forces de surface.

$$P_{méca} = \int_D \vec{F}_{vol} \cdot \vec{V} \, dv + \int_{\partial D} \vec{T} \cdot \vec{V} \, ds \quad (50)$$

Pour la partie thermique (très analogue au cas d'un soluté) on distingue également une partie source volumique (associée à une réaction chimique, ou électrique ... par exemple) et une partie surfacique (par radiation, convection, conduction) ou flux diffusif.

$$P_{cal} = \int_D \dot{Q}_T \, dv - \int_{\partial D} \vec{J}_T \cdot \vec{n} \, ds = \int_D \left(\dot{Q}_T - \text{div}(\vec{J}_T) \right) \, dv \quad (51)$$

6.0.5 Puissance cinétique pour un volume fixe

On considère la variation d'énergie cinétique pour un volume fixe, et pour un paramétrage géométrique associé. On doit considérer d'une part l'évolution interne et d'autre part les transports par les parois.

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int_{\Delta V} \frac{\rho(t, X_{geom}) V^2(t, X_{geom})}{2} dV + \int_{\partial \Delta V} \frac{\rho(t, X_{geom}) V^2(t, X_{geom})}{2} \vec{V}(t, X_{geom}) \cdot \vec{n} \, dS \\ &= \int_{\Delta V} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial t} (\rho(t, X_{geom}) V^2(t, X_{geom})) + \text{div}(\rho(t, X_{geom}) V^2(t, X_{geom}) \vec{V}(t, X_{geom})) \right) dv \end{aligned} \quad (52)$$

On détaille le calcul des termes à intégrer. Tout d'abord le premier terme

$$\begin{aligned}
&= \frac{\partial}{\partial t} (\rho(t, X_{geom}) V^2(t, X_{geom})) \\
&= \frac{\partial \rho(t, X_{geom})}{\partial t} V^2(t, X_{geom}) + 2. \rho(t, X_{geom}) \vec{V} \cdot \frac{\partial \vec{V}}{\partial t}
\end{aligned} \tag{53}$$

Puis le second terme :

$$\begin{aligned}
&= \left(\text{div}(\rho(t, X_{geom}) V^2(t, X_{geom}) \vec{V}(t, X_{geom})) \right) \\
&= \rho(t, X_{geom}) V^2(t, X_{geom}) \text{div}(\vec{V}(t, X_{geom})) \\
&\quad + \left[V^2(t, X_{geom}) \vec{\text{grad}}(\rho(t, X_{geom})) \right. \\
&\quad \left. + 2. \rho(t, X_{geom}) \mathbf{grad} \left(\vec{V}(t, X_{geom}) \right) \cdot \vec{V}(t, X_{geom}) \right] \cdot \vec{V}(t, X_{geom})
\end{aligned} \tag{54}$$

Maintenant on fait la somme et on tient compte de l'équation 47 et des équations 6 et 11 et on obtient :

$$\begin{aligned}
&= \frac{\partial \rho(t, X_{geom})}{\partial t} V^2(t, X_{geom}) + 2. \rho(t, X_{geom}) \vec{V} \cdot \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} \\
&\quad + \rho(t, X_{geom}) V^2(t, X_{geom}) \text{div}(\vec{V}(t, X_{geom})) \\
&\quad + \left[V^2(t, X_{geom}) \vec{\text{grad}}(\rho(t, X_{geom})) \right. \\
&\quad \left. + 2. \rho(t, X_{geom}) \mathbf{grad} \left(\vec{V}(t, X_{geom}) \right) \cdot \vec{V}(t, X_{geom}) \right] \cdot \vec{V}(t, X_{geom}) \\
&= 2. \left[\vec{F}_{vol}(t, X_{geom}) + \vec{\text{div}}(\boldsymbol{\sigma}(t, X_{geom})) \right] \cdot \vec{V}(t, X_{geom}) \\
&\quad + \left[\frac{\partial \rho(t, X_{geom})}{\partial t} + \rho(t, X_{geom}) \text{div}(\vec{V}(t, X_{geom})) + \vec{V}(t, X_{geom}) \cdot \vec{\text{grad}}(\rho(t, X_{geom})) \right] V^2(t, X_{geom}) \\
&= 2. \left[\vec{F}_{vol}(t, X_{geom}) + \vec{\text{div}}(\boldsymbol{\sigma}(t, X_{geom})) \right] \cdot \vec{V}(t, X_{geom})
\end{aligned} \tag{55}$$

Ainsi au final le calcul de la puissance cinétique pour un volume fixe devient :

$$\frac{d E_c}{dt} = \int_{\Delta V} \left[\vec{F}_{vol}(t, X_{geom}) + \vec{\text{div}}(\boldsymbol{\sigma}(t, X_{geom})) \right] \cdot \vec{V}(t, X_{geom}) dv \tag{56}$$

6.0.6 Puissance cinétique pour un volume matériel : cas d'un paramétrage eulérien ou lagrangien

On considère la variation d'énergie cinétique pour un volume matériel et on utilise la relation 45 mise au point pour une grandeur massique, qui est ici : $1/2 \rho V^2(t, \mathbf{M})$. On n'indique pas le type de coordonnée matérielle, car la relation 45 est valide pour les deux types de coordonnées. On obtient directement :

$$\frac{d E_c}{dt} = \int_D \left[\rho \frac{d(1/2 V^2(t, \mathbf{M}))}{dt} \right] dv = \int_D \rho \frac{d\vec{V}(t, \mathbf{M})}{dt} \cdot \vec{V}(t, \mathbf{M}) dv \tag{57}$$

Puis on utilise la relation 48 d'où :

$$\frac{d E_c}{dt} = \int_D \left[\vec{F}_{vol}(t, M) + \vec{\text{div}}(\boldsymbol{\sigma}(t, M)) \right] \cdot \vec{V}(t, \mathbf{M}) dv \tag{58}$$

6.0.7 Bilan énergie interne : cas d'un volume fixe

L'objectif est de définir une relation locale. On commence donc par définir une énergie par unité de quelque-chose, et ici le choix est de définir une énergie massique ou spécifique e_i

$$E_i(\Delta V) = \int_{\Delta V} \rho(t, X_{geom}) e_i(t, X_{geom}) dV \quad (59)$$

dont la variation en fonction du temps, calculé pour un élément de volume dV est donnée par la partie gauche de l'expression 44 appliquée à $W_i(t, X_{geom}) = e_i(t, X_{geom})$

$$\frac{d E_i(\Delta V)}{dt} = \int_{\Delta V} \rho(t, X_{geom}) \left(\frac{\partial e_i(t, X_{geom})}{\partial t} + \vec{V}(t, X_{geom}) \cdot \text{grad}(e_i(t, X_{geom})) \right) dV \quad (60)$$

Maintenant on utilise l'ensemble des relations vues précédemment :

$$\begin{aligned} \frac{d E_i(\Delta V)}{dt} &= -\frac{d E_c}{dt} + P_{méca} + P_{cal} \\ &= -\int_{\Delta V} \left[\vec{F}_{vol}(t, X_{geom}) + \text{div}(\boldsymbol{\sigma}(t, X_{geom})) \right] \cdot \vec{V}(t, X_{geom}) dV \\ &\quad + \int_{\Delta V} \vec{F}_{vol}(t, X_{geom}) \cdot \vec{V}(t, X_{geom}) dV + \int_{\partial \Delta V} \vec{T} \cdot \vec{V}(t, X_{geom}) dS \\ &\quad + \int_{\Delta V} \left(\dot{Q}_T - \text{div}(\vec{J}_T) \right) dV \end{aligned} \quad (61)$$

Dans cette expression, les forces de volumes disparaissent. D'autre part, on a la relation d'intégration par partie, valide quelque soit le volume considéré en tenant compte que à la frontière du volume $\boldsymbol{\sigma} \cdot \vec{n} = \vec{T}$:

$$\int_D \text{div}(\boldsymbol{\sigma}) \cdot \vec{V} dv = \int_{\partial D} \vec{T} \cdot \vec{V} ds - \int_D \boldsymbol{\sigma} : \text{grad}(\vec{V}) dv \quad (62)$$

d'où au final :

$$\begin{aligned} &\int_{\Delta V} \rho(t, X_{geom}) \left(\frac{\partial e_i(t, X_{geom})}{\partial t} + \vec{V}(t, X_{geom}) \cdot \text{grad}(e_i(t, X_{geom})) \right) dV \\ &= \int_{\Delta V} \left[\boldsymbol{\sigma}(t, X_{geom}) : \text{grad}(\vec{V}(t, X_{geom})) + \left(\dot{Q}_T - \text{div}(\vec{J}_T) \right) \right] dV \end{aligned} \quad (63)$$

qui devant être vérifiée quelque soit le volume conduit à :

$$\begin{aligned} &\rho(t, X_{geom}) \left(\frac{\partial e_i(t, X_{geom})}{\partial t} + \vec{V}(t, X_{geom}) \cdot \text{grad}(e_i(t, X_{geom})) \right) \\ &= \boldsymbol{\sigma}(t, X_{geom}) : \text{grad}(\vec{V}(t, X_{geom})) + \left(\dot{Q}_T - \text{div}(\vec{J}_T) \right) \end{aligned} \quad (64)$$

6.0.8 Bilan énergie interne : cas d'un volume matériel

Comme dans le cas du volume fixe, on commence donc par définir une énergie spécifique e_i

$$E_i(D) = \int_D \rho(t, M) e_i(t, M) dv \quad (65)$$

dont la variation en fonction du temps, est donnée par l'expression 45 appliquée à $W_i(t, M) = e_i(t, M)$

$$\frac{d E_i(D)}{dt} = \int_D \rho(t, M) \frac{de_i(t, M)}{dt} dV \quad (66)$$

Maintenant on utilise l'ensemble des relations vues précédemment :

$$\begin{aligned} \frac{d E_i(D)}{dt} &= -\frac{d E_c}{dt} + P_{méca} + P_{cal} \\ &= -\int_D \left[\vec{F}_{vol}(t, M) + \text{div}(\boldsymbol{\sigma}(t, M)) \right] \cdot \vec{V}(t, \mathbf{M}) dv \\ &\quad + \int_D \vec{F}_{vol}(t, M) \cdot \vec{V}(t, M) dv + \int_{\partial D} \vec{T} \cdot \vec{V}(t, M) ds \\ &\quad + \int_D \left(\dot{Q}_T - \text{div}(\vec{J}_T) \right) dv \end{aligned} \quad (67)$$

On observe les mêmes simplifications que pour le volume fixe d'où au final :

$$\begin{aligned} &\int_D \rho(t, M) \left(\frac{de_i(t, M)}{dt} \right) dv \\ &= \int_D \left[\boldsymbol{\sigma}(t, M) : \mathbf{grad}(\vec{V}(t, M)) + \left(\dot{Q}_T - \text{div}(\vec{J}_T) \right) \right] dv \end{aligned} \quad (68)$$

qui devant être vérifiée quelque soit le volume conduit à :

$$\rho(t, M) \left(\frac{de_i(t, M)}{dt} \right) = \boldsymbol{\sigma}(t, M) : \mathbf{grad}(\vec{V}(t, M)) + \left(\dot{Q}_T - \text{div}(\vec{J}_T) \right) \quad (69)$$

Dans le cas de coordonnées Eulériennes, en utilisant 1, on a :

$$\begin{aligned} &\rho(t, X_M^a(t)) \left(\frac{de_i(t, X_M^a(t))}{dt} \right) \\ &= \rho(t, X_M^a(t)) \left(\frac{\partial e_i(t, X_M^a(t))}{\partial t} + \vec{V}(t, X_M^a(t)) \cdot \mathbf{grad}(e_i(t, X_M^a(t))) \right) \\ &= \boldsymbol{\sigma}(t, X_M^a(t)) : \mathbf{grad}(\vec{V}(t, X_M^a(t))) + \left(\dot{Q}_T - \text{div}(\vec{J}_T) \right) \end{aligned} \quad (70)$$

On retrouve une forme analogue à 64.

Dans le cas de coordonnées Lagrangiennes, en utilisant 1, on a :

$$\rho(t, \theta^i(t)) \left(\frac{de_i(t, \theta^i(t))}{dt} \right) = \boldsymbol{\sigma}(t, \theta^i(t)) : \mathbf{grad}(\vec{V}(t, \theta^i(t))) + \left(\dot{Q}_T - \text{div}(\vec{J}_T) \right) \quad (71)$$

6.0.9 Bilan d'enthalpie : introduction

Les thermiciens utilisent classiquement l'enthalpie massique H qui est relié à l'énergie interne spécifique par la relation :

$$H = e_i + \frac{p}{\rho} \text{ ou encore } \rho e_i = \rho H - p \quad (72)$$

p étant la pression ou $-\text{trace}(\boldsymbol{\sigma})$. On cherche maintenant à remplacer l'énergie interne spécifique par l'enthalpie.

6.0.10 Bilan d'enthalpie : cas d'un volume fixe

En utilisant l'expression 32 avec $C_i = \rho e_i$, on en déduit la relation :

$$\begin{aligned}
& \rho(t, X_{geom}) \left(\frac{\partial e_i(t, X_{geom})}{\partial t} + \vec{V}(t, X_{geom}) \cdot \text{grad}(e_i(t, X_{geom})) \right) \\
&= \frac{\partial(\rho e_i)(t, X_{geom})}{\partial t} + \text{div} \left((\rho e_i)(t, X_{geom}) \vec{V}(t, X_{geom}) \right) \\
&= \frac{\partial(\rho H)(t, X_{geom})}{\partial t} + \text{div} \left((\rho H)(t, X_{geom}) \vec{V}(t, X_{geom}) \right) \\
&\quad - \frac{\partial p(t, X_{geom})}{\partial t} - \text{div} \left(p(t, X_{geom}) \vec{V}(t, X_{geom}) \right)
\end{aligned} \tag{73}$$

d'où l'expression locale finale en enthalpique :

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial(\rho H)(t, X_{geom})}{\partial t} + \text{div} \left((\rho H)(t, X_{geom}) \vec{V}(t, X_{geom}) \right) \\
&= \left[\frac{\partial p(t, X_{geom})}{\partial t} + \text{div} \left(p(t, X_{geom}) \vec{V}(t, X_{geom}) \right) \right] \\
&\quad + \boldsymbol{\sigma}(t, X_{geom}) : \mathbf{grad}(\vec{V}(t, X_{geom})) + \left(\dot{Q}_T - \text{div}(\vec{J}_T) \right)
\end{aligned} \tag{74}$$

Qui exprime que la variation d'enthalpie (terme de gauche), peut-être due, à une variation de pression (premier terme de droite entre crochet), à une variation d'énergie mécanique interne (terme en $\boldsymbol{\sigma}$, et enfin aux termes purement thermiques.

6.0.11 Bilan d'enthalpie : cas d'un volume matériel

Pour faire simple, dans le cas de l'utilisation de coordonnées Eulériennes, on peut par exemple reprendre les formules précédentes en remplaçant les dérivées particulières par des dérivées totales. On obtient directement :

$$\frac{d(\rho H)(t, X_M^a(t))}{dt} = \frac{dp(t, X_M^a(t))}{dt} + \boldsymbol{\sigma}(t, X_M^a(t)) : \mathbf{grad}(\vec{V}(t, X_M^a(t))) + \left(\dot{Q}_T - \text{div}(\vec{J}_T) \right) \tag{75}$$

Dans le cas de l'utilisation de coordonnées Lagrangiennes, la forme est équivalente :

$$\frac{d(\rho H)(t, \theta^i(t))}{dt} = \frac{dp(t, \theta^i(t))}{dt} + \boldsymbol{\sigma}(t, \theta^i(t)) : \mathbf{grad}(\vec{V}(t, \theta^i(t))) + \left(\dot{Q}_T - \text{div}(\vec{J}_T) \right) \tag{76}$$

6.0.12 Equation de la chaleur

Pour un volume fixe, dans le cas où les contributions d'ordre mécanique sont négligées, on obtient l'équation de la chaleur :

$$\frac{\partial(\rho H)(t, X_{geom})}{\partial t} + \text{div} \left((\rho H)(t, X_{geom}) \vec{V}(t, X_{geom}) \right) = \left(\dot{Q}_T - \text{div}(\vec{J}_T) \right) \tag{77}$$

Pour un volume matériel, l'équation de la chaleur dans les deux systèmes de coordonnées peut s'écrire sous la forme :

$$\frac{d(\rho H)(t, M)}{dt} = \left(\dot{Q}_T - \text{div}(\vec{J}_T) \right) \tag{78}$$

7 Forme générique des équations de conservation

D'une manière générale l'ensemble des équations de conservation, en retenant des grandeurs massiques, peut s'écrire sous la forme générique suivante pour un volume géométrique fixe :

$$\frac{\partial(\rho A)(t, X_{geom})}{\partial t} + div \left((\rho A)(t, X_{geom}) \vec{V}(t, X_{geom}) \right) = \left(\dot{Q}_A - div(\vec{J}_A) \right) \quad (79)$$

Dans le cas d'un volume matériel, avec l'utilisation de coordonnée Eulérienne on a également une expression du même type, mais cette fois fonction du point matériel :

$$\frac{\partial(\rho A)(t, X_M^a(t))}{\partial t} + div \left((\rho A)(t, X_M^a(t)) \vec{V}(t, X_M^a(t)) \right) = \left(\dot{Q}_A - div(\vec{J}_A) \right) \quad (80)$$

Toujours dans le cas de l'utilisation de coordonnée Eulérienne avec un volume matériel, nous avons une seconde expression équivalente :

$$\begin{aligned} \rho(t, X_M^a(t)) \left(\frac{\partial A(t, X_M^a(t))}{\partial t} + \vec{V}(t, X_M^a(t)) \cdot \vec{grad}(A(t, X_M^a(t))) \right) &= \dot{Q}_A - div(\vec{J}_A) \\ = \rho(t, X_M^a(t)) \left(\frac{dA(t, X_M^a(t))}{dt} \right) & \end{aligned} \quad (81)$$

La dérivée totale est ici la dérivée particulaire.

NB : Cette dernière expression est également valable pour les coordonnées géométriques dans la plupart des cas (voir paragraphes précédents), sauf pour le bilan masse !!

Et enfin dans le cas de l'utilisation de l'utilisation de coordonnées Lagrangiennes avec un volume matériel :

$$\rho(t, \theta^i) \left(\frac{dA(t, \theta^i)}{dt} \right) = \rho(t, \theta^i) \left(\frac{\partial A(t, \theta^i)}{\partial t} \right) = \dot{Q}_A - div(\vec{J}_A) \quad (82)$$

TABLE 1 – Grandeurs génériques(selon M. Rappaz, M. Bellet, and M. Deville)

	A	\vec{J}_A	\dot{Q}_A
masse	1 [-]	0 [-]	0 [-]
soluté	W_i [mole.Kg ⁻¹]	\vec{J}_i [mole m ⁻² s ⁻¹]	\dot{Q}_i [mole m ⁻³ s ⁻¹]
chaleur	H [JKg ⁻¹]	\vec{J}_T [W m ⁻²]	\dot{Q}_T [W m ⁻³]
quantité de mouvement selon x par exemple	V_x [m s ⁻¹]	$-\sigma_x$ [N m ⁻²]	$F_{vol x}$ [N m ⁻³]

La table 7 regroupe une synthèse des différents cas étudié (établi à partir de¹)

1. M. Rappaz, M. Bellet, and M. Deville. Traité des matériaux : Modélisation numérique en science et génie des matériaux, volume 10 of ISBN : 2-88074-365-6. Presses polytechniques et universitaires Romandes, 1998.

8 Equations de comportement

Les équations de bilan sont générales. De manière à différentier le comportement des différents matériaux et également obtenir un nombre suffisant de relations pour déterminer toutes les inconnues du problème, il faut adjoindre des équations de comportement. Nous donnons ici quelques cas classiques et simples.

8.1 Exemple d'équation de comportement associé au bilan masse

Considérons le cas d'un matériau condensé homogène, pour lequel on néglige l'influence de la pression. Le comportement peut par exemple se représenter sous la forme suivante :

$$\rho(t, M) = \rho_0 \left[1 - \beta_T(T(t, M) - T_0) - \sum_i \beta_i(C_i(t, M) - C_{0i}) \right] \quad (83)$$

La relation établit une dépendance linéaire à la variation de température et une dépendance linéaire à la variation de concentration de soluté i

8.2 Exemple d'équation de comportement associé au bilan de soluté

Une loi classique est la première loi de Fick.

$$\vec{J}_i(t, M) = -D_i \vec{grad}(C_i(t, M)) \quad (84)$$

avec D_i un coefficient appelé coefficient de diffusion.

Cette loi indique que le vecteur flux est proportionnel au gradient de concentration.

Si on n'a pas de transport par advection et pas de terme source, en reportant l'équation précédente dans l'équation de bilan on obtient la seconde loi de Fick :

$$\frac{\partial C_i(t, M)}{\partial t} - \text{div} \left(D_i \vec{grad}(C_i(t, M)) \right) = 0 \quad (85)$$

communément appelé équation de diffusion. Dans le cas où il y a du transport par advection l'équation devient :

$$\frac{\partial C_i(t, M)}{\partial t} + \vec{V}(t, M) \cdot \vec{grad}(C_i(t, M)) - \text{div} \left(D_i \vec{grad}(C_i(t, M)) \right) = 0 \quad (86)$$

ce qui correspond à un problème d'advection-diffusion.

8.3 Terme source

Lorsque l'on a une seule espèce chimique à faible concentration dans un solvant, où il n'y a qu'une seule réaction du 1er ordre (exemple : dissolution de l'espèce dans le solvant), le terme source peut être représenté par :

$$\dot{Q}_i = -a_r C_i \quad (87)$$

a_r représente la vitesse de réaction.

Si la concentration est uniforme, l'introduction de la loi dans l'équation de bilan conduit à la loi de Wilhelmy.

$$\frac{dC_i}{dt} = -a_r C_i \quad (88)$$

qui une fois intégré donne une décroissance exponentielle de la concentration C_i avec une constante de temps inverse à la vitesse de réaction.

8.4 Loi associée au bilan d'énergie

$$\vec{J}_T(t, M) = -k \text{grad}(T(t, M)) \quad (89)$$

ce qui constitue la loi de Fourier, k étant le coefficient thermique du matériau. S'il y a de la radiation, on introduit une conductivité radiative équivalente :

$$K_R = \frac{16 \sigma_B n^2 T^3}{3 \alpha_r} \quad (90)$$

cette relation constitue l'approximation de Rosseland. σ_B est la constante de rayonnement de Stefan-Boltzmann, n est l'indice de réfraction, α_r est le coefficient d'absorption.

Dans le cas où la pression est approximativement constante, l'enthalpie peut s'exprimer sous la relation :

$$H(t, M) = \int_0^T C_p(\tau) d\tau \quad (91)$$

$C_p(T)$ est la chaleur massique à pression constante. L'équation bilan devient :

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} + \rho C_p \vec{V} \cdot \text{grad}(T) - \text{div}(k \text{grad}(T)) = \rho C_p \frac{dT}{dt} - \text{div}(k \text{grad}(T)) = \dot{Q}_T \quad (92)$$

Lorsque l'on ne considère que la thermique, \dot{Q}_T peut provenir par exemple d'effet Joule électrique :

$$\dot{Q}_T = \vec{F} \cdot \vec{j}_E = \rho_E \|\vec{j}_E\|^2 \quad (93)$$

\vec{E} est le champ électrique, \vec{j}_E est la densité de courant électrique, ρ_E est la résistivité.

Autre exemple : cas de réaction chimique :

$$\dot{Q}_T = \sum_i \frac{\partial C_i}{\partial t} H_i^0 \quad (94)$$

H_i^0 est l'enthalpie molaire de formation du composé en $J \text{ mole}^{-1}$

Autre exemple : cas d'une transformation de phase :

$$\dot{Q}_T = (\rho L)^{\alpha/\beta} \frac{d f^\alpha}{d t} \quad (95)$$

avec f^α la fraction volumique de phase α .

8.5 Exemple de loi de comportement mécanique du matériau

Pour les matériaux solides, on a par exemple une loi de la forme :

$$\sigma = f(\varepsilon) \quad (96)$$

Par exemple en élasticité linéaire on a la loi de Hooke :

$$\sigma^{ij} = E^{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (97)$$

Autre exemple, les fluides Newtonien :

$$\bar{\sigma} = \mu \bar{D} \quad (98)$$

qui constitue la loi de Newton, avec μ la viscosité dynamique du fluide. $\mu/\rho =$ viscosité cinématique. En tenant compte de la décomposition sphérique - déviatoire du tenseur des contraintes on obtient pour l'équation de bilan, les équations de Navier Stoke :

$$\rho \left[\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \mathbf{grad}(\vec{V}) \cdot \vec{V} \right] = \vec{F}_{vol} - \mathbf{grad}(p) + \mu \Delta(\vec{V}) \quad (99)$$

9 Conditions limites et initiales

D'une manière générale les équations de bilan, sont associées à des conditions limites spatiales (aux limites du solide par exemple, ou du domaine) et des conditions initiales temporelles (par exemple pour $t=0$: valeurs de la position et de la vitesse). On distingue des grandes catégories de conditions :

1. Conditions de Neuman :

$$-\vec{J}_A \cdot \vec{n} = q_A \quad \text{où } q_A \text{ est connue} \quad (100)$$

Donc correspond à un flux connue sur la frontière.

2. Conditions de Neuman homogène = condition de Neuman associée à $q_a = 0$, c'est-à-dire un flux nul.
3. Conditions de Cauchy ou mixte :

$$-\vec{J}_A \cdot \vec{n} + a A = b \quad (101)$$

a et b sont des valeurs fixés et connues.

4. Conditions de Dirichlet :

$$A = A(\text{fixé}) \quad (102)$$

Deuxième partie

Méthodes d'avancement temporel

10 Introduction

Les problèmes temporels sont classiquement soit du premier ordre, c'est-à-dire qu'ils ne font intervenir que des dérivés du premier ordre en t , soit du second ordre avec des dérivés secondes. Les premiers sont relatifs aux phénomènes transitoire de la thermique par exemple ou encore de la diffusion. Les seconds sont relatifs à la dynamique dans laquelle intervient l'accélération.

Nous allons tout d'abord introduire les traits principaux des différentes méthodes à partir des modèles du premier ordre. Ensuite nous généraliserons dans le cadre des méthodes applicables au second ordre.

11 Phénomène du premier ordre

Soit l'équation d'équilibre discrétisée spatialement pour un comportement élastique visqueux que l'on choisira pour plus de facilité linéaire : visco-élastique. De même on se place dans le cadre des petites transformations . On verra par la suite quelle modifications il faut effectuer pour étendre les résultats dans un cadre non-linéaire.

$$\langle \dot{ddl} \rangle^* ([C](\dot{ddl}) + [K](ddl) - (SM)) = 0 \quad (103)$$

$[K]$ représente la raideur élastique du matériau et $[C]$ le comportement visqueux. (SM) représente les efforts extérieurs imposés que l'on supposera connus. La difficulté qui subsiste est la détermination d'une relation entre les degrés de liberté (ddl) et leur variations temporelles. Comme dans le cas des fonctions spatiales l'idée est de discrétiser également des vitesses de ddl en fonction du temps. Il y a plusieurs solutions. Dans le cadre des éléments finis la solution la plus classique est de supposer une décomposition multiplicative de la partie temporelle et de la partie spatiale. Au niveau de la discrétisation temporelle, classiquement on retient une discrétisation par différences finis, bien qu'il existe également des modèles avec discrétisation par éléments finis (voir par exemple les méthodes de Galerkin discontinue pour les phénomènes du second ordre, sachant que cette technique est également appliquée pour les phénomènes du premier ordre : chapitre (17)).

Parmi l'ensemble des techniques de discrétisation temporelle, on distingue les méthodes multi-pas c'est-à-dire les méthodes qui mettent en jeu simultanément plusieurs pas de calcul et les méthodes à un pas qui mettent en jeu uniquement les grandeurs à t et $t+\Delta t$. A priori en éléments finis, se sont les modèles à un pas qui sont les plus courants. Le premier avantage est l'économie en stockage de données intermédiaires, les méthodes multi-pas nécessitant évidemment de conserver les données des différents pas. Le second avantage est la simplicité des méthodes à un pas. De plus plusieurs travaux ont montré que d'un point de vue précision de calcul dans un contexte non linéaire, il était possible d'atteindre une bonne précision avec les méthodes à un pas, comparable avec les méthodes multi-pas.

Ainsi dans ce document, nous ne parlerons que de méthodes à un pas.

La méthode la plus classique est celle d'Euler sous 3 formes : explicite, implicite ou semi-implicite. Cette méthode consiste à calculer la vitesse sous la forme discrétisée suivante :

$$(1 - \alpha)d\dot{d}l(t + \Delta t) + \alpha d\dot{d}l(t) = \frac{ddl(t + \Delta t) - ddl(t)}{\Delta t} \quad (104)$$

La forme explicite correspond à $\alpha = 1$, la forme implicite correspond à $\alpha = 0$ et la forme semi-implicite correspond à $0 < \alpha < 1$. En fait la différence la plus importante se situe entre la méthode explicite et les 2 autres méthodes, on séparera donc la présentation de ces deux types de méthodes.

11.1 Méthode explicite d'Euler

A partir de la formule (104) où $\alpha = 1$ et de l'équation d'équilibre (103) écrite au temps t et en tenant compte que cette dernière équation doit être vérifiée quelque soit les vitesses de degré de liberté virtuel on obtient :

$$\left([C] \left(\frac{ddl(t + \Delta t) - ddl(t)}{\Delta t} \right) + [K](ddl(t)) - (SM(t)) \right) = (0)$$

ou encore

$$\begin{aligned} (ddl(t + \Delta t)) &= [C]^{-1} ([C] - \Delta t[K]) (ddl(t)) + \Delta t[C]^{-1}(SM(t)) \\ &= ([Id] - \Delta t[C]^{-1}[K])(ddl(t)) + \Delta t[C]^{-1}(SM(t)) \end{aligned} \quad (105)$$

Ce qui fourni une relation de récurrence permettant le calcul des degrés de libertés à $t + \Delta t$ en fonction des grandeurs à t . Cette relation est explicite en ce sens que les grandeurs à $t + \Delta t$ sont explicitement fonction des grandeurs aux temps t . Ceci provient en particulier du fait que l'on utilise l'équation (103) au temps t pour obtenir les ddl inconnues à $t + \Delta t$.

Cette relation est également intéressante pour montrer les phénomènes de stabilité. Supposons pour simplifier que les matrices $[C]$ et $[K]$ soient des matrices constantes ainsi que le second membre. Supposons également que l'on utilise le même incrément de temps tout au long du calcul. Dans ce cas on aura au n^{ieme} pas de temps : $t = n\Delta t$ que l'on notera le temps "n". Appliquons alors la relation de récurrence plusieurs fois :

$$\begin{aligned} (ddl_{n+1}) &= ([Id] - \Delta t[C]^{-1}[K])([Id] - \Delta t[C]^{-1}[K])(ddl_{n-1}) \\ &\quad + \Delta t[C]^{-1}(SM) + \Delta t[C]^{-1}(SM) \\ &= [A](ddl_{n-1}) + (B_2) \end{aligned}$$

Avec $[Id] - \Delta t[C]^{-1}[K] = [A]$ et $(B_2) = (\Delta t([A] + [Id])[C]^{-1})(SM)$
D'une manière identique on aurait pour les autres incréments :

$$(ddl_n) = [A]^3(ddl_{n-3}) + (B_3)$$

avec $(B_n) = \Delta t([A]^{n-1} + [A]^{n-2} + \dots + [A]^1 + [Id])[C]^{-1}(SM)$. En résumé avec les notations initiales :

$$(ddl_n) = [A]^n(ddl_0) + (B_n) \quad (106)$$

Dans cette expression on note qu'une condition nécessaire pour que le résultat ne diverge pas est que la grandeur $[A]^n$ soit borné c'est-à-dire que le rayon spectral ou encore la plus grande valeur

propre de la matrice $[A]$ soit inférieur ou égal à 1. En fait d'une manière pratique il est toujours préférable qu'il soit strictement inférieur à 1. Cette condition est appelée condition de stabilité du calcul. Elle permet de déterminer un incrément de temps critique $\Delta t_{critique}$ au delà duquel la plus grande valeur propre de $[Id] - \Delta t[C]^{-1}[K]$ est supérieur à 1.

Ainsi cette méthode d'avancement temporelle impose un pas de temps maximum, qui dépend de $[K]$ et de $[C]$ c'est-à-dire du comportement du système et en particulier de la taille géométrique des éléments du maillage. En général ce pas de temps critique est petit voir très petit dans le cas de maillage très fin, ce qui induit un grand nombre de pas de calcul pour obtenir le résultat final. Par contre un avantage est que seule la matrice $[C]$ est à inversée, contrairement aux autres méthodes d'avancement temporelle comme nous le verrons par la suite, ce qui induit des temps de calculs pour un pas, beaucoup plus avantageux. Enfin pour chaque pas de calcul, il est nécessaire d'effectuer un seul calcul contrairement aux autres méthodes qui nécessitent en général plusieurs itérations. Là aussi le gain de temps est appréciable.

Selon certain auteurs (cf.[?]) il est préférable d'étudier les valeurs propres l_i du produit $[C]^{-1}[K]$. En appelant λ_i les valeurs propres de $[A]$ on a : $l_i = 1 - \Delta t \lambda_i$ d'où la condition sur Δt en supposant $[C]$ et $[K]$ définies positives, c'est-à-dire l_i positives, à partir de la condition de stabilité $\max |\lambda_i| \leq 0$

$$-1 \leq 1 - \Delta t l_{i \max} \text{ ou encore } \Delta t \leq \frac{2}{l_{i \max}}$$

Pour éviter les oscillations des résultats, il faut que λ_{max} soit positif ce qui évite les oscillations de $[A]^n$ c'est-à-dire finalement :

$$\Delta t \leq \frac{1}{l_{i \max}} = \Delta t_{critique}$$

On aura l'occasion de revenir sur cette limitation imposée par le temps critique, cependant il faut déjà noter que cette limite supérieure constitue une condition nécessaire pour que le calcul soit stable c'est-à-dire qu'il ne diverge pas à mesure que n augmente. Par contre, cela ne constitue pas une condition suffisante pour que les résultats soient précis. Une première méthode empirique pour vérifier la convergence de la solution vers la solution exacte est de diminuer le pas de temps et de vérifier que la solution se stabilise. Une solution plus précise est de mettre en place un estimateur d'erreur lié à la troncature de la solution permettant le calcul de la dérivée temporelle des ddl à l'aide de la formule (104). On étudiera plus en détail cet aspect par la suite du cours.

11.2 Méthode implicite d'Euler

On repart de l'équation (104) avec ici $\alpha = 0$.

$$ddl(t + \Delta t) = \frac{ddl(t + \Delta t) - ddl(t)}{\Delta t} \quad (107)$$

Dans le cas de la méthode explicite, nous avons utilisé l'équation (103) à l'instant initial c'est-à-dire pour t. Dans le cas de la méthode implicite, la dérivée temporelle des degrés de libertés est donnée pour $t + \Delta t$ et nous utilisons l'équation (103) à l'instant final.

$$[C] \left(\frac{ddl(t + \Delta t) - (ddl(t))}{\Delta t} \right) + [K] (ddl(t + \Delta t)) - (SM(t + \Delta t)) = (0)$$

ou encore

$$\left(\frac{ddl(t + \Delta t) - ddl(t)}{\Delta t}\right) + [C]^{-1}[K](ddl(t + \Delta t)) - [C]^{-1}(SM(t + \Delta t)) = (0)$$

d'où

$$\begin{aligned} ddl(t + \Delta t) &= ([Id] + \Delta t[C]^{-1}[K])^{-1}ddl(t) + \Delta t([Id] + \Delta t[C]^{-1}[K])^{-1}[C]^{-1}(SM(t)) \\ &= ([Id] + \Delta t[C]^{-1}[K])^{-1}ddl(t) + \Delta t([C] + \Delta t[K])^{-1}(SM(t)) \end{aligned} \quad (108)$$

Pour une raison stabilité identique au cas de la méthode explicite, il est nécessaire que le rayon spectral de la matrice $([Id] + \Delta t[C]^{-1}[K])^{-1}$ soit inférieur ou égal à 1 c'est-à-dire que celui de la matrice $[Id] + \Delta t[C]^{-1}[K]$ soit supérieur ou égal à 1. Dans le cas où ces deux matrices sont définies positives, ce qui est un cas courant, cette condition est toujours vérifiée. La méthode est ainsi inconditionnellement stable quelque soit le pas de temps. Comme dans le cas de la méthode explicite l'absence de limitation sur le pas de temps ne signifie pas que la méthode soit "inconditionnellement" précise. Il est au contraire évident, qu'un grand pas de temps augmente l'erreur de troncature pour le calcul de la vitesse des degrés de libertés.

Le fait d'utiliser un pas de temps supérieur au pas critique conduit à filtrer les modes de hautes fréquences. En effet, un système discrétisé qui comporte n degrés de liberté, aura donc n mode propres. La solution d'un problème transitoire est une combinaison de ces modes propres. Le pas de temps critique correspond à la demi période de vibration du plus petit élément, il est donc directement relié au mode de fréquence la plus haute. Le pas de temps que l'on utilise pour le calcul peut ainsi être vu comme un pas d'échantillonnage du résultat. Il est clair que l'on ne peut espérer "voir" des fréquences qui si leur période sont au minimum de l'ordre de 2 à 5 fois le pas de temps d'échantillonnage. Ainsi, le pas de temps en implicite apparaît comme paramètre qui contrôle de manière induite un filtrage passe bas de la solution discrétisé, elle-même une solution tronquée de la solution réelle qui rappelons le comporte une infinité de mode propres.

Dans le cas d'un problème non linéaire, si l'on considère une résolution par la méthode de Newton, on obtient une résolution itérative, pour laquelle chaque résolution se présente sous la forme de l'équation (103). On se référera aux chapitres (22) pour la description de la méthode de Newton dans le cas général, et au chapitre (12.2) pour le cas particulier d'un système du second ordre, dans lequel on montre comment les matrices [K] et [C] sont obtenues (équation 112). Un raisonnement identique peut s'appliquer au cas des équations du premier ordre. A priori, dans le cas général non linéaire, les matrices obtenues ne sont pas constantes, elles dépendent des inconnues.

Ainsi, dans le cas d'un problème non linéaire, à chaque pas de temps il est nécessaire d'itérer jusqu'à ce que le résidu soit suffisamment faible pour être acceptable (méthode de Newton). On voit donc que la méthode implicite (qui nécessite la construction de la matrice [K] et éventuellement de la matrice [C]) n'est avantageuse que si l'on utilise des pas de temps nettement plus important que le pas critique, c'est-à-dire que l'on est intéressé principalement que par les faibles ou moyennes fréquences. Dans le cas contraire, cette méthode peut entraîner un coût de calcul important, comparativement à une méthode explicite, pour laquelle la matrice [C] est simple à calculer (cas par exemple d'un amortissement constant).

11.3 Méthode semi-implicite d'Euler

Dans le cas de la méthode explicite, nous utilisons l'équation (103) au temps initial au contraire de la méthode implicite qui utilise l'équation (103) au temps final. En fait on peut généraliser le schéma en utilisant l'équation (103) à des temps intermédiaires $\tau = t + \alpha\Delta t$. Dans ce cas, on montre que les méthodes obtenues sont inconditionnellement stables pour $\alpha \geq 0.5$. Cette valeur limite $\alpha = 0.5$ correspond à l'algorithme de Crank Nickolson, qui présente l'avantage d'une erreur de troncature en $0(\Delta t)^2$ contrairement aux autres méthodes qui sont en $0(\Delta t)$. C'est donc une méthode plus précise. A part cette particularité, les méthodes semi-implicites présentent les mêmes types de fonctionnements que la méthode purement implicite.

12 Phénomène du second ordre

Il s'agit essentiellement des phénomènes mécanique dynamique.

12.1 Introduction

La dynamique forme une part importante des domaines couverts par la mécanique. On s'intéresse ici à la mécanique du solide déformable modélisée par éléments finis, bien que les méthodes présentées peuvent également être utilisées en mécanique des fluides. Comme dans le cas des équations du premier ordre, la logique habituelle s'appuie sur une discrétisation distincte espace-temps : spatial avec des fonctions de formes permettant de représenter à un instant donné l'ensemble de la géométrie ; temporel avec un algorithme qui permet le calcul pas à pas de l'évolution de la structure. Dans le cas 1D linéaire, la solution exacte peut effectivement s'écrire sous forme du produit de la solution spatiale et de la solution temporelle.

La discrétisation temporelle pas à pas permet de limiter le nombre d'inconnues à gérer au même moment c'est-à-dire le nombre de configuration ou le nombre de pas de temps. Il faut distinguer les méthodes multi-pas et les méthodes à un pas. On se référera à Chung-Lee ([Chung and Lee, 1994]) pour une bibliographie exhaustive sur le sujet. Pour notre part nous retiendrons les méthodes à un pas. Différents travaux montrent en effet qu'actuellement ces méthodes restent les moins coûteuses à précision égale.

D'une manière analogue au cas du premier ordre, deux groupes de méthodes distinctes sont envisageables : explicites, implicites ou semi-implicites, ces dernières entraînant également les mêmes niveaux de difficultés que les méthodes purement implicites. On les regroupera donc dans cette dernière catégorie.

On retrouve les mêmes caractéristiques que dans le cas des systèmes du premier ordre. Les méthodes explicites présentent l'avantage de conduire à des calculs simples, en particulier il n'est pas nécessaire de construire la matrice de raideur du système (à chaque pas de temps), ce qui permet une économie de calcul substantielle. En revanche les méthodes sont conditionnellement stables, i.e. le pas de temps de la discrétisation temporelle est majoré par la plus petite période du système (spatialement discrétisé), contrairement aux méthodes implicites.

Les algorithmes classiques robustes usuels sont :

- les différences centrées pour les méthodes explicites,
- la méthode de Newmark pour les méthodes implicites.

On trouvera par exemple dans Géradin ([Géradin and Rixen, 1993]) une étude exhaustive de ces méthodes. Dans Hughes and Belytscho ([Hughes, 2000][Belytschko, 1983]) un certain nombres de réflexions concernant l’étude de stabilité, de convergence, des pas de temps optimum . . . Ainsi donc, seul les grandes lignes des méthodes sont rappelées dans ce document.

L’utilisation d’un algorithme numérique temporel entraîne l’apparition de hautes fréquences numériques. Ces fréquences sont indépendantes de la réalité physique ce qui peut entraîner des difficultés d’interprétation des résultats. Aussi un certain nombres de travaux ont été effectu es pour modifier les algorithmes traditionnels de manière à obtenir une filtration automatique de ces hautes fréquences. Par exemple deux des méthodes les plus classiques sont la méthode HHT développée dans les années 70 pour la méthode implicite de Newmark et la méthode du Bulk Viscosity pour la méthode des différences centrées.

Ces dernières années plusieurs nouvelles méthodes explicites sont apparues ([Chung and Lee, 1994] [ZHAI, 1996] [?]). Ces méthodes sont en fait des déclinaisons de la méthode des différences finis centr es. Nous nous servons de l’étude du modèle de Tchamwa pour présenter les notions de précision et de stabilité de convergence en s’appuyant principalement sur les travaux de thèse d’Anthony Soive. Ces notions de précision et de stabilité sont fondamentales pour les algorithmes temporels appliqu es à la dynamique.

12.2 Présentation des différents algorithmes

Nous utilisons la forme faible variationnelle des équations d’équilibres locales représentée par le principe des puissances virtuelles :

$$\int_{\mathcal{D}} \rho \vec{\gamma} \cdot \vec{V} \, dv = \int_{\mathcal{D}} \vec{F} \cdot \vec{V} \, dv - \int_{\mathcal{D}} \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} \, dv + \int_{\partial\mathcal{D}} \vec{T} \cdot \vec{V} \, ds \quad (109)$$

Dans le cas simple d’un comportement matériel linéaire en petite transformation, la forme discrétisée de la forme variationnelle s’exprime sous une forme matricielle classique.

$$\dot{q}^{*T} ([M]\ddot{q} + [C]\dot{q} + [K]q - (SM)) = 0 \quad (110)$$

Avec $[M]$ la matrice de masse, $[C]$ la matrice d’amortissement, $[K]$ la matrice de raideur, (SM) le vecteur des efforts externes, q les degrés de libertés du système, \dot{q} les degrés de liberté des vitesses virtuelles.

L’équation devant être satisfaite quelque soit la valeur des vitesses virtuelles, cela conduit à un système d’équations.

$$[M]\ddot{q} + [C]\dot{q} + [K]q = (SM) \quad (111)$$

On voit donc apparaître dans cette équation, des dérivées temporelles du premier et du second ordre. Ce sont ces grandeurs qui sont discrétisées par les différents schémas numériques expos es ci-dessous.

Dans le cas d’un comportement non linéaire, la puissance interne n’est plus repr esent e sous forme de produit de matrice avec les degrés de liberté. Dans le cas de méthodes explicites, cela ne change pas les différentes expressions obtenues si l’on prend soin de remplacer les grandeurs $[C]\dot{q} + [K]q$ par $\mathcal{R}_{int}(q, \dot{q})$, ce dernier terme représentant de manière globale la partie puissance interne du vecteur

résidu. D'une manière équivalente on notera (SM) ou $\mathcal{R}_{ext}(q, \dot{q})$ la partie puissance externe du vecteur résidu.

Dans le cas des méthodes implicites, où un schéma de type Newton-Raphson est retenue pour la résolution non-linéaire, on peut considérer que l'équation (110) constitue le système linéaire à résoudre à chaque itération en notant :

$$[C] = \left[\frac{\partial \mathcal{R}(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}} \right] \text{ et } [K] = \left[\frac{\partial \mathcal{R}(q, \dot{q})}{\partial q} \right] \quad (112)$$

avec

$$0 = -\mathcal{R}_{ext} + \mathcal{R}_{int} + [M]\ddot{q} = \mathcal{R} + [M]\ddot{q} \quad (113)$$

c'est-à-dire le résidu d'équilibre.

Les discrétisations temporelles s'appuient sur un découpage du temps en incrément Δt que l'on considèrera ici égaux par simplicité. On note n l'indice des valeurs calculées au temps $t = n\Delta t$.

12.3 Différences centrées

Les différences finis centrés, constituent la méthode d'avancement temporel explicite la plus classique.

La discrétisation temporelle est réalisée par différences finis centrés.

$$\vec{V}_{n-\frac{\Delta t}{2}} = \frac{(\vec{X}_n - \vec{X}_{n-1})}{\Delta t} \text{ et } \vec{V}_{n+\frac{\Delta t}{2}} = \frac{(\vec{X}_{n+1} - \vec{X}_n)}{\Delta t} \quad (114)$$

L'accélération s'en déduit.

$$\vec{\gamma}_n = \frac{(\vec{V}_{n+\frac{\Delta t}{2}} - \vec{V}_{n-\frac{\Delta t}{2}})}{\Delta t} = \frac{(\vec{X}_{n+1} - 2\vec{X}_n + \vec{X}_{n-1})}{(\Delta t)^2} \quad (115)$$

Concernant la vitesse, elle peut également être calculée à t par une méthode centrée.

$$\vec{V}_n = \frac{(\vec{X}_{n+1} - \vec{X}_{n-1})}{2\Delta t} \quad (116)$$

Les discrétisations (115, 116) s'étendent naturellement aux degrés de libertés. Prenons par exemple une interpolation classique :

$$\vec{X} = X^{ar} \varphi_r \vec{I}_a \quad (117)$$

Les fonctions d'interpolation et les vecteurs de la base absolu ne dépendent pas du temps aussi en notant q le vecteur des degrés de liberté (X^{ar}) on obtient par différences finis des équations équivalentes à (115) et (116).

$$\ddot{q}_n = \frac{q_{n+1} - 2q_n + q_{n-1}}{(\Delta t)^2} \quad (118)$$

$$\dot{q}_n = \frac{q_{n+1} - q_{n-1}}{2\Delta t} \quad (119)$$

Les discrétisations précédentes sont introduites dans la forme matricielle (111). On obtient :

$$[M] \left(\frac{q_{n+1} - 2q_n + q_{n-1}}{(\Delta t)^2} \right) + [C] \left(\frac{q_{n+1} - q_{n-1}}{2\Delta t} \right) + [K]q_n = (SM) \quad (120)$$

ou encore :

$$\left([M] + \frac{\Delta t}{2}[C]\right) q_{n+1} = \Delta t \left(\Delta t ((SM) - [K]q_n) + \frac{[C]q_{n-1}}{2} \right) + [M] (2q_n - q_{n-1}) \quad (121)$$

Cette expression montre qu'il est nécessaire d'inverser la matrice $([M] + \frac{\Delta t}{2}[C])$ pour obtenir la nouvelle position q_{n+1} . Ce calcul est très rapide à effectuer dans deux cas, lorsque les matrices $[M]$ et $[C]$ sont constantes ou lorsqu'elles sont diagonales. Dans le premier cas par exemple en utilisant une méthode de triangulation, celle-ci peut-être réalisée une seule fois en début de programme. Dans le second cas la rapidité est évidente. A priori la matrice de masse est naturellement constante. En revanche la matrice d'amortissement n'est constante que dans des cas très particuliers. Ceci arrive lors de l'emploi d'un amortissement "numérique" c'est-à-dire par exemple lorsqu'on emploie un amortissement artificiel pour stabiliser la réponse ou encore lors de comportement matériel très simple linéaire. Dans le cas général de comportement matériel visqueux, il n'y a aucune raison que cela conduise "naturellement" à une forme diagonale ou constante de la matrice d'amortissement. L'emploi de la formule d'Euler décentrée à droite entre les instants $t - \Delta t$ et t pour le calcul de la vitesse est alors souvent retenue pour optimiser le temps de résolution du système.

$$\vec{V}_n = \frac{(\vec{X}_n - \vec{X}_{n-1})}{\Delta t} \quad (122)$$

Ou encore pour les degrés de liberté :

$$\dot{q}_n = \frac{q_n - q_{n-1}}{\Delta t} \quad (123)$$

L'équation (121) devient :

$$\begin{aligned} \left([M] + \frac{\Delta t}{2}[C_2]\right) q_{n+1} &= \Delta t \left(\Delta t ((SM) - [K]q_n) + [C_1]\dot{q}_n + \frac{[C_2]q_{n-1}}{2} \right) \\ &+ [M] (2q_n - q_{n-1}) \end{aligned} \quad (124)$$

Avec $[C_1]$ la matrice d'amortissement matériel et $[C_2]$ la matrice d'amortissement numérique.

12.4 Newmark

La méthode de Newmark considère la discrétisation suivante pour les vitesses et pour les positions.

$$\dot{q}_{n+1} = \dot{q}_n + \Delta t ((1 - \gamma)\ddot{q}_n + \gamma\ddot{q}_{n+1}) \quad (125)$$

$$q_{n+1} = q_n + \Delta t \dot{q}_n + \frac{\Delta t^2}{2} ((1 - 2\beta)\ddot{q}_n + 2\beta\ddot{q}_{n+1}) \quad (126)$$

Le comportement obtenu est ainsi dépendant des deux paramètres γ et β . L'étude de l'algorithme de Newmark : stabilité, précision ..., est classique. Les valeurs classiques retenues pour les deux paramètres sont 0.5 et 0.5 ce qui conduit à un algorithme inconditionnellement stable et une précision du second ordre sur la fréquence. Le cas $\gamma = \frac{1}{12}$ et $\beta = 0.5$ conduit à une stabilité conditionnelle de l'ordre de celle nécessaire avec la méthode des différences centrées, mais à une précision du troisième ordre ce qui constitue la précision maximale que l'on peut espérer avec la méthode de Newmark.

12.5 Tchamwa

L'algorithme proposé par Tchamwa et Wielgoz est donné par les expressions suivantes :

$$[M]\ddot{q}_{n+1} + \mathcal{R}_{int}(q_{n+1}, \dot{q}_{n+1}) = \mathcal{R}_{ext}(q_{n+1}, \dot{q}_{n+1}) \quad (127)$$

$$\dot{q}_{n+1} = \dot{q}_n + \lambda \Delta t \ddot{q}_n \quad (128)$$

$$q_{n+1} = q_n + \alpha \Delta t \dot{q}_n + \beta \Delta t^2 \ddot{q}_n + \gamma \Delta t \dot{q}_{n+1} \quad (129)$$

L'analyse de la consistance de l'algorithme (cf. suite du document) montre que la précision est du premier ordre lorsque $\alpha - \gamma = 1$ et que $\Phi = (\gamma\lambda + \beta) \neq 1$. Cette précision sera du second ordre lorsque $\Phi = 1$.

L'étude de l'influence des paramètres sur la convergence du schéma numérique donne (cf. partie 12.6) :

$$\Phi > 1, \quad \alpha = 0.5, \quad \gamma = 0.5, \quad \lambda = 1., \quad \beta = \Phi - \gamma\lambda \quad (130)$$

Le seul paramètre libre est alors Φ et l'algorithme (129) devient :

$$\begin{aligned} [M]\ddot{q}_{n+1} + \mathcal{R}_{int}(q_{n+1}, \dot{q}_{n+1}) &= \mathcal{R}_{ext}(q_{n+1}, \dot{q}_{n+1}) \\ \dot{q}_{n+1} &= \dot{q}_n + \Delta t \ddot{q}_n \\ q_{n+1} &= q_n + 0.5 \Delta t \dot{q}_n + (\Phi - 0.5) \Delta t^2 \ddot{q}_n + 0.5 \Delta t \dot{q}_{n+1} \end{aligned} \quad (131)$$

soit encore

$$\begin{aligned} [M]\ddot{q}_{n+1} + \mathcal{R}_{int}(q_{n+1}, \dot{q}_{n+1}) &= \mathcal{R}_{ext}(q_{n+1}, \dot{q}_{n+1}) \\ \dot{q}_{n+1} &= \dot{q}_n + \Delta t \ddot{q}_n \\ q_{n+1} &= q_n + \Delta t \dot{q}_n + \Phi \Delta t^2 \ddot{q}_n \end{aligned} \quad (132)$$

La figure (1) montre l'évolution de l'amortissement en fonction du paramètre Φ . La simulation concerne une poutre en traction-compression soumise à une vitesse initiale à une extrémité, tandis que l'autre extrémité est maintenue fixe. La géométrie et les conditions d'essai sont les suivantes : longueur = 200 mm, section = 4 mm², vitesse initiale à l'extrémité libre = 1000 mms, masse volumique = 8.10⁻⁹, le maillage est constituée d'une seule bielle à 2 noeuds avec interpolation linéaire. largeur, hauteur, nom (et label), échelle, légende

Dans ce cas d'interpolation, la fréquence maxi que peut représenter le système est également la seule existante. Sachant que l'objectif de l'atténuation est de minimiser l'importance des hautes fréquences, on doit retrouver directement ici cette atténuation. Celle-ci est bien réelle, cependant il est nécessaire d'utiliser une valeur importante de Φ pour obtenir une atténuation appréciable.

12.6 Convergence des différents schémas numériques

Un schéma numérique est dit convergent s'il est à la fois consistant et stable. Ces deux notions apparaissent ici comme une extension de la présentation faite dans le cas des systèmes du premier ordre. En particulier on retrouve la notion de matrice d'amplification et la condition associée sur son rayon spectrale.

La consistance permet, dans certains cas, de contraindre les paramètres de contrôle des schémas numériques. La présentation qui suit s'appuie sur les travaux de thèse d'Anthony Soive.

Clamped beam with initial velocity on free edge

Tchamwa $\phi = 1.01, 1.1, 1.3, 3.$

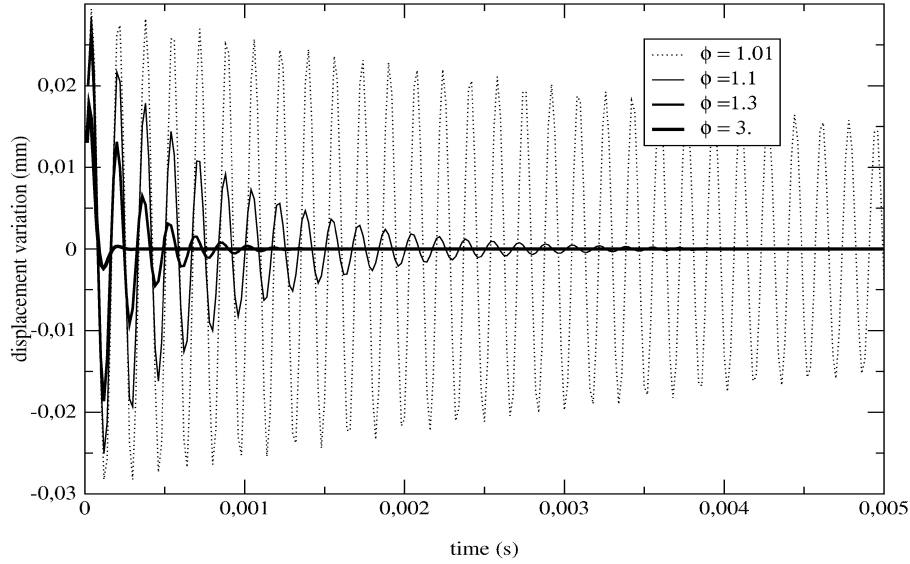


FIGURE 1 – Réponse de 0 à 4.10^{-3} d'une poutre en traction compression, soumise à un échelon de vitesse, discrétisée en 1 élément : influence du paramètre Φ

12.6.1 Consistance

Si l'on écrit un schéma numérique de la forme :

$$M\ddot{q}_{n+1} + \mathcal{R}_{int}(\dot{q}_{n+1}, q_{n+1}) = \mathcal{R}_{ext}(\dot{q}_{n+1}, q_{n+1})$$

$$\dot{q}_{n+1} = f(\dot{q}_n, \ddot{q}_n, \ddot{q}_{n+1})$$

$$q_{n+1} = f(q_n, \dot{q}_n, \dot{q}_{n+1}, \ddot{q}_n, \ddot{q}_{n+1})$$

et si l'on note $u_n^T = [\dot{q}_n, q_n]$, on peut étudier la consistance du schéma de la façon suivante :

On dit qu'un schéma d'intégration est consistant si

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{u_{n+1} - u_n}{h} = \dot{u}_n$$

ce qui entraîne, pour les différents algorithmes explicites précédemment

— pour la méthode de Newmark ou HHT

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{u_{n+1} - u_n}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \begin{pmatrix} (1 - \gamma)\ddot{q}_n + \gamma\ddot{q}_{n+1} \\ \dot{q}_n + h(\frac{1}{2} - \beta)\ddot{q}_n + h\beta\ddot{q}_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ddot{q}_n \\ \dot{q}_n \end{pmatrix}$$

— pour la méthode de Tchamwa

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{u_{n+1} - u_n}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \begin{pmatrix} \lambda\ddot{q}_n \\ \alpha\dot{q}_n + \gamma\dot{q}_{n+1} + h\beta\ddot{q}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda\ddot{q}_n \\ (\alpha + \gamma)\dot{q}_n \end{pmatrix}$$

Ainsi les méthodes de Newmark et de Hilbert, Hughes et Taylor sont consistantes quelques soient la valeur de leurs paramètres. En revanche, la méthode de Tchamwa l'est si $\lambda = 1$ et si $\alpha + \gamma = 1$. L'algorithme de Tchamwa devient alors :

$$\begin{cases} M\ddot{q}_{n+1} + \mathcal{R}_{int}(\dot{q}_{n+1}, q_{n+1}) = \mathcal{R}_{ext}(\dot{q}_{n+1}, q_{n+1}) \\ \dot{q}_{n+1} = \dot{q}_n + h\ddot{q}_n \\ q_{n+1} = q_n + \alpha h\dot{q}_n + \beta h^2\ddot{q}_n + \gamma h(\dot{q}_n + h\ddot{q}_n) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M\ddot{q}_{n+1} + \mathcal{R}_{int}(\dot{q}_{n+1}, q_{n+1}) = \mathcal{R}_{ext}(\dot{q}_{n+1}, q_{n+1}) \\ \dot{q}_{n+1} = \dot{q}_n + h\ddot{q}_n \\ q_{n+1} = q_n + h\dot{q}_n + (\beta + \gamma)h^2\ddot{q}_n \end{cases}$$

12.6.2 Stabilité de la méthode de Tchamwa

Rappelons les expressions des équations de mouvement dans le cadre de petits déplacements :

$$M\ddot{d} + C\dot{d} + Kd = F$$

d étant le déplacement nodal, M la matrice masse, C la matrice d'amortissement et K la matrice de raideur. L'algorithme de Tchamwa devient, après discrétisation temporelle et en notant $\phi = \beta + \gamma$:

$$\begin{cases} M\ddot{q}_{n+1} + C\dot{q}_{n+1} + Kq_{n+1} = F_{n+1} \\ \dot{q}_{n+1} = \dot{q}_n + h\ddot{q}_n \\ q_{n+1} = q_n + h\dot{q}_n + h^2\phi\ddot{q}_n \end{cases}$$

En supposant un amortissement de type Rayleigh et en faisant la décomposition modale de l'équation d'équilibre, on a :

$$\ddot{q}_{n+1} + 2\xi\omega\dot{q}_{n+1} + \omega^2q_{n+1} = F_{n+1}$$

Le système s'écrit alors

$$\begin{cases} \ddot{q}_{n+1} + 2\xi\omega\dot{q}_{n+1} + \omega^2q_{n+1} = F_{n+1} \\ \dot{q}_{n+1} = \dot{q}_n(1 - 2\xi h\omega) - h\omega^2q_n + hF_n \\ q_{n+1} = \dot{q}_n(h - 2\phi\xi h^2\omega) + q_n(1 - \phi h^2\omega^2) + \phi h^2F_n \end{cases}$$

Si l'on note $u_n = \begin{pmatrix} \dot{q}_n \\ q_n \end{pmatrix}$, A la matrice d'amplification et L_n le vecteur de chargement, on peut écrire

$$u_{n+1} = Au_n + L_n$$

avec

$$A = \begin{pmatrix} 1 - 2\xi h\omega & -h\omega^2 \\ h(1 - 2\phi\xi h\omega) & 1 - \phi h^2\omega^2 \end{pmatrix}$$

D'autre part, la solution exacte peut s'écrire $u(t_{n+1}) = Au(t_n) + L_n + \tau(t_n)$ où $\tau(t_n)$ est l'erreur de troncature locale. En faisant alors la différence entre la solution exacte et la solution discrétisée, on a

$$e(t_{n+1}) = u(t_{n+1}) - u_{n+1} = A(u(t_n) - u_n) + \tau(t_n)$$

soit encore

$$\begin{aligned} e(t_{n+1}) &= Ae(t_n) + \tau(t_n) \\ &= A\{Ae(t_{n-1}) + \tau(t_{n-1})\} + \tau(t_n) \\ &= A^2e(t_{n-1}) + A\tau(t_{n-1}) + \tau(t_n) \\ &= A^{n+1}e(t_0) + \sum_{i=0}^n A^i\tau(t_{n-i}) \end{aligned}$$

En supposant que l'erreur initiale est nulle, on obtient finalement

$$e(t_{n+1}) = \sum_{i=0}^n A^i \tau(t_{n-i}) \quad (133)$$

On dit qu'un schéma numérique est stable s'il existe un pas d'intégration $h_0 > 0$ tel que pour tout $h \in [0, h_0]$, une perturbation finie du vecteur d'état à l'instant t_n n'entraîne qu'une modification non croissante du vecteur d'état $\begin{pmatrix} \dot{q}_{n+j} \\ q_{n+j} \end{pmatrix}$ calculé à un instant ultérieur t_{n+j} .

Il faut alors que le rayon spectral $\rho(A)$, défini par $\rho(A) = \max(\lambda^i)$ où λ^i sont les valeurs propres de A , soit strictement inférieur à 1. Les valeurs propres de A sont $\lambda_{1,2} = A_1 + \sqrt{A_1^2 - A_2}$, avec $A_1 = \frac{1}{2}tr(A)$ et $A_2 = det(A)$.

L'étude de ces valeurs propres permet ainsi de définir une relation entre le temps critique et le paramètre d'amortissement numérique Φ . On obtient finalement :

— Pour $\xi = 0$

Condition sur ϕ	condition de stabilité
$\phi \geq 1$	$\Omega < \sqrt{\frac{2}{\phi - \frac{1}{2}}}$

— Pour $\xi \neq 0$

Conditions sur ϕ		Conditions sur ξ	Stabilité
$\phi = 1 - \frac{2\xi}{\Omega}$		$\forall \xi$	$\Omega < 2$
$\phi > 1 - \frac{2\xi}{\Omega}$	$\phi < \frac{1}{2}$	$\xi \leq \sqrt{1 - 2\phi}$	inconditionnelle
	$\phi > 1$	$\forall \xi$	$\Omega \leq \frac{-\xi + \sqrt{\xi^2 + 2(\phi - \frac{1}{2})}}{\phi - \frac{1}{2}}$
	$\frac{1}{2} \leq \phi \leq 1$	$\forall \xi$	$\Omega \leq \frac{-\xi + \sqrt{\xi^2 + 2(\phi - \frac{1}{2})}}{\phi - \frac{1}{2}}$
		$\xi \leq \sqrt{2(1 - \phi)}$	inconditionnelle
	$\xi > \sqrt{2(1 - \phi)}$	$\frac{\xi + \sqrt{\xi^2 - 2(1 - \phi)}}{1 - \phi} \leq \Omega \leq \frac{\xi - \sqrt{\xi^2 - 2(1 - \phi)}}{1 - \phi}$	

Remarque Dans le cas où $\Phi = 1$ on retrouve la méthode classique des différences finies centrées. On observe que de tous les méthodes c'est la méthode des différences finies centrées qui permet d'avoir un pas de temps critique maximal.

12.7 Amortissement artificiel

Nous avons vu qu'il pouvait exister une matrice $[C]$ d'amortissement visqueuse, c'est-à-dire dont l'influence est liée à la vitesse (cf. 12.2, 112).

Nous avons également introduit la notion d'amortissement matériel et d'amortissement numérique (cf.124), le premier amortissement étant d'origine physique, le second étant en fait une introduction artificielle. L'introduction de cet amortissement numérique a pour objectif soit de représenter globalement le comportement visqueux de la structure au travers d'un comportement analogique global simple, soit d'influencer la période transitoire du phénomène par exemple pour la réduire au minimum. Dans les deux cas la modification introduite doit rester simple.

L'amortissement de Rayleigh constitue un modèle classique. L'idée consiste à définir la matrice d'amortissement sous la forme d'une combinaison linéaire de la matrice masse et de la matrice de raideur.

$$[C] = \eta(\alpha_M[M] + \alpha_K[K]) \quad (134)$$

η constitue le paramètre de viscosité artificielle, et les paramètres α_M et α_K représentent la répartition entre masse et raideur de l'amortissement. Dans le cas d'une formulation explicite, l'objectif est d'éviter de construire explicitement la matrice de raideur. Dans ce cas une solution est d'utiliser un coefficient $\alpha_K = 0.$ et $\alpha_M = 1.$

Dans le cas des différences finis centrée, l'utilisation de la viscosité artificielle est présentée dans la relation (124), la matrice résultante étant notée $[C_2]$. On remarque que son introduction conduit à modifier la matrice à inverser et le second membre. Par contre en retenant $\alpha_K = 0.$, les matrices masse et amortissement étant du même type, aucune difficulté supplémentaires dans la résolution du système n'est introduite.

$$\begin{aligned} \left(1 + \eta \frac{\Delta t}{2}\right) [M](q_{n+1}) &= \Delta t \left(\Delta t ((SM) - [K]q_n) + [C_1]\dot{q}_n + \eta \frac{[M]q_{n-1}}{2} \right) \\ &+ [M] (2q_n - q_{n-1}) \end{aligned} \quad (135)$$

12.7.1 Amortissement critique

Il peut être intéressant d'utiliser une portion de l'amortissement critique qui correspond à l'amortissement maximum sans oscillation. Dans le cas d'un oscillateur masse-ressort à un ddl l'amortissement critique est $C = 2 \sqrt{k m}$, k étant la raideur du ressort et m étant la masse du ressort.

Dans un calcul explicite, on peut se servir d'une approximation de type quotient de Rayleigh (136) pour obtenir une approximation de la plus petite valeur propre du système :

$$[C] = c [M] \text{ avec } c = 2 \sqrt{\lambda_0} \text{ et } \lambda_0 = \frac{\langle \dot{q} \rangle [K](\dot{q})}{\langle \dot{q} \rangle [M](\dot{q})} \quad (136)$$

Les forces d'origines visqueuses numérique sont alors :

$$F_{visqueux} = - C \dot{q} \quad (137)$$

12.7.2 Bulk viscosity

La méthode du bulk viscosity est une méthode classique qui permet de filtrer automatiquement une partie des hautes fréquences numériques introduites par le schéma numérique d'avancement temporel : par exemple classiquement avec les différences finis centrées. La méthode consiste à introduire un terme de pression hydrostatique P tel que : $P = \rho l(C_1 l I_D^2 - C_2 c I_D)$ si la trace est négative, 0 sinon.

La contrainte finale vaut donc :

$$\sigma_{finale} = \sigma - P \mathbf{I} = \sigma - \rho l(C_1 l I_D^2 - C_2 c I_D) \mathbf{I} \quad (138)$$

Le bulk est implanté dans de très nombreux logiciels, pour tous les éléments, indépendamment de la loi utilisée. Par contre au niveau de la sortie des résultats, la part de contrainte relative au Bulk est en général retiré. Ainsi seules les contraintes réelles sont affichées.

Dans le cas d'un choc (ou d'une onde de choc), le coefficient C_1 de la partie quadratique en vitesse de déformation, est sensé contrôler ce qui se passe avant le pic du choc, alors que le coefficient C_2 de la partie linéaire est sensé contrôler ce qui se passe après le passage du pic. Dans le cas du filtrage des hautes fréquences, c'est surtout le paramètre linéaire qui est donc prépondérant.

12.8 Algorithme de Relaxation dynamique

12.8.1 Introduction

L'objectif est de calculer la forme stable d'une structure, donc indépendante de la vitesse et de l'accélération, à l'aide d'un algorithme dynamique de préférence explicite. L'intérêt est de profiter de la robustesse de cet algorithme qui permet de décrire l'évolution du comportement temporel de la structure, indépendamment des instabilités de structure. Cependant, l'idée est de parcourir le plus rapidement possible l'évolution transitoire.

Il est alors possible d'introduire de la relaxation dans un calcul dynamique, avec pour objectif d'obtenir la solution figée (c'est-à-dire celle correspondante au calcul statique). Il est à noter que cette technique n'est a priori valide que pour un comportement global indépendant du chemin (dans l'espace des déformations) effectué entre la situation initiale et la situation finale, ceci dans le cas où le chemin est conséquent. Ainsi dans ce dernier cas, il faut réserver cette technique aux comportements matériels réversibles.

Cependant, un trajet important peut-être subdivisé en petites parties, et l'algorithme appliqué successivement sur chaque partie. Dans l'hypothèse où les parties de trajet sont suffisamment petites, il est alors possible d'utiliser un comportement quelconque. La méthode est alors équivalente à une méthode de Newton par exemple, mais avec l'avantage de pouvoir s'appliquer sans l'utilisation de la matrice tangente correspondante à la dérivée du résidu.

Enfin, s'il y a des instabilités géométriques, il faut bien noter que la solution obtenue est une des solutions possibles, pas forcément celle qui est la plus physique, en tout cas rien ne nous permet de l'affirmer.

Il existe principalement deux grandes voies pour atteindre rapidement l'équilibre de la structure : la première utilise la notion d'amortissement critique et constitue la méthode la plus ancienne (cela ne signifie pas qu'elle ne soit pas efficace), la seconde la notion d'amortissement cinétique. Nous allons décrire les principes généraux de ces deux méthodes.

Auparavant signalons qu'une fois l'équilibre obtenu, l'accélération doit-être nulle ainsi que la vitesse. Ainsi la masse et l'amortissement visqueux peuvent être choisis de manière arbitraire, en particulier ces grandeurs peuvent être adaptées pour limiter la phase transitoire.

12.8.2 Amortissement visqueux

L'idée est tout d'abord d'utiliser un amortissement critique. Underwood a montré dans un travail de référence que cet amortissement devait être calculé en fonction de la plus petite fréquence du système et pouvait s'approcher par un quotient de Rayleigh cf. 136.

Il est également important de limiter le pas de temps au pas de temps critique. Deux alternatives existent :

- soit on conserve les masses physiques et on limite le pas de temps via un calcul classique de temps critique (cf. la méthode de différence finie centrée)
- soit on utilise une matrice de masse fictive, adaptée de manière à ce que le pas de temps critique, soit le plus uniforme possible. Dans ce cas, d'une manière arbitraire, on se fixe un pas de temps critique à 1.

L'objectif est ensuite d'utiliser un amortissement qui permet d'atteindre le plus rapidement possible la solution statique. On s'intéresse à l'algorithme proposé par P. Underwood [Underwood, 1983].

Calcul d'une matrice masse fictive La première partie concerne le calcul de la matrice masse. Underwood propose d'utiliser le théorème de Gerschgorin qui permet de trouver une borne supérieure à la valeur propre i de la raideur d'où une matrice masse fictive permettant la stabilité qui se calcule sous la forme :

$$m_{ii} \geq \frac{1}{4}(\Delta t)^2 \sum_j |K_{ij}| \quad (139)$$

avec m_{ii} les composantes diagonales de la matrice masse, K_{ij} les composantes (i,j) de la matrice de raideur.

D'une manière pratique, on retient également le max des 3 composantes en dimension 3 (2 ou 1 en dimension 2 ou 1), ceci pour pallier au fait qu'une des 3 raideurs peut éventuellement être nulle, par exemple dans le cas d'une membrane. Par exemple dans Herezh la relation implantée permettant le calcul des masses fictives m_{ii} , s'écrit sous la forme de :

$$m_{ii} = \frac{\lambda(\Delta t)^2}{2} S_i \text{ avec } S(i) = \text{MAX}_{a=1}^{\text{dim}} \sum_{j=1, b=1}^{\text{dim}} |K(a_i, b_j)| \quad (140)$$

avec "dim" la dimension du problème physique. λ est un paramètre qui doit-être supérieur à 0.5 pour garantir la stabilité du schéma. Underwood propose d'utiliser un temps de 10% supérieur à la limite critique, ce qui revient à prendre une valeur de $\lambda = 0.605 \approx 0.6$

Mise à jour de la matrice masse : D'une manière pratique, si l'on considère le maximum sur les 3 dimensions pour le calcul de la matrice masse (cf. 139) la raideur initiale reste souvent supérieure à la raideur en cours de calcul. Cependant, des non-linéarités de structures (éventuellement de matériau) peuvent faire apparaître un accroissement de la raideur en cours de calcul. Il est alors nécessaire de mettre à jour les masses fictives pour garantir la continuité de la stabilité. Underwood propose d'utiliser un critère qui s'appuie sur "the perturbed apparent frequency error measure" fonctionnant de la manière suivante. On calcule l'erreur ϵ selon :

$$\epsilon = \text{MAX}_{i=1}^{n_{ddl}}(\epsilon_i) \text{ avec } \epsilon_i = \frac{\lambda(\Delta t)^2}{2} \frac{|\Delta \ddot{X}_i|}{|\Delta X_i|} \quad (141)$$

avec $\Delta \ddot{X}_i$ l'accroissement de l'accélération pour le ddl i , lors du précédent incrément de temps, et ΔX_i l'accroissement de la position. Puis on effectue le test $\epsilon > 1$, si oui, il faut soit recalculer la matrice masse ou sinon diminuer le pas de temps c'est-à-dire augmenter le paramètre λ .

Amortissement visqueux L'amortissement visqueux est introduit à l'aide d'une matrice diagonale.

$$[C] = c[M] \text{ avec } c = 2\omega_0 \quad (142)$$

ω_0 est supposé être la fréquence la plus basse du système, approchée à l'aide du quotient de Rayleigh's.

$$\omega_0^2 \approx \frac{\Delta X^T K^n \Delta X}{\Delta X^T M \Delta X} \quad (143)$$

Dans le cas où la matrice K^n n'est pas directement accessible, Underwood propose une seconde approximation dans le cadre d'un algorithme d'avancement de type différences finies :

$$\omega_0^2 \approx \frac{\Delta X^T {}^l K^n \Delta X}{\Delta X^T M \Delta X} \text{ avec } (1) {}^l K_{ii}^n = \frac{\Delta R_{i(statique)}^n}{\Delta t \dot{X}_i^{n-1/2}} \quad (144)$$

La matrice ${}^l K^n$ est ici uniquement diagonale, tous les termes ${}^l K_{ij}^n$ avec i différent de j , sont nulles.

En fait la dérivée numérique peut s'effectuer soit par rapport à l'incrément de ddl (relation (1) de 144) soit par rapport à la vitesse :

$$(2) {}^l K_{ii}^n = \frac{\Delta R_{i(statique)}^n}{\Delta X} \quad (145)$$

Ces deux expressions (1) et (2) conduisent au calcul de la fréquence minimale :

$$\omega_0^2 \approx \frac{\Delta X^T \Delta R_{i(statique)}^n}{\Delta X^T M \Delta X} \text{ ou bien } \omega_0^2 \approx \frac{\dot{X}^T \Delta R_{i(statique)}^n}{\dot{X}^T M \dot{X}} \quad (146)$$

Underwood propose également deux limitations.

- dans le cas où la valeur obtenue pour ω_0^2 est négative, il propose de poser $\omega_0^2 = 0$.
- en supposant que l'on a un pas de temps proche du pas critique mis à 1, cela signifie que la fréquence maxi est proche de 2 ($\Delta t \approx 2/\omega_{max}$). Dans ce cas la fréquence minimale doit également être inférieure à 2. Ainsi si l'on a : $\omega_0^2 > 4$, il y a une incohérence. Underwood propose de limiter ω_0 a une valeur typiquement 1.9

12.8.3 Amortissement cinétique

L'amortissement cinétique consiste à remettre les vitesses à 0, à chaque pic d'énergie cinétique. Dans le cas ou aucune énergie externe n'est fourni, seule reste disponible, l'énergie interne élastique, pour pouvoir évoluer vers la configuration d'équilibre. Lorsqu'il n'y a plus de mouvement, cela signifie que l'équilibre des forces généralisées internes et externes est réalisé : les forces d'accélération sont nulles. Ces forces d'accélération sont fonction de la masse.

Méthode originale de Barnes : Une première méthode a été proposée par Barnes dans le cadre de structures tendues en câbles ou pour des toiles également tendues. Par exemple pour des toiles tendues supposées répondre à un comportement élastique isotrope, Barnes propose d'adopter un découpage en éléments triangulaires et une matrice masse diagonale dont les termes m_i sont :

$$m_i = \lambda \frac{\Delta t^2}{2} k_{imax} \quad (147)$$

avec

$$k_{imax} = \sum_e \frac{ep}{4 S_0^e} \left(\frac{E}{1 - \nu^2} + \sigma_x + \sigma_y + \sigma_{xy} \right) \quad (148)$$

où ep est l'épaisseur de l'élément e , S_0^e la surface initiale de l'élément, σ_x σ_y σ_{xy} sont les composantes du tenseur des contraintes dans un repère orthonormé que l'on suppose lié à l'élément, E et ν sont les coefficients d'une loi élastique isotrope. Le pas de temps est arbitraire, par simplicité il est choisi égal à 1 dans la formule du calcul de la masse. La conséquence est que ce pas de temps n'intervient pas directement au niveau de l'algorithme d'avancement temporel, si ce n'est au niveau du chargement, des conditions limites et du comportement matériel. Dans ce dernier cas on sort du contexte normal de l'utilisation de l'algorithme ! voir les remarques précédentes sur la réversibilité de la loi de comportement.

Extensions de la formule de Barnes : Dans le travail de thèse de Julien Troufflard il est proposé de supprimer le terme de surface ce qui permet d’obtenir une grandeur homogène à une masse. Il montre en particulier que dans ce cas la valeur optimum du coefficient Λ est beaucoup plus stable, ce qui constitue un réel avantage lorsque l’on cherche à définir la valeur de ce paramètre de contrôle.

Dans le travail de thèse de Javier Rodriguez Garcia, il est proposé d’étendre la formulation d’une part à d’autres éléments et d’autre part à d’autres lois de comportement. L’idée est de partir de la formule de Barnes en la généralisant.

Le terme $\frac{E}{1-\nu^2}$ peut-être considéré comme contrôlant le changement de forme ou le changement de volume de l’élément. Il est donc remplacé par une combinaison linéaire du module de compressibilité et du module de cisaillement moyen, disponible pour toutes les lois élastiques et hyper-élastiques : $\alpha K + \beta\mu$. Dans un premier temps on pourra choisir par exemple $\alpha = \beta = 1$ ce qui conduit à une grandeur sensiblement identique à la formule initiale à condition que l’incompressibilité ne soit pas trop importante.

Par exemple si $\nu = 0.3$ on obtient : $\alpha K + \beta\mu \approx 1.21 E$ alors qu’avec la formule de Barnes on a : $E/(1 - \nu) \approx 1.1 E$

Le terme $\sigma_x + \sigma_y + \sigma_{xy}$ peut-être considéré comme représentatif du niveau de contrainte atteint dans le matériau, niveau cumulant les aspects sphérique et déviatorique. Il est donc remplacé par une combinaison d’invariants

$$1/3.(\sigma_I + \sigma_{II} + \sigma_{III}) = \frac{\mathbf{I}_\sigma}{3} \text{ et } 0.5 \sigma_{mises}$$

, avec σ_{Ii} les valeurs propres de $\boldsymbol{\sigma}$, et σ_{mises} la contrainte de mises. A priori on prend la valeur absolue de chaque terme de manière à garantir une masse positive.

Au final on obtient :

$$k_{imax} = \sum_e \frac{ep}{4} \left(\alpha K + \beta\mu + \gamma \frac{\mathbf{I}_\sigma}{3} + \frac{\theta}{2} \sigma_{mises} \right) \quad (149)$$

Les paramètres $\alpha, \beta, \gamma, \theta$ permettent ainsi de contrôler l’influence de chaque entité.

Dans le cas d’un élément 3D, l’épaisseur est remplacée par la longueur caractéristique suivante : $l_{car} = (volume)^{1/3}$. Le reste de la formule est inchangé par commodité.

Différents cas de calcul sont possibles d’une part au niveau du calcul de la masse, et d’autre part au niveau du test de la convergence.

Concernant le calcul de la masse, en prenant en compte tous les éléments “ N ” entourant un noeud, on considère les cas suivant :

1. la formule (149) est cumulé au noeud selon :

$$k_{noeud} = \sum_{ne=1}^N k_{imax}$$

la valeur finale à un noeud dépend donc du nombre d’éléments qui contiennent le noeud.

2. on retient la valeur maximum de (149), calculé pour tous les éléments qui contiennent le noeud :

$$k_{noeud} = Max_N(k_{imax})$$

3. on retient la valeur moyenne de (149), calculé pour tous les éléments qui contiennent le noeud :

$$k_{noeud} = \frac{1}{N} \sum_{ne=1}^N k_{imax}$$

4. idem le cas 3, et de plus on divise par la surface moyenne entourant le noeud, calculé de la manière suivante :

$$k_{noeud} = \sum_{ne=1}^N k_{imax} / \frac{S_{ne}}{nbn_{ne}}$$

où S_{ne} est la surface de l'élément et nbn_{ne} est le nombre de noeuds de l'élément.

Concernant la convergence, deux cas peuvent être envisagés soit séparément soit de manière simultanée :

1. la convergence s'appuie sur le résidu en absolu ou relatif suivant la méthode générale utilisée par exemple pour mesurer la convergence dans un calcul statique.
2. la convergence s'appuie sur le déplacement (ou la vitesse) selon les paramètres de l'algorithme de relaxation cinétique.

Autre méthode générale de relaxation cinétique : Nous avons vu dans le paragraphe précédent que la méthode de Barnes s'appuyait principalement sur un calcul particulier d'une matrice de masse fictive qui tentait de prendre en compte d'une part la loi de comportement et d'autre part l'état de contrainte dans la structure.

Une autre solution plus simple est d'utiliser la méthode introduite par Underwood et présentée précédemment cf. 12.8.2, qui utilise le théorème de Gerschgorin. La seule difficulté est de pouvoir disposer de la matrice de raideur K_{ij} . Mais si cette dernière est calculable, dans ce cas, la méthode (cf. les expressions 140 et 141) permet d'intégrer directement la loi de comportement qui peut être quelconque, et le champ de contrainte.

On obtient alors une méthode très générale, applicable pour tout type d'élément et tout type de loi de comportement.

12.8.4 Remarque générale sur la matrice masse

Il est également tout à fait possible d'utiliser la matrice masse réelle avec amortissement cinétique ou avec l'amortissement visqueux. Par contre dans ce cas, l'amortissement peut ne pas être optimal du par exemple à la non-homogénéité des tailles de maille.

D'une manière pratique, des tests ont montré qu'effectivement la convergence n'est pas optimale, mais cela fonctionne. C'est donc une solution simple alternative qui permet de coupler les algorithmes classiques : DFC par exemple, avec de l'amortissement.

13 Analyse de la propagation d'un signal

13.1 Introduction

L'étude de systèmes mécanique en dynamique rapide révèle de nombreuses surprises, en particulier du au fait que l'observation humaine directe des phénomènes n'est pas suffisante pour capter les détails des réponses. Ceci n'est pas pour faciliter l'interprétation. L'objet de ce document est donc de fournir des compléments d'information pour faciliter la compréhension des résultats.

13.2 Cas de l'oscillation d'un système masse ressort

Le comportement du système masse ressort est représenté par une barre de masse ρ_{barre} et une masse ponctuelle m_{ponct} accrochée à une extrémité, tandis que l'autre extrémité est fixée. Pour que le résultat soit probant, il est nécessaire que la masse de la barre soit faible par rapport à celle de la masse ponctuelle.

On considère une barre constituée d'un seul élément, encastrée à une extrémité et comportant une masse ponctuelle à l'autre extrémité. Initialement, on déplace l'extrémité d'une grandeur donnée (sur l'exemple fourni : 30mm) et la vitesse est nulle. Ensuite le système est laissé libre et on observe les déplacements. Bien comprendre que l'on a une superposition d'un ressort avec une masse répartie et d'une masse ponctuelle. Dans l'exemple, la masse ponctuelle n'est pas soumise à la force de pesanteur. La figure (2) donne un exemple de résultat.

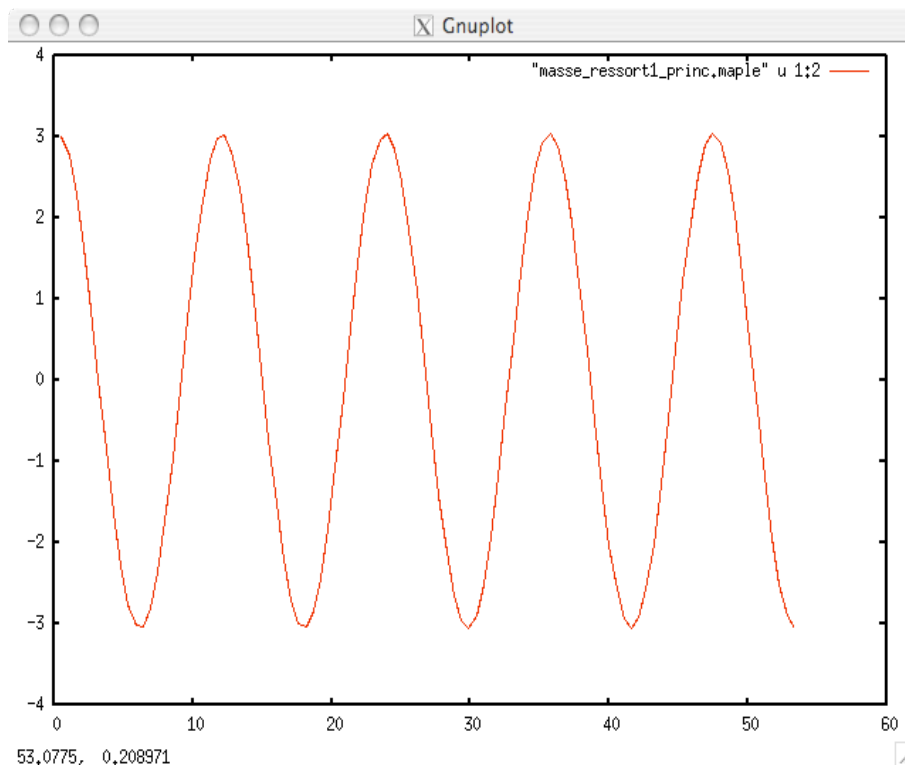


FIGURE 2 – système masse ressort simulé par un élément barre et une masse ponctuelle : déplacement de l'extrémité libre (en y) en fonction du temps (en x), méthode explicite, $\Delta t = 0.2$ pas critique

En utilisant l'algorithme de Newmark avec un pas de temps très grand on observe un résultat qui n'est plus du tout conforme à ce que l'on attend. La figure (3) donne un exemple de résultat avec un pas de temps = 8 fois le pas critique.

13.3 Cas de l'oscillation d'une barre c'est-à-dire un système de masses réparties

On considère maintenant uniquement une barre sans masse ponctuelle. Le fichier barre.info, barre1.her et barre.CVisu donne un exemple de fichiers de commande. La figure (4) montre le comportement de

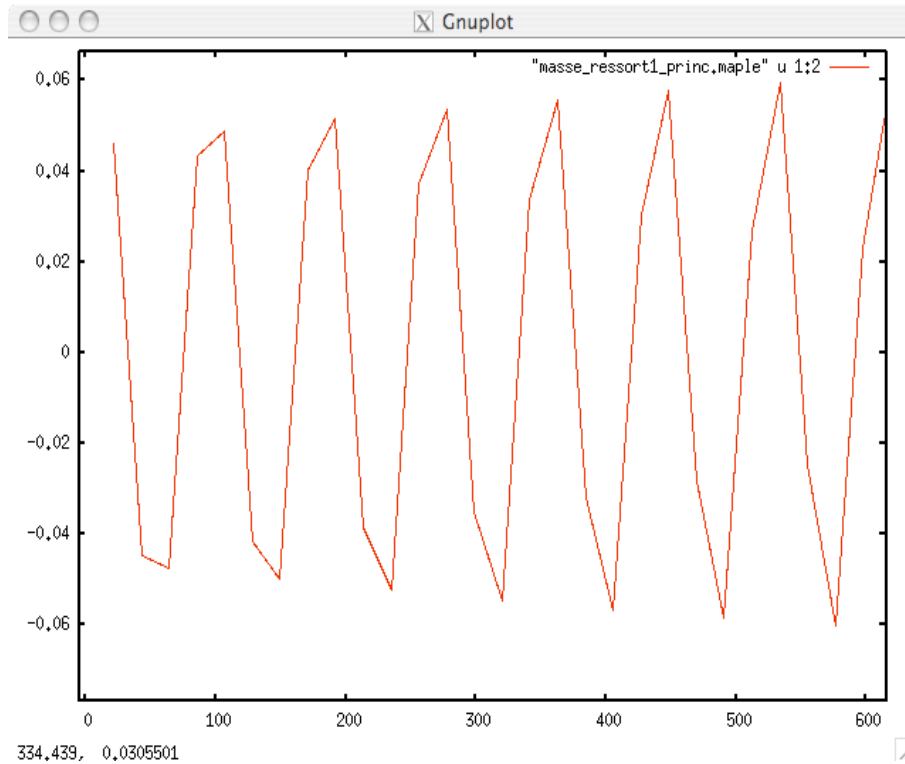


FIGURE 3 – système masse ressort simulé par un élément barre et une masse ponctuelle : déplacement de l'extrémité libre (en y) en fonction du temps (en x), méthode implicite, $\Delta t = 8$ pas critique

l'extrémité de la barre ainsi que d'un point à 10mm et un point à 20mm. Le chargement est constitué par une force de 50N que l'on applique pendant 1s, et ensuite on laisse la barre vibrer.

Considérons la courbe verte correspondant au déplacement d'un point situé à 158mm de l'extrémité. La partie AB correspond au temps que met l'onde à parcourir la distance 0 à 158mm (en première approximation environ 1s pour 158mm). La partie BC correspond au chargement en pression de la barre durant 1,5 secondes puis arrêt du chargement d'où le plateau CD, ensuite à partir de D le point subit le retour de l'onde. Ainsi la partie BD (environ 3.3s) correspondant au temps que met l'onde pour parcourir 2 fois la distance (c'est-à-dire l'aller et le retour) 158mm à 400mm : la longueur de la barre étant 400mm la distance aller-retour à parcourir est donc de 484mm ce qui est bien cohérent avec la vitesse d'onde mesurée de A à B. L'onde en se réfléchissant à 400mm change de sens, elle décharge donc en retour d'où la portion DE. Ensuite au point le point voit l'arrivée de l'onde réfléchi à l'origine. La partie DF doit représenter ainsi le temps pour parcourir deux fois 158mm ce que l'on vérifie, le temps DF étant bien égale à 2 fois le temps AB. Et ainsi de suite.

On voit sur ce petit exemple, la difficulté à interpréter un simple impact dans une barre. Les lignes rouges et bleu représentent la réponse respectivement de l'origine et d'un point à 278mm.

Maintenant, nous allons chercher à se rapprocher qualitativement d'un cas réel. En fait, au cours du temps, il va apparaître une certaine dissipation due par exemple à l'existence d'une partie visqueuse dans le comportement du matériau. Cette dissipation va agir préférentiellement sur les hautes fréquences du signal. La conséquence va être l'atténuation de la partie hautes fréquences de la réponse au profit de la fréquence fondamentale qui est une vibration sinusoidale. Pour simuler qualitativement ce comportement, on peut utiliser un schéma numérique d'avancement temporel légèrement différent de celui des différences finies classiques, par exemple dans Herezh++ on peut utiliser le schéma de

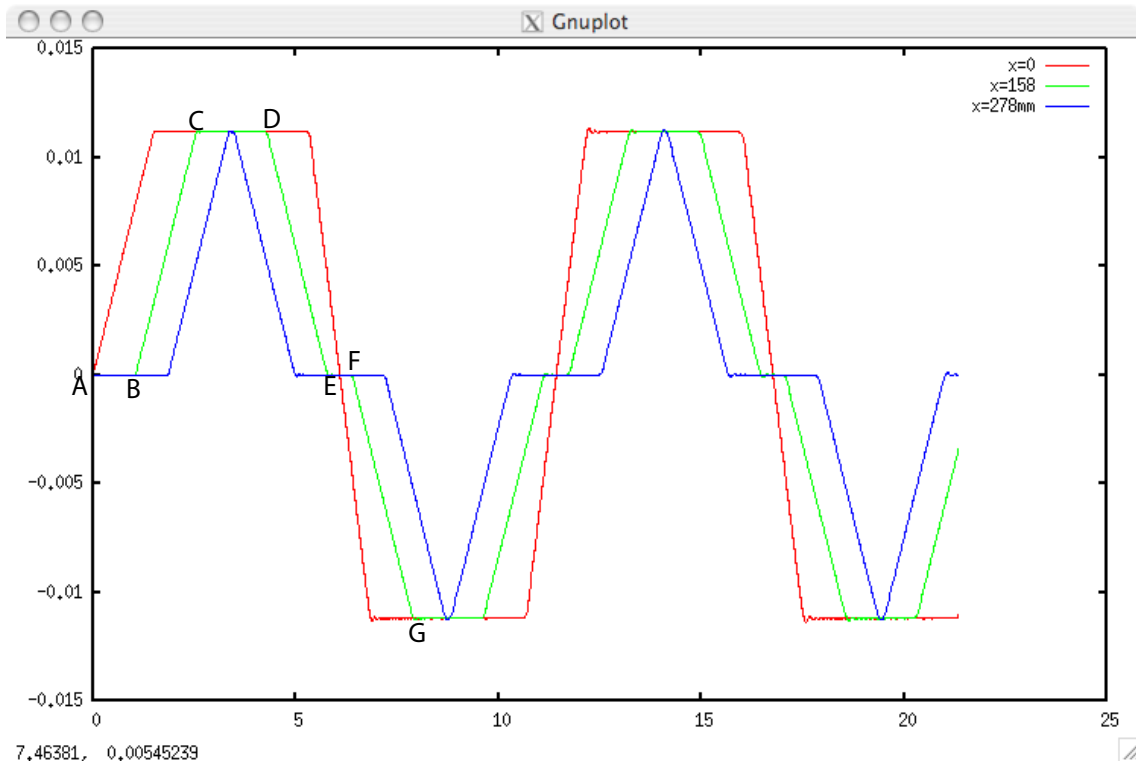


FIGURE 4 – Barre soumise à un créneau de force de 40N sur 1s ($S=4\text{mm}^2$, $L=400$, $E= 2.10^5\text{MPa}$) : déplacement de 3 points (en y) en fonction du temps (en x), méthode explicite, $\Delta t = 0.5$ pas critique

Tchamwa-Vielgozs. La figure (5) montre l'évolution dans le temps des 3 points vu précédemment mais ici pour un temps long d'où un grand nombre d'itération. La barre est ici modélisée par 200 éléments finis.

Les figure (6) et (7) montrent un agrandissement d'une zone pour un temps intermédiaire et pour le temps final.

On remarque que le signal final est sinusoïdal en temps, mais également, au vu des positions des points, sinusoïdal en espace. Ainsi le point à l'origine voit son amplitude rester quasiment constante, alors que les points plus proche de l'encastrement voit naturellement leur amplitude diminuer.

En considérant un forme sinusoïdale de type $U(x) = X_0 \cdot \cos(\Pi/(2L) x)$ on obtient : $X_0 \approx 0.01$, $U_{max}(158) = 0.0081$ et $U_{max}(278) = 0.0046$ alors que sur les graphes on peut relever approximativement respectivement : $U_{max\text{ graphique}}(158) = 0.0082$ et $U_{max\text{ graphique}}(278) = 0.0048$.

En comparant les deux figures (6) et (7) on observe que l'évolution vers la forme sinusoïdale est cependant progressive, cette évolution étant plus longue pour les points proches de l'encastrement.

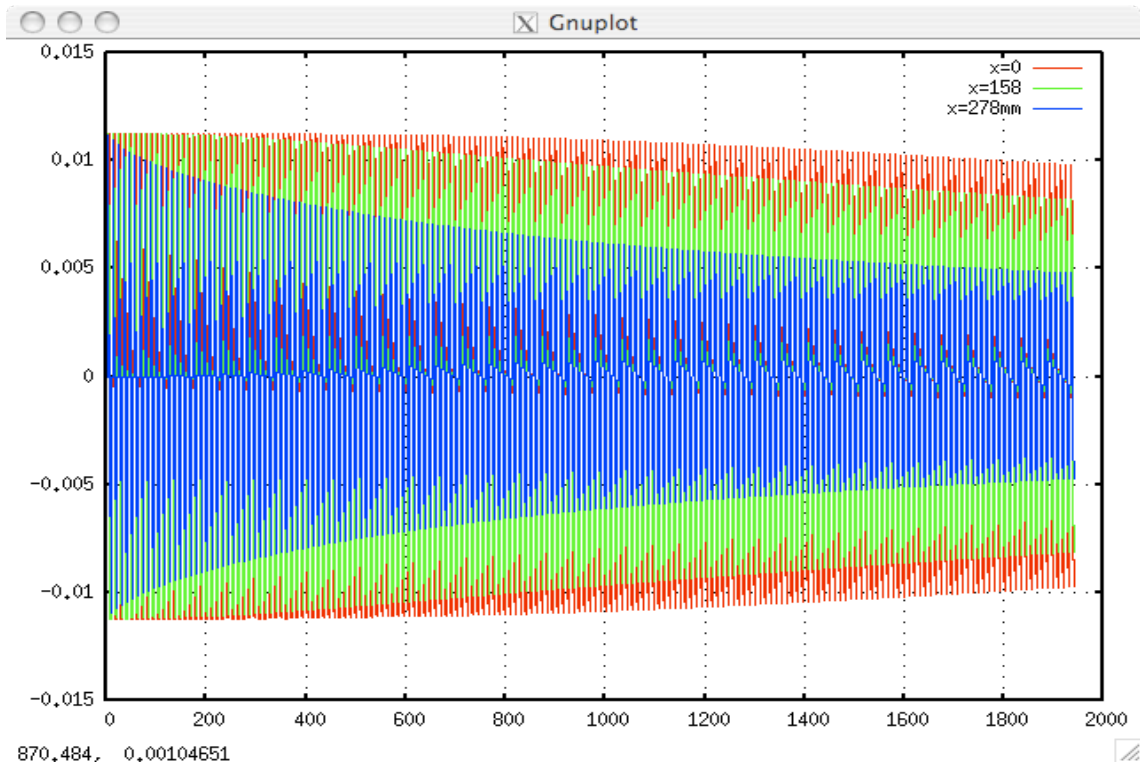


FIGURE 5 – Barre soumise à un créneau de force de 40N sur 1s ($S=4\text{mm}^2$, $L=400$, $E= 2.10^5\text{MPa}$) : déplacement de 3 points (en y) en fonction du temps (en x), méthode explicite de Tchamwa, $\Delta t = 0.8$ pas critique, pour $t=0$ à 1940

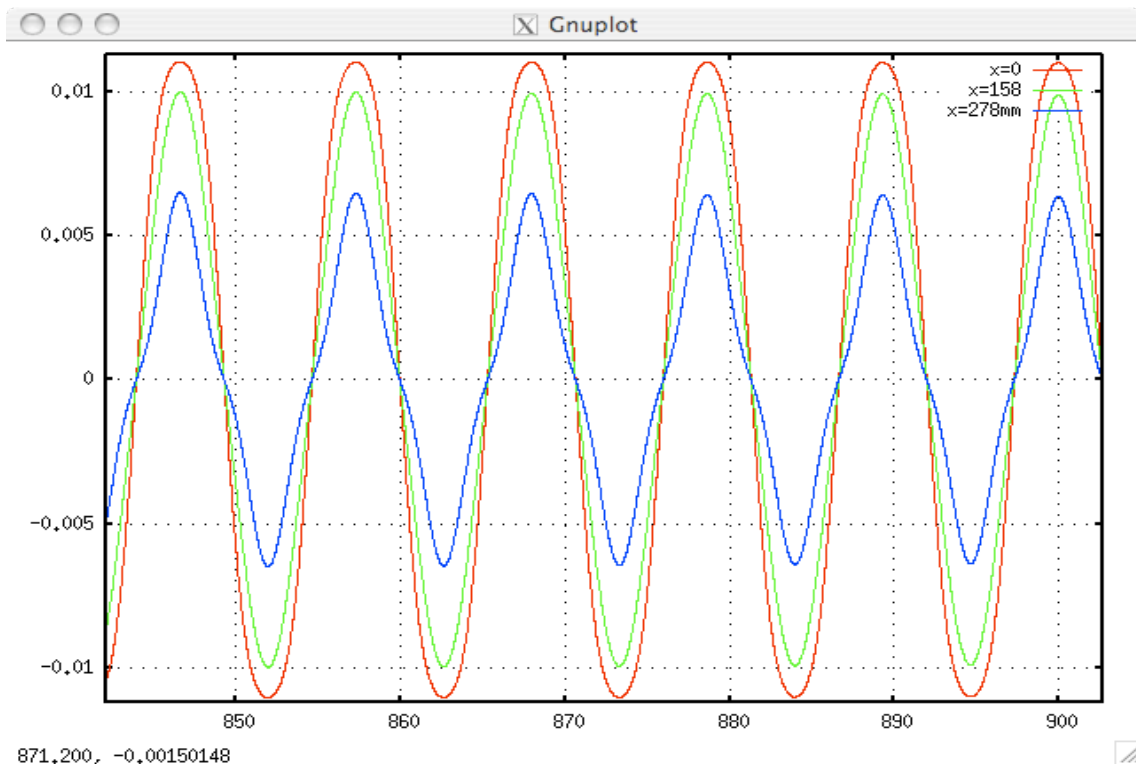


FIGURE 6 – Barre soumise à un créneau de force de 40N sur 1s ($S=4\text{mm}^2$, $L=400$, $E= 2.10^5\text{MPa}$) : déplacement de 3 points (en y) en fonction du temps (en x), méthode explicite de Tchamwa, $\Delta t = 0.8$ pas critique, pour quelques périodes après 900s

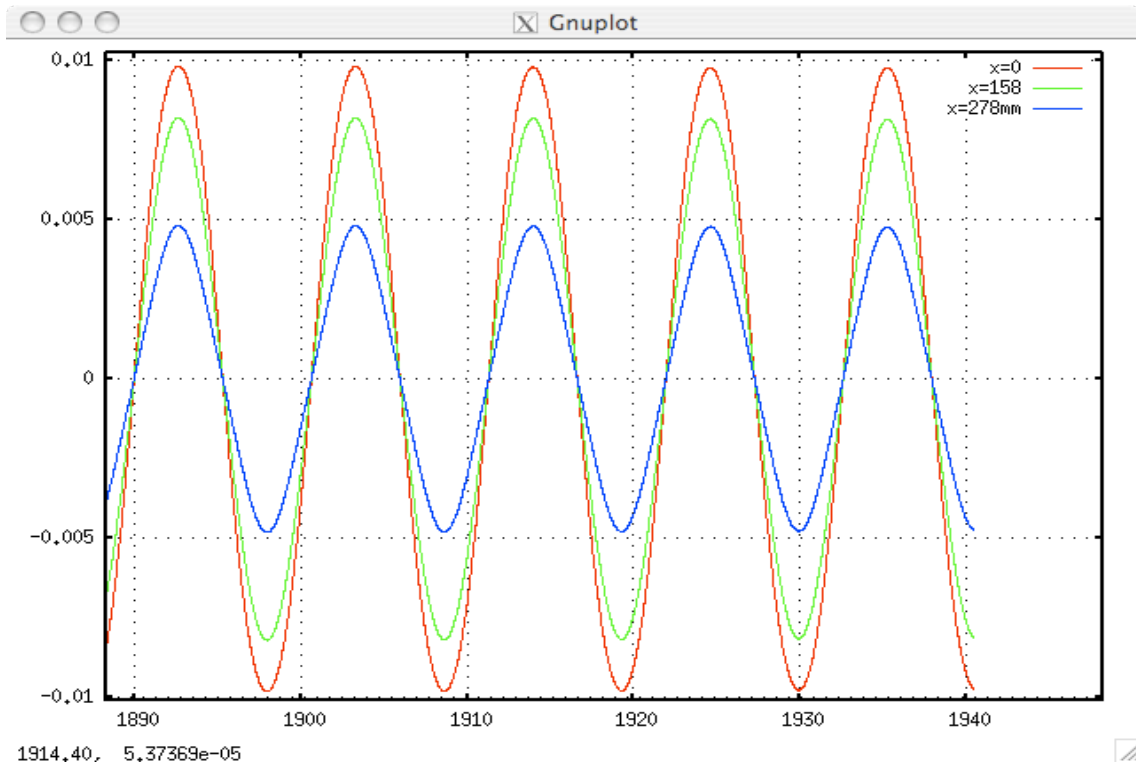


FIGURE 7 – Barre soumise à un créneau de force de 40N sur 1s ($S=4\text{mm}^2$, $L=400$, $E= 2.10^5\text{MPa}$) : déplacement de 3 points (en y) en fonction du temps (en x), méthode explicite de Tchamwa, $\Delta t = 0.8$ pas critique, pour quelques périodes après 1900s

Troisième partie

Schéma de Runge-Kutta

14 Introduction

Je tiens a remercier Laurent Mahéo, dont j'ai encadré les travaux de thèse en collaboration avec Vincent Grolleau, pour son apport concernant cette partie

L'objectif est d'utiliser le schéma classique de Runge-Kutta (RK) explicite avec pilotage en fonction d'une estimation d'erreur obtenue à l'aide de deux calculs imbriqués.

Ce type de méthodologie est courante pour la résolution de système d'équations différentielles du premier ordre ([Engeln-Müllges and Uhlig, 1996], [Press et al., 2002]), dans le cas où le système est de taille réduite (quelques dizaines d'équations). Dans le cas de la méthode des éléments finis, cette méthodologie n'est habituellement pas employées. Remarquons en particulier que la stabilité de la méthode est difficile a traiter. On peut signaler l'importance des travaux de l'école d'Aukland sur ce sujet, par exemple on peut se référer au document de thèse de W. Wright pour une présentation assez étendue ([Wright, 2002]).

Il est classiquement admis que les méthodes de type RK conduisent à un bon compromis précision - complexité, d'où l'idée d'observer leurs comportements dans le cadre de l'équation d'avancement temporel. L'objectif est ainsi de disposer d'une source de comparaison différente, pour les méthodes principalement étudiées, en particulier le modèle de Tchamwa.

Nous rappelons succinctement la modélisation utilisée, puis des précisions sont apportées quant à l'implantation au sein du code de calcul Herezh++ ([Rio, 2014]).

15 Avancement temporel avec le modèle de Runge-Kutta imbriqué

L'équation initiale d'avancement temporel du second ordre est transformée en un couple d'équations du premier ordre selon :

$$\begin{aligned}\dot{V} &= M^{-1}(R_{ext} - R_{int}) \\ \dot{X} &= V\end{aligned}\tag{150}$$

Que l'on peut noter de manière plus générale :

$$\dot{y} = f(t, y)\tag{151}$$

Le vecteur “y” comprend ainsi les vitesses et les positions, la fonction “f” permet d'en calculer sa dérivée première par rapport au temps.

Le nombre d'inconnues du problème est ainsi doublé. Cependant, ces équations peuvent être traitées dans la pratique séquentiellement ce qui minimise l'inconvénient.

Lorsque l'on applique un schéma de type Runge-Kutta il est possible d'utiliser deux ordres successifs de précision, dont les solutions respectives par soustraction permettent d'obtenir une estimation de l'erreur d'intégration. Les opérations intermédiaires pour le calcul des deux ordres successifs sont

mutualisés (utilisés deux fois) pour minimiser le coût de calcul. On obtient ainsi les formules classiques de “Prince-Dormand embedding formulas” ou encore de “Fehlberg embedding formulas”. Ces résultats étant suffisamment classiques, nous ne rappelons ici que le raisonnement général, mais pour plus de précision on pourra consulter par exemple la référence ([Engeln-Müllges and Uhlig, 1996]) §17.

Par exemple dans le cas de la méthode RK-45 (ordres 4 et 5 emboîtés), on peut écrire (cf.[Press et al., 2002] §16) pour l’ordre 5 :

$$\begin{aligned}
 k_1 &= h f(t_n, y_n) \\
 k_2 &= h f(t_n + a_2 h, y_n + b_{21} k_1) \\
 &\dots \\
 k_6 &= h f(t_n + a_6 h, y_n + b_{61} k_1 + \dots + b_{65} k_5) \\
 y_{n+1} &= y_n + c_1 k_1 + \dots + c_6 k_6 + O(h^6)
 \end{aligned} \tag{152}$$

où : h est le pas d’avancement en temps choisi, a_i b_{ij} c_i sont des coefficients fixes spécifiques à la méthode. t_n est le temps initial où la solution est supposée connue, l’objectif étant d’obtenir la solution à t_{n+1} c’est-à-dire y_{n+1} . On remarque, que les coefficients k_i peuvent se calculer successivement conduisant à y_{n+1} de manière explicite.

D’une manière analogue pour l’ordre 4 nous avons :

$$y_{n+1}^* = y_n + c_1^* k_1 + \dots + c_6^* k_6 + O(h^5) \tag{153}$$

ce qui conduit à l’estimation d’erreur :

$$err = \sum_{i=1}^6 (c_i - c_i^*) k_i \tag{154}$$

Cette estimation d’erreur est utilisée pour piloter l’avancement du calcul, en particulier le pas de temps. Dans la pratique, le pilotage n’est pas si simple qu’il peut y paraître. Il tient compte de la précision disponible sur la machine de calcul, d’un nécessaire équilibrage des différentes équations de (151), des notions : d’erreurs globales (à tous le vecteur “y”) ou local à chaque composante, d’erreur absolue ou relative, d’une stratégie pour augmenter ou diminuer le pas d’un calcul à l’autre en fonction des résultats obtenus ...

Dans notre cas, nous nous sommes appuyer d’une part sur les algorithmes proposés dans (cf.[Press et al., 2002] §16.2 et dans ([Engeln-Müllges and Uhlig, 1996]) §17.3, et d’autre part sur l’algorithme “RKF45.CC” issu de nombreux travaux effectués en Fortran , que l’on peut consulter à l’adresse ([Watts and Shampine, 2005]).

16 Implantation

L’implantation comprend deux parties. Tout d’abord, une classe (au sens C++) de méthodes générales de résolution d’un système d’équations différentielles du premier ordre par la méthode de Runge-Kutta imbriqué a été mis en place. Cette classe intègre : les méthodes RK d’ordre 2 et 3 classiques , RK d’ordre 3 et 4 suivant l’algorithme proposé par Fehlberg , RK d’ordre 4 - 5 suivant l’algorithme proposé par Cash-Karp, et enfin la méthode de pilotage.

Ces méthodes sont organisées sous forme de template d’une classe générique qui doit contenir la fonction “f” et le vecteur “y”.

La seconde partie de l'implantation, concerne la définition de l'algorithme d'avancement temporel sous forme d'une classe dédiée au même titre que l'algorithme de Tchamwa par exemple. L'avancement temporel s'obtient à partir de la fonction "f" calculée d'après (150) et de l'algorithme de pilotage RK. Au cours du calcul de "f", on introduit les conditions limites, et on résout le système par inversion de la matrice "M".

Par rapport aux algorithmes CFD ou Tchamwa, le coût en temps de calcul d'un avancement temporel dépend de l'ordre de la méthode, mais dans tous les cas il est bien supérieur. Par exemple dans le cas RK45, 5 nouvelles évaluations de la fonction "f" (la première provenant du pas précédent) sont nécessaires pour un pas de temps, contrairement au cas CFD ou Tchamwa où une seule évaluation est nécessaire. D'une manière simplifiée, on peut dire que les méthodes CFD et dérivées sont équivalentes à une méthode RK du premier ordre sans vérification de la précision.

Quatrième partie

Méthodes “espace-temps” : Galerkin discontinu

17 Introduction

Je tiens a remercier Laurent Mahéo, dont j’ai encadré les travaux de thèse en collaboration avec Vincent Grolleau, pour son apport concernant cette partie

Les méthodes traditionnelles utilisées pour traduire l’évolution temporelle de l’équilibre sont fondées sur l’hypothèse d’une évolution continue. Parmi ces méthodes, nous avons vu les différences finies centrées (DFC) pour l’explicite et la famille des méthodes de Newmark pour l’implicite. Dans le cas de fortes impulsions : impacts ou chocs, on observe des oscillations numériques qui n’ont aucun fondement physique : par exemple après un créneau de force. L’objectif ici est d’investiguer la méthode de Galerkin-discontinu, qui inclut par essence la possibilité d’avoir des discontinuités en position ou en vitesse. Différents modèles ont été proposés dans la littérature.

Par exemple X. D. Li et N.-E. Wiberg ([Li and Wiberg, 1996]) proposent une discrétisation de type P1-P1 en position - vitesse. La position et la vitesse sont des variables qui peuvent-être discontinues entre deux pas de temps, ainsi sur chaque intervalle de temps, il y a 4 inconnues, déplacement et vitesse initiaux et finals. La formulation variationnelle est clairement définie et de manière à éviter la résolution d’un système 4 fois plus volumineux en ddl que le cas classique (DFC par exemple), une procédure itérative est mise en place qui converge en 2 à 6 itérations sur les exemples donnés. Une procédure d’adaptation automatique de pas de temps est proposée en fonction d’une norme d’erreur fondée sur le saut en vitesse et en position observé à chaque pas de temps. De nombreux exemples classiques de validation montrent l’intérêt de la méthode : 1 *ddl*, 2 *ddl* couplé, 2 *ddl* avec un mode lent et un mode très rapide que l’on veut supprimer, et enfin une superposition de masse ressort modélisant un immeuble soumis à une onde de cisaillement (dont l’équation est traitée comme un problème 1D). Les auteurs, de manière identique à la plupart des autres travaux, montrent que la convergence est du troisième ordre. Elle est bien meilleure que celle de Newmark classique, ce qui permet de retenir un pas de temps important. Il est important de noter que le système de pilotage en pas de temps semble efficace dans les cas où on ne s’intéresse pas justement au saut !

Dans les autres cas, les résultats ne sont pas convaincants. La formulation est principalement implicite, inconditionnellement stable.

Les travaux de C.C. Chien, C.S. Yang, J.H. Tang ([Chien et al., 2003]) décrivent une méthode (Time-Discontinuous-Galerkin : TDG) qui fait suite au travail de Li and Wiberg, l’apport principal étant le passage en 3D, la comparaison dans ce cas avec d’autres méthodes classiques, et l’introduction d’une modification de l’algorithme itératif qui permet de diminuer le coût de calcul. L’analyse de la stabilité et de la précision est faite à partir d’un oscillateur à 1 *ddl*. Les résultats sont comparés aux schémas classiques : Newmark, HHT, Wilson et Houbolt. On retrouve une précision du 3^{ème} ordre, et on observe un amortissement important des fréquences numériques.

Xikui Li, Dongmei Yao, R. W. Lewis ([Li et al., 2003]) proposent une formulation où seule la vitesse peut-être discontinue. L’interpolation de la position s’appuie sur les polynômes d’Hermite, et la vitesse est linéaire sur le pas de temps. Par rapport au modèle précédent, le nombre de vecteurs inconnues passe de 4 à 3. Les résultats obtenus semblent convaincants.

Ces dernières années, de très nombreux travaux ont été menés sur le sujet. Cependant, parmi l'ensemble des modèles proposés, très peu concernent un avancement explicite, thème principal de notre étude. Les travaux récents les plus intéressants semblent être ceux présentés par Bonelli et al ([Bonelli et al., 2001], [Bonelli and Bursi, 2002]). Ce modèle a été implanté dans Herezh++ et est décrit plus en détail par la suite.

18 Le modèle de Bonelli

Cette partie concerne la modélisation proposée par Bonelli et al ([Bonelli et al., 2001], [Bonelli and Bursi, 2002]) et les particularités de l'implantation dans Herezh++. La première publication traite du cas linéaire, la seconde est une extension au cas non linéaire des puissances internes. Dans le cas de l'implantation dans Herezh++, l'algorithme est également étendu au cas des puissances externes non-linéaires.

On considère la partition habituelle du temps, et on s'intéresse à l'intégration du processus sur un pas de temps. Les deux inconnues du problème sont la quantité de mouvement (au lieu de la vitesse) et la position, chacune pouvant être discontinue aux bornes du pas de temps. L'interpolation de ces deux inconnues est de type P1-P1, i-e linéaires. Soient $q(t)$ et $p(t)$ la position et la quantité de mouvement.

$$q(t) = t_1(t) q_1 + t_2(t) q_2 \quad , \quad p(t) = t_1(t) p_1 + t_2(t) p_2 \quad (155)$$

avec $q_1 = q(t_n^+)$, $q_2 = q(t_{n+1}^-)$, $p_1 = p(t_n^+)$, $p_2 = p(t_{n+1}^-)$ et

$$t_1(t) = \frac{(t_{n+1} - t)}{h} \quad \text{et} \quad t_2(t) = \frac{t - (t_n)}{h} \quad (156)$$

On associe aux positions et aux quantités de mouvement, les champs de fonctions tests suivantes :

$$w_q(t) = t_1(t) w_{q1} + t_2(t) w_{q2} \quad , \quad w_p(t) = t_1(t) w_{p1} + t_2(t) w_{p2} \quad (157)$$

Avec ces différentes quantités, la méthode de Galerkin-Discontinu peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} & \int_{I_n} w_q (\dot{p}(t) + R_{int}(q(t), V(t)) - R_{ext}(q(t), V(t))) dt \\ & + \int_{I_n} w_p (M^{-1}p(t) - \dot{q}(t)) dt \\ & - w_{pr} (q(t_n^+) - q_0) \\ & + w_{qr} (p(t_n^+) - p_0) = 0 \end{aligned} \quad (158)$$

pour $r = 1$ et $r = 2$, et où I_n est l'intervalle de temps considéré $]t_n, t_{n+1}[$, $p_0 = p(t_n^-)$, $q_0 = q(t_n^-)$, $V(t)$ est la vitesse au temps t , $R_{int}(q(t), V(t))$ est la puissance des efforts internes, $R_{ext}(q(t), V(t))$ est la puissance des efforts externes.

On remarque que les conditions de continuité en vitesse et en déplacement sont prises de manière "faibles" à l'aide des troisième et quatrième termes de (158), tandis que le premier terme représente la forme variationnelle des équations d'équilibres des puissances intégrées sur le pas de temps, et le deuxième terme représente la forme variationnelle de la relation vitesse-déplacement à travers la quantité de mouvement.

Les expressions (155) et (156) sont introduites dans (158) et l'intégration temporelle est effectuée de manière explicite ce qui conduit à (en retenant globalement la démarche proposée par Bonelli) :

$$\begin{aligned}
P_{q_1} + \frac{p_1}{2} + \frac{p_2}{2} &= p_0 + P_{i_1} \text{ pour } wq_1 \\
P_{q_2} - \frac{p_1}{2} + \frac{p_2}{2} &= P_{i_2} \text{ pour } wq_2 \\
-\frac{q_1}{2} - \frac{q_2}{2} + \frac{h}{3}M^{-1}p_1 + \frac{h}{6}M^{-1}p_2 &= -q_0 \text{ pour } wp_1 \\
\frac{q_1}{2} - \frac{q_2}{2} + \frac{h}{6}M^{-1}p_1 + \frac{h}{3}M^{-1}p_2 &= 0 \text{ pour } wp_2
\end{aligned} \tag{159}$$

où pour $\alpha = 1$ et 2 :

$$\begin{aligned}
P_{q_\alpha} &= \int_{t_i}^{t_{i+1}} t_\alpha(t) R_{int}(q(t), V(t)) dt \\
P_{i_\alpha} &= \int_{t_i}^{t_{i+1}} t_\alpha(t) R_{ext}(q(t), V(t)) dt
\end{aligned} \tag{160}$$

Dans ces expressions, l'intégration en temps est effectuée selon une quadrature de Gauss. Les auteurs préconisent 3 points d'intégration par sécurité, bien que les tests que nous avons effectués montrent qu'a priori 2 points sont suffisants.

De manière à obtenir une résolution quasi-explicite, une méthodologie de type prédiction-correction est retenue avec une à trois passes de correction. Dans la pratique, deux passes conduisent à un bon compromis précision/rapidité.

Nous rappelons les grandes lignes de la méthode qui est légèrement modifiée pour prendre en compte un comportement non linéaire du chargement.

Tout d'abord, un ré-arrangement des expressions (159) conduit au système d'équations suivant, avec k l'indice de la passe de correction :

$$\begin{aligned}
0 &= r_1(k) = \frac{1}{h}M q_2 - P_{q_1}(k) - P_{i_1}(k) - p_0 - \frac{1}{h}M q_0 \\
0 &= r_2(k) = \frac{1}{h}M q_1 + \frac{1}{3}(P_{q_2}(k) + P_{i_1}(k)) - \frac{1}{h}M q_0
\end{aligned} \tag{161}$$

Dans ces expressions, les quantités de mouvements ont été condensées explicitement en fonction des déplacements selon :

$$\begin{aligned}
p_1 &= \frac{1}{h}M (3 q_1 + q_2 - 4 q_0) \\
p_2 &= \frac{1}{h}M (-3 q_1 + q_2 + 2 q_0)
\end{aligned} \tag{162}$$

L'objectif est donc d'obtenir les résidus $r_\alpha(k)$ les plus faibles possibles.

Procédure

1. Initialisation : $i=0$, p_0 , q_0 , $R_{int}(q(0), V(0))$, $R_{ext}(q(0), V(0))$,
2. Pour chaque intervalle de temps t_i, t_{i+1} , on note pour simplifier :
 - q_0 et p_0 les positions et quantités de mouvements à t_i^-

- q_1 et p_1 les positions et quantités de mouvements à t_i^+
 - q_2 et p_2 les positions et quantités de mouvements à t_{i+1}^-
- (a) Calcul des dérivées temporelles des quantités de mouvement au temps t_i^-

$$\dot{p}_0 = R_{int}(q_0, V_0) - R_{ext}(q_0, V_0) \quad (163)$$

- (b) Calcul de la prédiction du déplacement en tenant compte des conditions limites, selon une expression reposant sur les première terme de la série de Taylor de la solution du schéma implicite TDG1 (tronqué au second ordre).

$$\begin{aligned} q_1 &= q_0 + a (h)^2 M^{-1} \dot{p}_0 \\ q_2 &= q_0 + h M^{-1} p_0 + b (h)^2 M^{-1} \dot{p}_0 \end{aligned} \quad (164)$$

Les paramètres “a” et “b” sont fixes, et sont déterminés pour optimiser la précision et l’amortissement numérique. Bonelli ([Bonelli et al., 2001], [Bonelli and Bursi, 2002]) présentent une étude complète permettant la détermination automatique de ces paramètres en fonction des objectifs recherchés. D’une manière pratique l’évolution de l’optimum des couples de paramètres est présentée sous la forme d’une approximation polynomiale fonction du rayon spectral de la matrice d’amplification, ceci pour les cas : une passe, deux passes et 3 passes de correction. Le rayon spectral apparaît donc ainsi comme un paramètre de contrôle de l’algorithme, il permet également le calcul du pas de temps critique.

- (c) Calcul de la correction pour $k=0$ au nombre maximum-1 de corrections prévues (1,2 ou 3)
- i. Calcul des termes $P_{q\alpha}$ et $P_{i\alpha}$, $\alpha = 1$ et 2 , selon (160). Pour ce faire, on boucle sur les points d’intégration en temps. Pour chaque point d’intégration τ , les positions et vitesses sont évaluées selon (155) et (156) et associées aux conditions limites en déplacements et vitesses imposées,
 - ii. Calcul des résidus (161),
 - iii. Calcul de la correction selon :

$$\begin{aligned} \Delta q_1 &= -h M^{-1} r_2(k) \\ \Delta q_2 &= -h M^{-1} r_1(k) \end{aligned} \quad (165)$$

On remarque que la correction correspond à l’application d’un algorithme de Newton, pour lequel seule la partie relative à la matrice masse est prise en compte ce qui, compte tenu du pas de temps, s’avère efficace, la sensibilité à la variation des efforts généralisés ce révélant dans nos tests très faible.

3. Calcul des quantités d’accélération finales qui s’expriment sous forme d’une relation explicite entre les positions et les quantités de mouvements à partir des relations (162) :

Au niveau informatique, l'algorithme est implanté sous une forme équivalente aux schémas d'avancements temporels : DFC, Tchamwa, Runge-Kutta. Les paramètres qui contrôlent de calcul sont donc le rayon spectral, le nombre de passes de correction et le nombre de points d'intégration en temps. Contrairement aux autres algorithmes de type DFC et dérivés, le pas de temps critique (pour la stabilité) peut-être choisi légèrement supérieur au pas de temps critique théorique de la condition de Courant (par exemple d'un facteur 1.03). Ceci est à mettre en parallèle avec le pas de temps choisi en pratique dans le cas DFC, qui doit plutôt être choisi inférieur au pas de temps critique théorique (par exemple un facteur 0.9).

19 Quelques résultats

On s'intéresse à une barre de 400mm de long, 4 mm² de section, en acier ($\rho = 7.8 \cdot 10^{-9} \text{ton.mm}^{-3}$) maillée tout d'abord avec 50 éléments 1D égaux. Le module d'Young est $2.0 \cdot 10^5 \text{MPa}$. La barre est chargée axialement, selon une rampe linéaire puis un palier de 10 N d'où une déformation statique de $1.25 \cdot 10^{-5}$. On se situe donc en petites perturbation. Le temps de montée est très court, de $1.0 \cdot 10^{-9} \text{s}$ et le temps de maintien de $1.0 \cdot 10^{-5} \text{s}$. Le pas de temps critique DFC est sensiblement : $h_{critique} = 1.58 \cdot 10^{-6} \text{s}$. Ainsi, à condition d'utiliser un pas de temps supérieur au temps de montée du chargement, on peut considérer que le chargement est de type créneau.

19.1 Temps de calcul - précision

Les temps de calcul sont en particulier reliés au nombre de fois où la puissance interne et la puissance externe sont évaluées par pas de temps. Dans le cas des méthodes classiques, une seule évaluation est effectuée. Dans le cas de l'implantation proposée, nous avons vu que l'intégration s'effectue par une quadrature de Gauss. Le nombre d'évaluation est alors égal au nombre de points de Gauss. Le tableau (??) montre quelques comparaisons. On observe qu'effectivement, l'algorithme DGE est plus coûteux d'un facteur supérieur au nombre de points d'intégration. En fait, il s'agit des opérations vectorielles globales qui ne sont pas pour l'instant optimisées.

TABLE 2 – Comparaison des temps d'exécution en seconde : algorithme DFC classique et celui proposé par Bonelli, $h = 0.9h_{critique}$, $r =$ ratio par rapport à DFC

maillage	DFC	Bonelli : 2 points de Gauss	Bonelli : 3 points de Gauss
50 éléments	5.49 ($r = 1.$)	14.56 ($r = 2.64$)	18.77 ($r = 3.41$)
200 éléments	17.40 ($r = 1.$)	57.22 ($r = 3.28$)	77.24 ($r = 4.44$)

La FIG. 8 montre l'évolution du déplacement de l'extrémité en fonction du temps. Dans le cas de l'algorithme de Bonelli, $\rho = 0.9$ et le pas de temps est égal à $0.9 h_{critique}$ de manière à pouvoir se comparer avec l'algorithme de DFC classique. D'une manière générale on observe des résultats similaires, en terme de seuil, avec pour DFC à $0.9 h_{critique}$, un ensemble d'oscillations qui ne sont pas présentes avec DGE.

Dans le cas de DFC, faisons varier le pas de temps. A partir d'un pas de temps plus faible que $0.1 h_{critique}$ les résultats obtenus en DFC demeurent sensiblement constants (cf. FIG. 9), et peuvent ainsi être considérés comme une bonne approximation de la solution exacte du système discrétisé. La solution DFC alors obtenue pour un pas de temps de $0.9 h_{critique}$ présente une erreur de plus de 5% par rapport à la solution de référence. Dans le cas de DGE, l'erreur est beaucoup plus faible. En fait, la solution obtenue avec DGE pour $0.9 h_{critique}$ est très proche de la solution DFC pour 0.01

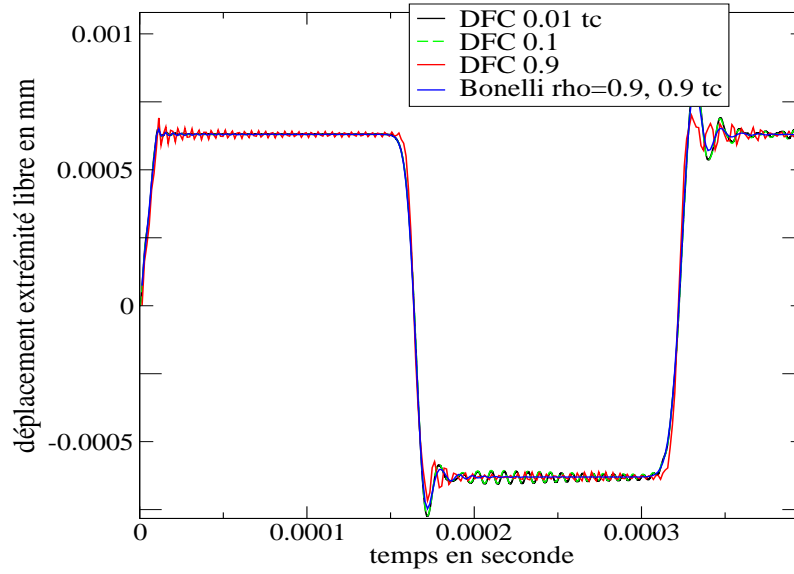


FIGURE 8 – Comparaison du modèle de Bonelli et du modèle DFC classique pour différent pas de temps

$h_{critique}$, ce qui peut sembler cohérent avec le fait que la précision de cet algorithme est théoriquement supérieure d'un ordre par rapport à DFC.

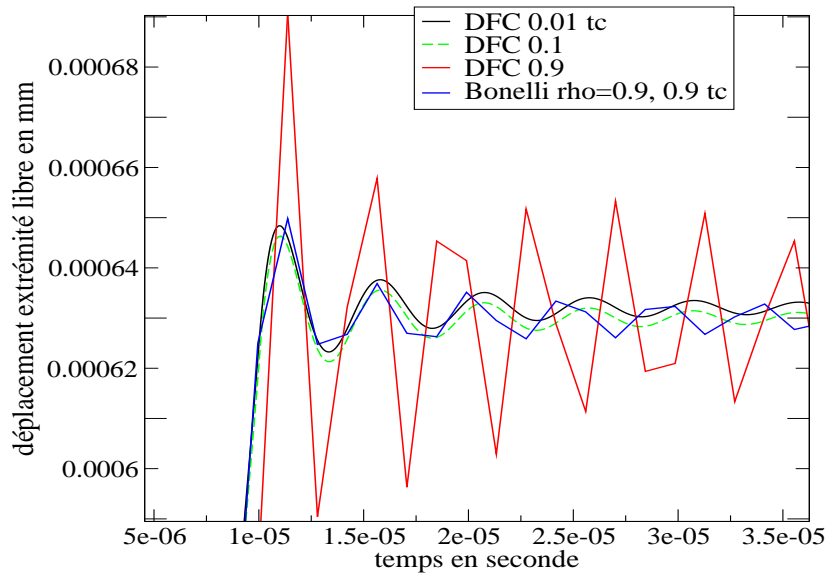


FIGURE 9 – Agrandissement sur la comparaison du modèle de Bonelli et du modèle DFC classique pour différent pas de temps

La FIG. 10 montre la comparaison des énergies cinétiques, de la solution DFC de référence et celle de Bonelli pour un pas de temps également de $0.01 h_{critique}$ puis exactement du pas critique.

Tout d'abord on remarque que la solution obtenue pour un très faible pas de temps est globalement

identique à DFC. En fait, pour un très faible pas de temps, comparé au pas de temps critique l'influence de la discontinuité est inexistente. Par contre dans le cas $h = h_{critique}$, DGE conduit à un résultat sensiblement identique initialement, puis qui s'atténue en fonction du temps. Cette évolution montre bien le caractère dissipatif de l'algorithme dans ces conditions. Une interprétation de ces courbes serait qu'il est nécessaire que la partie discontinuité soit répartie à la fois sur plusieurs pas de temps et sur un ou plusieurs éléments selon la finesse de l'interpolation, pour qu'elle soit bien représentée par l'algorithme.

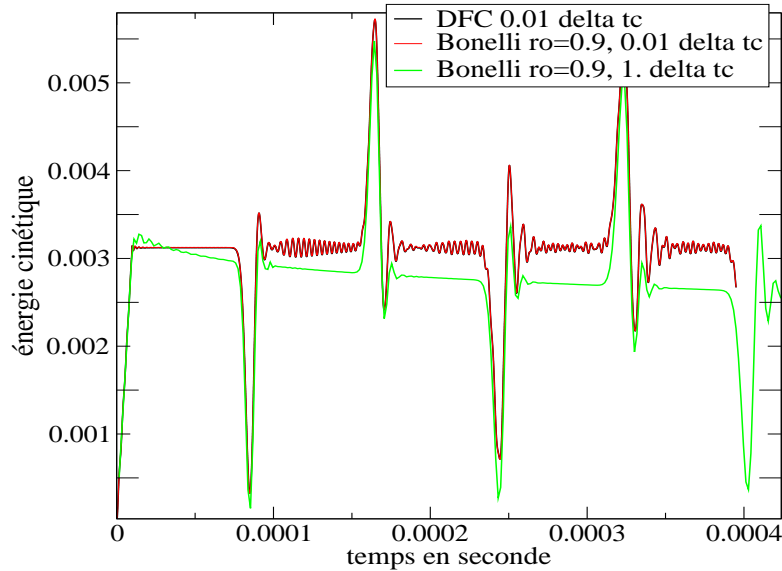


FIGURE 10 – évolution de l'énergie cinétique

L'algorithme suppose l'intégration temporelle des puissances internes et externes. La FIG. 11 montre l'évolution de la solution en fonction du nombre de point de Gauss utilisé. On indique également la solution DFC pour différentes valeurs du pas de temps. Les résultats de l'algorithme DGE fluctuent légèrement. Un compromis précision-temps de calcul serait ici 2 points d'intégration.

On retrouve des tendances analogues sur l'évolution de la vitesse par rapport au temps sur la FIG. 12. Les solutions pour $0.01 h_{critique}$ sont confondues pour Bonelli et DFC. Prés du pas de temps critique, l'algorithme DGE atténue les hautes fréquences contrairement à DFC, mais ceci tout en gardant une bonne évaluation du niveau d'énergie initiale. Pour comparaison, nous avons indiqué le résultat obtenu avec l'algorithme de Tchamwa pour $\varphi = 1.01$. On observe que lors du premier aller/retour, le signal obtenu avec DGE est beaucoup plus filtré qu'avec Tchamwa.

Cependant, après une vingtaine d'aller/retour (cf. FIG. 13), on remarque la tendance inverse : la réponse du modèle Tchamwa est beaucoup plus filtrée que celle de DGE qui a tendance à s'étaler et à s'approcher de la solution exacte du système discrétisé en temps représentée par DFC avec $0.01 h_{critique}$. On observe également le caractère très bruité de la solution DFC avec $0.9 h_{critique}$.

On remarque également (cf. FIG.14) que le caractère dissipatif dépend du pas de temps utilisé, tout comme dans le cas les algorithmes de Galerkin continu explicites dissipatifs : par exemple Tchamwa.

On observe également (cf. FIG. 15) la tendance à l'augmentation des oscillations dans les premiers instants suivant le chargement, à mesure que l'on se rapproche du pas de temps maxi (ici : 1.08

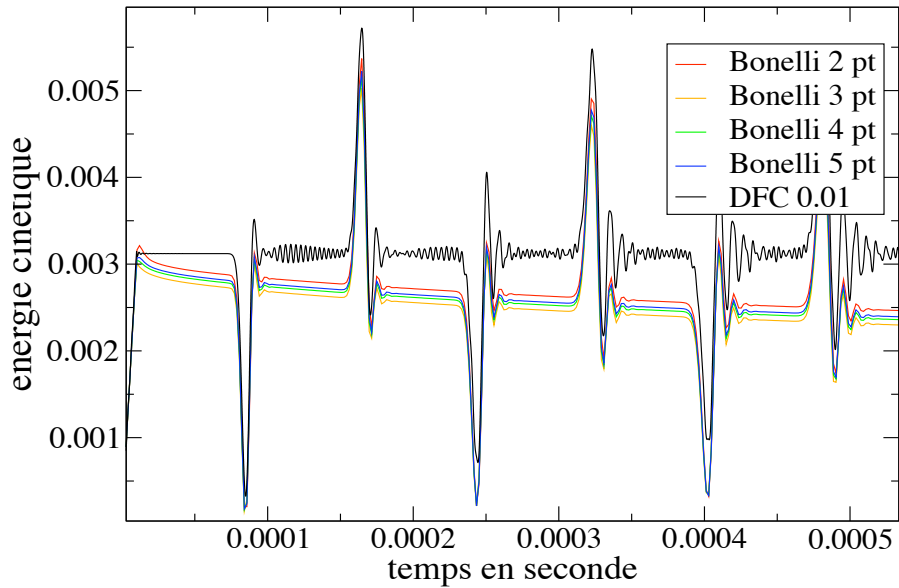


FIGURE 11 – Influence du nombre de points d'intégration

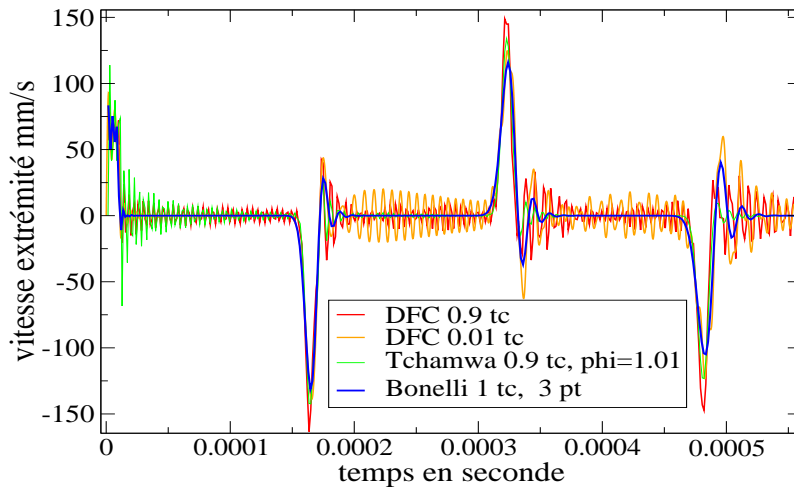


FIGURE 12 – Evolution de l'extrémité libre en fonction du temps : premiers aller/retours

$h_{critique}$). Notons que comparée au modèle de Tchamwa, l'amplitude de ces oscillations (cf.16) est plus faible et leur atténuation est plus rapide.

La figure FIG. 18 montre l'influence du rayon spectral juste après l'application du chargement. On observe bien l'atténuation lorsque ρ diminue. Néanmoins après une vingtaine d'aller/retours (cf/ FIG. 17), l'influence de ρ s'atténue fortement.

19.2 Remarques et conclusions partielles

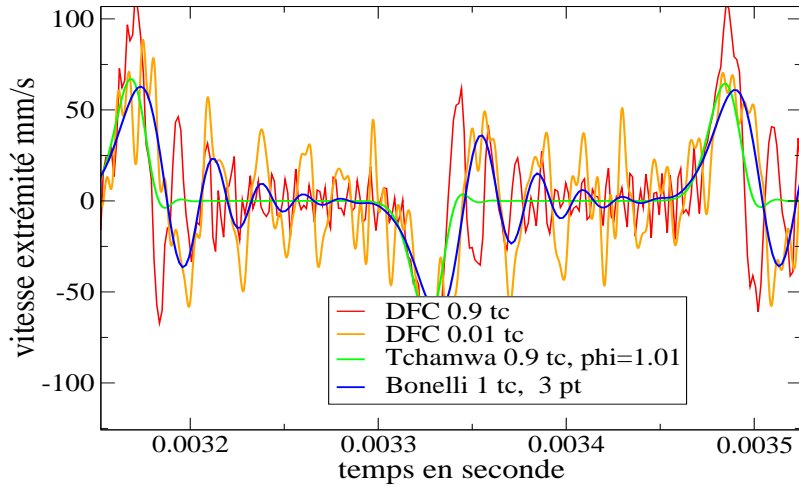


FIGURE 13 – Evolution de l’extrémité libre en fonction du temps : après 20 aller/retours

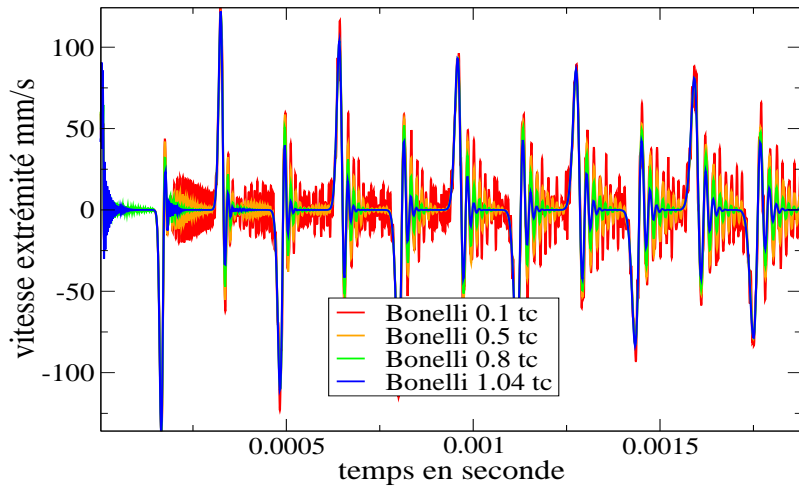


FIGURE 14 – vitesse de l’extrémité libre : influence du pas de temps sur l’amortissement

Le modèle DFC est une solution explicite rapide, précise au second ordre, largement employée dans les codes industriels. Cependant, l’algorithme a tendance à introduire des fréquences numériques par rapport à la solution analytique du problème continu. A priori un faible pas de temps permet de converger vers la solution exacte du problème discrétisé spatialement. Pour un maillage homogène 1D, on obtient la solution exacte du système continu pour un pas de temps identique au pas de temps critique, mais dans ce cas la solution est instable, il n’est donc pas possible d’utiliser le pas critique. De plus lorsque l’on modélise un problème non linéaire, la limite de stabilité, tend à diminuer par rapport à la limite théorique. Ainsi pour des pas de temps de l’ordre d’une fraction du pas critique

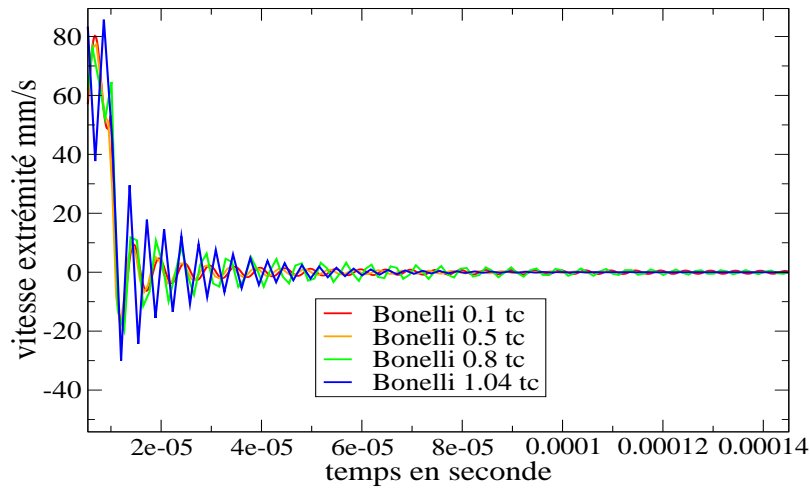


FIGURE 15 – vitesse de l’extrémité libre à l’origine de temps : influence du pas de temps sur l’amortissement

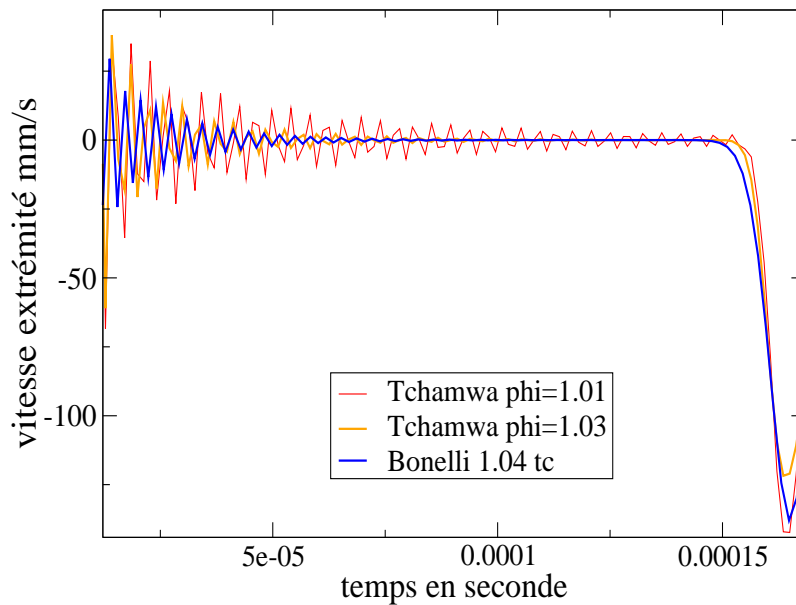


FIGURE 16 – vitesse de l’extrémité libre : comparaison Bonelli Tchamwa près de la zone de chargement

(0.6 par exemple) on obtient des résultats fortement bruités par rapport à la solution théorique, le bruitage s’empirant fortement à mesure de l’avancement temporel.

Une solution est d’utiliser les algorithmes de Galerkin-discontinu. Nous nous sommes plus parti-

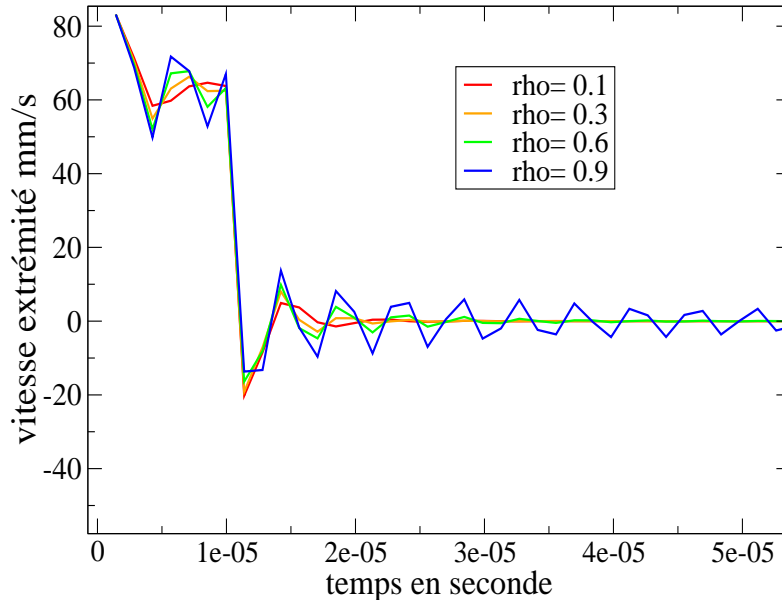


FIGURE 17 – vitesse de l’extrémité libre : influence du rayon spectral ρ

culièrement intéressés au cas d’une méthode explicite, pour des raisons de temps de calcul, en pensant que dans le cas d’une recherche de précision dans les hautes fréquences, il nous fallait inévitablement utiliser un pas de temps d’un ordre de grandeur proche du pas critique. Dans ce cas, une solution implicite est en général beaucoup plus coûteuse qu’une solution explicite d’où le choix proposé.

Au regard des premiers résultats obtenus, les comparaisons DFC et DGE apportent les commentaires suivants :

- pour un pas de temps très faible ($0.01 h_{critique}$) les résultats sont identiques, alors que près du pas critique, DGE donne initialement des résultats proches de la solution théorique du problème continu, contrairement à DFC.
- au cours du temps, DFC introduit continuellement des fréquences numériques, ce qui est mis en avant pour justifier l’atténuation intrinsèque qu’introduit DGE pour les hautes fréquences. DGE fonctionne donc très correctement pour les premiers temps de calcul (ex : 1000 pas de temps critique), par contre pour des temps plus importants, on voit de nouveau apparaître des fréquences numériques que l’on peut qualifier de parasites car non conformes à la solution théorique initiale. Néanmoins, la solution obtenue est proche de la solution exacte du problème discrétisé en temps, avec un filtrage visible.
- DGE sans atténuation (c’est-à-dire avec un rayon spectral proche de 1) n’est pas stable ! L’atténuation est donc inévitable. Cependant, on peut noter que l’importance de l’atténuation semble décroître à mesure que l’on s’éloigne de discontinuités brusques. De plus l’influence du paramètre “rayon spectral” est dans la pratique assez faible.
- l’atténuation, ajustable via le paramètre “rayon spectral”, n’est pas réglable sur une large gamme, contrairement au modèle de Tchamwa par exemple.
- Tout comme l’algorithme de Tchamwa, l’amortissement dépend fortement du pas de temps

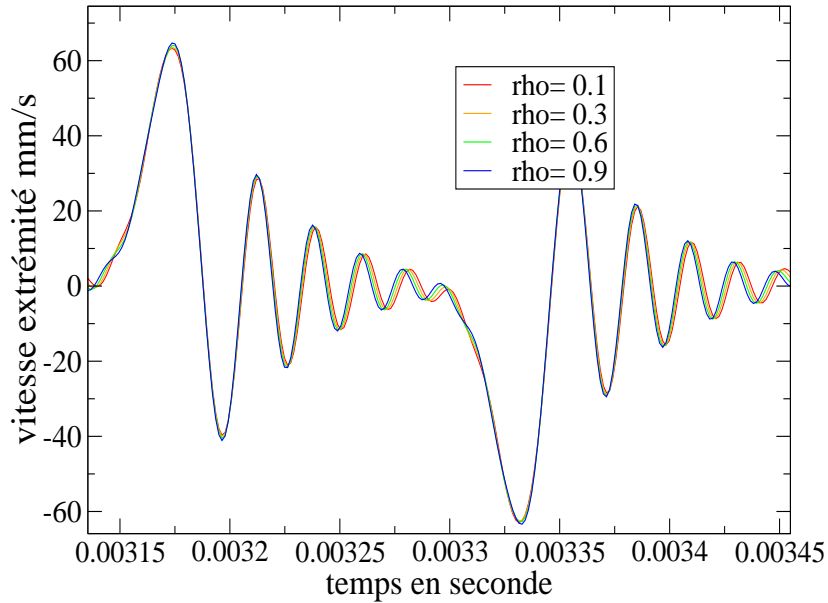


FIGURE 18 – vitesse de l’extrémité libre : influence du rayon spectral ρ après une vingtaine d’aller/retours

retenu par rapport au pas de temps critique.

— DG nécessite des temps de calcul largement plus importants que DFC, par exemple d’un facteur 3 par rapport à DFC.

Il semble donc que DGE soit performant pour la modélisation d’un phénomène sur un temps relativement court. Par rapport au modèle de Tchamwa ou DFC, les résultats sont plus précis bien qu’utilisant une atténuation plus faible. En revanche, les temps de calcul sont plus importants.

Néanmoins, le modèle DGE de Bonelli, tel que nous l’avons implanté, ne semble pas “la” solution pour une modélisation sur une longue période : dans tous les cas, il y a détérioration des résultats par rapport à la solution théorique du problème continu en temps et en espace.

Cinquième partie

Méthodes de calcul des problèmes non linéaires

20 Origine

Les non-linéarités apparaissent dans la plupart des problèmes éléments finis. Les problèmes linéaires constituent en fait un cas particulier. Cependant, la principale technique pour résoudre les non-linéarités étant de les transformer en une suite de problèmes linéaires, leurs connaissances constituent un passage obligatoire.

Examinons de manière assez exhaustive, l'origine de ses non-linéarités. Tout d'abord, notons que l'appellation "non linéaire" veut dire que le résidu de l'équation ne s'exprime pas de manière linéaire en fonction des degrés de liberté. Ainsi, toutes les équations qui contiendront des fonctions non linéaires des inconnues conduiront au final à un problème non linéaire.

Plaçons-nous dans le cas de l'équilibre mécanique. L'origine possible des non-linéarités est :

— **le choix de la mesure de déformation** : seule la mesure de l'ingénieur $\epsilon = \Delta l/l$ est une mesure linéaire en fonction de l'inconnu Δl . Or, cette mesure n'est pas utilisable dans le cas des grandes transformations, au motif qu'elle n'est pas objective (elle ne conduit pas aux mêmes résultats suivant le repère de référence que l'utilisateur retient). Les autres mesures objectives classiques sont :

— la mesure de Green-Lagrange, en 1D dans un repère orthonormé on obtient l'expression quadratique suivante :

$$\epsilon = 0.5 \frac{(l^2 - l_{(0)}^2)}{l_{(0)}^2}$$

— la mesure d'Almansi, en 1D dans un repère orthonormé on obtient l'expression quadratique suivante :

$$\epsilon = 0.5 \frac{(l^2 - l_{(0)}^2)}{l^2}$$

— la mesure logarithmique, en 1D dans un repère orthonormé on a la mesure non linéaire :

$$\epsilon = \log\left(\frac{l}{l_{(0)}}\right)$$

— les mesures de déformations cumulées, qui ont pour objectif de ce rapprocher de la mesure logarithmique, tout en étant plus simple à calculer. Toutes sont donc non-linéaires.

Ainsi, dans le cas de déformations finies (contrairement au cas des très petites déformations), on dit aussi dans le cas des grandes déformations, la mesure de déformation, de par son calcul, introduit une non-linéarité potentielle (potentielle car par la suite, on peut avoir une loi de comportement qui rétablisse une linéarité, mais dans les faits c'est rare!).

— **la loi de comportement** : à part la loi de comportement "linéaire" de Hooke, la majorité des comportements sont non linéaires, c'est-à-dire la contrainte dépend de manière non linéaire de la déformation, et ou de la vitesse de déformation. Pour des lois complexes, cette non-linéarité se manifeste de deux manières. D'une part, la relation contrainte - déformation (et ou vitesse de déformation) est non linéaire, en général sous forme incrémentale (exemple

la plasticité). D'autre part, suivant l'historique du trajet de déformation (ou de vitesse de déformation), la relation avec la contrainte peut différer. Il y a non-unicité de la relation. Par exemple, en élastoplasticité classique, un incrément de chargement peut conduire à une évolution élastoplastique ou à une évolution purement élastique.

- **le domaine matériel** : au cours du chargement, des variations importantes du domaine représentant la pièce mécanique (forme, taille) peuvent apparaître. D'une manière pratique, au niveau de l'intégration, le jacobien devient une fonction fortement non linéaire du champ de déplacement par exemple.
- **le chargement** : L'utilisation de forces dites suiveuses, c'est-à-dire qui suivent la forme de la structure, peut entraîner des non-linéarités. Comme forces suiveuses on peut citer par exemple les pressions classiques ou hydrostatiques. Dans le cas des pressions, l'effort dépend de la surface fonction en général non linéaire des degrés de liberté en position.

En résumé, tous les termes qui interviennent dans l'équation d'équilibre mécanique sont susceptibles de conduire à des non-linéarités. Dans le cas d'un problème thermique, nous pourrions avoir une analyse analogue. Ainsi d'une manière générale, l'apparition de phénomènes non linéaires est courante.

Dans cet exposé, nous présenterons principalement la méthode classique de Newton-Raphson, et quelques informations concernant la méthode de Newton modifié et les méthodes de quasi-Newton.

21 Introduction de la méthode de Newton dans le cas 1D

Soit une fonction $f(x)$ dont on cherche le zéro (ou un zéro car il peut y en avoir plusieurs), c'est-à-dire résoudre l'équation $f(x) = 0$

21.1 Méthode du point fixe

L'équation $f(x) = 0$ est transformée (on verra par la suite comment) en un problème de point fixe. La méthode du point fixe est très populaire dans le monde des mathématiques appliquées. Elle consiste à rechercher la solution du problème $x = g(x)$, la fonction = sa valeur d'où le nom "point fixe", à l'aide de l'algorithme simple itératif suivant :

- choisir une valeur initiale x_0
- itérer selon la formule : $x_{n+1} = g(x_n)$
- arrêt selon un critère à définir (par exemple $|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon$)

On peut assurer la convergence de l'algorithme si l'application est contractante sur un intervalle $[a, b]$, c'est-à-dire :

$$\forall \{x_1, x_2\} \in [a, b], \exists 0 \leq k < 1 \quad |g(x_1) - g(x_2)| \leq k|x_1 - x_2| \quad (166)$$

Si de plus si "g(x)" est dérivable on a :

$$\exists 0 \leq k < 1 \quad |g'(x)| \leq k \leq 1, \quad \forall x \in [a, b] \quad (167)$$

21.2 Vitesse de convergence de la méthode du point fixe

Soit "s" la racine i.e. $s = g(s)$

Soit $x_n \neq s$ et considérons un développement de Taylor en fonction de la grandeur ($x_n - s = \Delta x$ considéré comme petit (car on suppose que l'on est près de la solution)).

$$\begin{aligned}
g(x_n) &= g(s + (x_n - s)) = g(s + \Delta x) \\
&= g(s) + \Delta x g'(s) + \frac{(\Delta x)^2}{2} g''(s) + O(\Delta x)^3
\end{aligned} \tag{168}$$

On doit avoir : $x_{n+1} = g(x_n)$ d'où :

$$(x_{n+1} - s) = g(x_n) - g(s) = (x_n - s)g'(s) + \frac{(x_n - s)^2}{2}g''(s) + O(\Delta x)^3 \tag{169}$$

1^o cas : $g'(s) \neq 0$

Dans ce cas :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x_{n+1} - s}{x_n - s} \right| = |g'(s)| \tag{170}$$

— La convergence est du premier ordre.

— L'écart entre deux itérations dépend linéairement de $g'(s)$. Plus cette valeur est petite, plus la convergence est prononcée.

— l'écart d'une itération à l'autre est du même ordre.

2^o cas : $g'(s) = 0$

Dans ce cas :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x_{n+1} - s}{(x_n - s)^2} \right| = \frac{1}{2}|g''(s)| \tag{171}$$

— La convergence est quadratique.

— L'écart entre deux itérations est de l'ordre du carré de Δx

Par exemple avec 0.1 d'erreur (ou de différence) initiale, on obtient 10^{-8} d'erreur en 3 itérations.

Il est clair que cette convergence est bien plus performante que la convergence linéaire.

21.3 Méthode de Newton

On revient au problème initiale $f(x) = 0$ que l'on transforme en problème de point fixe :

$$x = g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \tag{172}$$

On remarque qu'à la solution $f(x) = f(s) = 0$, à condition que la dérivée $f'(s)$ soit non nulle, l'équation (172) est bien vérifiée.

On peut également retrouver la forme de l'équation en développant le problème initiale en série de Taylor près de la racine s :

$$f(s) = f(x) + (s - x)f'(x) + 0(\Delta x)^2 = 0 \tag{173}$$

d'où :

$$\begin{aligned}
f(x) + 0(\Delta x)^2 = -(s - x)f'(x) &\rightarrow \frac{-f(x)}{f'(x)} + 0(\Delta x)^2 = s - x = \Delta x \\
&\rightarrow x - \frac{-f(x)}{f'(x)} + 0(\Delta x)^2 = s
\end{aligned} \tag{174}$$

à la convergence $x = s$ et $0(\Delta x)^2 = 0$ ce qui conduit à l'expression (172).

Calculons la dérivée :

$$g'(x) = 1 - \frac{f'}{f'} + \frac{f \cdot f''}{(f')^2} = \frac{f \cdot f''}{(f')^2} \quad (175)$$

Ce qui montre qu'à la convergence $g'(s) = 0$. Ainsi l'algorithme de Newton possède une convergence "quadratique" ce qui met en évidence son intérêt.

Remarquons cependant que cette convergence quadratique n'est assurée que près de la solution. En dehors la qualité de la convergence peut-être fortement détériorée. Ainsi, dans certain cas utilise-t-on un premier algorithme, théoriquement moins performant, mais plus stable (ou sûr) de type dichotomie par exemple, pour approcher grossièrement la solution, et ensuite on termine avec l'algorithme de Newton près de la solution.

Remarquons également que d'une manière pratique, chaque itération de Newton consiste à approcher la fonction "f(x)" par une droite. Dans l'équation (173), en négligeant les termes supérieurs à $1 - 0(\Delta x)^2$, on obtient l'équation de droite en fonction du paramètre "s" : $f(x) + (s - x)f'(x) = y(s)$ représentant localement l'approximation de l'évolution de $f(s)$. L'intersection $y(s) = 0$ fournit donc une approximation de la solution "s". Ainsi une autre interprétation de la méthode de Newton, est de dire que l'on remplace la fonction "f" par une suite d'approximations linéaires tangentes.

22 Cas d'un système d'équations

Considérons maintenant le cas d'un système d'équations non-linéaires, par exemple correspondant à un problème éléments finis en mécanique qui conduit dans le cas d'une formulation en déplacements à :

$$\langle V^{*ar} \rangle (R_{ar}) \quad (176)$$

Qui doit-être vérifiée quelques soit les vitesses virtuelles V^{*ar} ce qui conduit au système matriciel :

$$(R_{ar}) = (0)$$

dont la dimension est le nombre de déplacements virtuelles possibles c'est-à-dire le nombre de ddl du problème en déplacement.

D'une manière identique au cas 1D on écrit :

$$(X_{n+1}^{ar}) = (X_n^{ar}) - \left[\frac{\partial (R_{ar})}{\partial (X^{bs})} \right]^{-1} (R_{bs}) \quad (177)$$

Remarquons que les termes R_{ar} représente le déséquilibre des forces généralisées relatives au degré de liberté d'indice ar . Ou encore correspond à la puissance développée pour une vitesse virtuelle $V^{*ar} = 1$ et tous les autres = 0. Pour fixer les idées prenons : $a = 2$ et $r = 4$. En utilisant la définition de la puissance on a :

$$P = \sum_{bs} V^{*bs} R_{bs} = R_{24} \quad (178)$$

Mais la puissance c'est également une force (généralisée) fois la vitesse du point ou elle s'applique.

Ici dans l'exemple il n'y a que le point X_{24} qui bouge à la vitesse $V^{*24} = 1$. Donc R_{24} représente le bilan des forces qui s'applique sur le noeud 4 dans la direction 2 (c'est-à-dire y).

Ainsi, trouver un zéro pour le système d'équations, revient à trouver une solution qui satisfait l'équilibre. Noter que la solution peut ne pas être unique (c'est le cas général), d'où l'importance du point de départ de l'algorithme.

En résumé la méthode de Newton conduit à l'algorithme suivant dans lequel on supprime pour plus de clarté les indices "ar" ou "bs", les indices qui restent sont ceux des itérations :

1. initialisation : $i=0, X_i = X_0$
2. Calcul d'une nouvelle estimation
 - (a) $\left. \begin{array}{l} X_0 \\ X_i \end{array} \right\} \rightarrow \varepsilon_{ij} \text{ et } \sigma^{ij}$
 - (b) calcul des forces généralisées (résidus) internes R_{int} , externes R_{ext} , d'accélération R_{acc} et résidus résultants R
 - (c) calcul de la matrice de raideur tangente du système : $[K] = - \left[\frac{\partial(R)}{\partial(X)} \right]$
3. test pour savoir si l'on a atteint la solution
 - (a) si le test est satisfait \rightarrow **arrêt** la solution du problème est le vecteur (X_i) ,
 - (b) si le test n'est pas satisfait :
 - i. mise à jour des degrés de liberté : $(X_{i+1}) = (X_i) + [K]^{-1} (R)$
 - ii. aller à l'étape 2

Chaque boucle s'appelle une "itération".

Dans le cas où la méthode ne converge pas, une raison peut-être que le chargement est trop important. L'idée est alors d'appliquer le chargement en plusieurs incréments. En général, la gestion de l'avancement du chargement s'effectue à l'aide du paramètre "temps". Ce paramètre est naturel pour les phénomènes transitoires ou dynamiques, par contre dans les problèmes quasi-statiques, le paramètre temps doit-être compris comme un paramètre d'avancement de la sollicitation.

Ainsi, au final on obtient un traitement en plusieurs incréments, eux-mêmes résolus après plusieurs itérations. La méthode est appelée "méthode de Newton-Raphson" ou Newton incrémentale.

Se pose alors le problème du choix optimum de la taille de chaque incrément ceci en fonction du nombre d'itérations. Est-il préférable d'avoir beaucoup d'itérations : en général non, car on a vu que la méthode de Newton est plutôt performante (quadratique) lorsque l'on est près de la solution. Dans le cas contraire, la convergence n'est plus que linéaire, donc beaucoup plus lente. Cependant, une taille d'incrément trop petite n'est pas réellement souhaitable, car au finale, elle nécessite un nombre important de calculs : résidu, raideur, résolution du système linéaire. La gestion du pas de temps optimum s'appelle le pilotage de l'algorithme, partie suffisamment importante dans la pratique pour être détaillée et expliquée.

23 Exemple d'application

On s'intéresse à un problème à deux inconnues.

Soit un problème variationnel discrétisé s'exprimant sous la forme suivante :

$$V_x^* 3 (U_x)^3 (U_y) + (4 U_x) V_y^* + 3 U_y V_x^* + V_y^* (U_y)^2 = 0 \quad \forall \left\{ V_x^*, V_y^* \right\} \quad (179)$$

1. Dans le cadre d'une résolution par la méthode de Newton, on demande d'écrire le résidu, et la matrice de raideur du problème.

Le résidu s'écrit en isolant les fonctions tests (ou virtuelles).

$$\begin{aligned} 0 &= \dot{V}_x^* 3 (U_x)^3 (U_y) + (4 U_x) \dot{V}_y^* + 3 U_y \dot{V}_x^* + \dot{V}_y^* (U_y)^2 \\ &= \langle \dot{V}_x^*, \dot{V}_y^* \rangle \begin{pmatrix} 3 (U_x)^3 (U_y) + 3 U_y \\ (U_y)^2 + (4 U_x) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (180)$$

La raideur est obtenue par dérivation par rapport aux ddl du problème :

$$-\left[\frac{\partial R}{\partial d\dot{d}l} \right] = - \begin{bmatrix} 9 (U_x)^2 (U_y), & 3 ((U_x)^3 + 1) \\ 4, & 2 U_y \end{bmatrix} \quad (181)$$

2. On part de la condition initiale : $U_x = -0.9$, $U_y = 2.1$, montrer qu'à la suite de la première itération on se rapproche d'une des solutions du problème $\{1, 2\}$

à la première itération on obtient :

$$\begin{aligned} (R^{(0)}) &= \begin{pmatrix} 3 * U_y * (U_x^3 + 1.) \\ U_y^2 + 4. * U_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.7073 \\ 0.81 \end{pmatrix} \text{ et} \\ -\left[\frac{\partial R}{\partial d\dot{d}l} \right]^{(0)} &= - \begin{bmatrix} 9 (U_x)^2 (U_y), & 3 ((U_x)^3 + 1) \\ 4, & 2 U_y \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -0.1530899999e2 & -0.813 \\ -4. & -4.1999999999 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (182)$$

après résolution on trouve :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \delta U_x \\ \delta U_y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -0.1066761349 \\ -0.9126082384e - 1 \end{pmatrix} \text{ d'où} \\ \begin{pmatrix} U_x^{(1)} \\ U_y^{(1)} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} U_x^{(0)} \\ U_y^{(0)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \delta U_x \\ \delta U_y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -0.9 \\ 2.1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -0.1066761349 \\ -0.9126082384e - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1.0066761349 \\ 2.0087391762 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (183)$$

On voit donc que l'on est plus près de la solution. Au niveau du nouveau résidu, on trouve :

$$(R^{(1)}) = \begin{pmatrix} 3 * U_y * (U_x^3 + 1.) \\ U_y^2 + 4. * U_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.1215030974 \\ 0.0083285379 \end{pmatrix} \quad (184)$$

On observe que l'on a également amélioré le résidu qui est maintenant plus proche de 0.

3. effectuer une deuxième itération : on doit observer une très bonne convergence.

En utilisant exactement la même démarche, on trouve :

$$\begin{aligned} (R^{(1)}) &= \begin{pmatrix} -0.1215030974 \\ 0.0083285379 \end{pmatrix} \text{ et} \\ -\left[\frac{\partial R}{\partial d\dot{d}l} \right]^{(1)} &= \begin{bmatrix} -0.1832084941e2 & 0.6048724439e - 1 \\ -4. & -4.0174783524 \end{bmatrix} \text{ d'où} \\ \begin{pmatrix} \delta U_x \\ \delta U_y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0.6603406639e - 2 \\ -0.8647754008e - 2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} U_x^{(2)} \\ U_y^{(2)} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -1.0000727283 \\ 2.0000914221 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (185)$$

et pour le nouveau résidu :

$$(R^{(2)}) = \begin{pmatrix} -0.0130926496e - 1 \\ 0.0000747835 \end{pmatrix} \quad (186)$$

4. *Effectuer une troisième itération et calculez l'ordre de convergence, par exemple pour U_x montrez que l'on a exactement une convergence quadratique à mesure que l'on s'approche de la solution exacte !*

On refait la même démarche on trouve :

$$\begin{aligned} (R^{(2)}) &= \begin{pmatrix} -0.0130926496e - 1 \\ 0.0000747835 \end{pmatrix} \text{ et} \\ - \left[\frac{\partial R}{\partial d\bar{l}} \right]^{(2)} &= \begin{bmatrix} -0.1800344123e2 & 0.0065460256e - 1 \\ -4. & -4.0001828442 \end{bmatrix} \text{ d'où} \\ \begin{pmatrix} \delta U_x \\ \delta U_y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0.7271971575e - 4 \\ -0.9141144958e - 4 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} U_x^{(3)} \\ U_y^{(3)} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -1.0000000086 \\ 2.0000000107 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (187)$$

et pour le nouveau résidu :

$$(R^{(3)}) = \begin{pmatrix} -0.0000015502e - 1 \\ 0.0000000083 \end{pmatrix} \quad (188)$$

On observe l'évolution de U_x

$$U_x^{(n)} \text{ pour } n=0..3 = \{-0.9 ; -1.0066761349 ; -1.0000727283 ; -1.0000000086\} \quad (189)$$

Pour étudier la convergence, on regarde l'évolution du rapport de deux incréments successifs $|S - U_x^{(n+1)}|$ et $|S - U_x^{(n)}|^\alpha$ avec $S = -1$ la solution et α l'ordre de convergence que l'on cherche. On pourra dire que la convergence est d'ordre α si le rapport est approximativement constant. Soit $\alpha = 1$ on a :

$$\frac{|S - U_x^{(n+1)}|}{|S - U_x^{(n)}|^\alpha} \approx 0.066; \approx 0.0108; \approx 0.118 \cdot 10^{-3} \quad (190)$$

Donc a priori ce n'est pas une convergence d'ordre 1 !!

Soit $\alpha = 2$ on a

$$\frac{|S - U_x^{(n+1)}|}{|S - U_x^{(n)}|^\alpha} \approx 0.66; \approx 1.63; \approx 1.62 \quad (191)$$

Là par contre on peut dire que le résultat est approximativement constant surtout pour les deux dernières itérations. La convergence est donc parfaitement du second ordre lorsque l'on s'approche de la solution !

24 Pilotage : paramètres et fonctionnement

Tout d'abord, nous allons examiner les différents paramètres potentiels du pilotage.

1. le critère d'arrêt des itérations : En général le critère d'arrêt s'effectue sur la valeur du résidu (R). On utilise pour cela une norme. La norme euclidienne n'est pas appropriée, car d'une part elle est assez coûteuse à calculer, mais surtout sa valeur dépend du nombre de degrés de liberté. Supposons que chaque $R_i = 0.1$, la norme vaudra $\|R\| = 0.1\sqrt{(m)}$, avec m le nombre de ddl. Dans la pratique on retient la norme infinie qui est simple à calculer et insensible au nombre de ddl $\|R\|_\infty = \max_{i=1}^m(|R_i|)$

Cependant, dans de nombreux cas, cette norme n'est pas suffisante. Supposons, deux calculs : le premier concerne l'équilibre d'un ouvrage d'art (un pont en béton armé pour une route à 4 voies par exemple), le second concerne la l'équilibre d'une structure tendue : par exemple un gilet de sécurité gonflé. Dans le premier cas, une erreur maxi de 100 daN est sans doute suffisante, dans le second cas l'ordre de grandeur est plutôt $0.1N$. Ce cas un peu extrême montre la nécessité d'utiliser des grandeurs relatives. Pour ce faire, la norme du résidu peut par exemple être rapportée au maximum des efforts imposés à la structure et des réactions. D'où la forme finale du test :

$$\frac{\|R\|_\infty}{\max(|\text{efforts}_{\text{externes}}, \text{reactions}|)} < 10^{-3} \quad (192)$$

2. le nombre d'itérations : On peut fixer plusieurs bornes :
 - (a) N_1 le nombre d'itérations au-delà duquel on considère que le calcul ne convergera plus, typiquement 10 à 16.
 - (b) N_2 le nombre d'itérations en deça duquel on considère que le calcul converge très bien. Typiquement 3 ou 4.
 - (c) N_3 le nombre d'itérations en deça duquel on considère que le calcul converge correctement, typiquement 7 à 10.

D'où : $N_2 < N_3 < N_1$

Un exemple d'utilisation des bornes précédentes en notant "N" le nombre d'itération en cours, est :

- $N > N_1$: Cas d'une divergence, on diminue le pas de temps en cours $\Delta t_{n+1} = 0.5 \Delta t_n$ et on recommence le calcul,
- convergence pour N tel que : $N < N_2$: Dans le cas cette bonne convergence est constatée 3 fois de suite (ou 4) le pas de temps est augmenté : $\Delta t_{n+1} = \sqrt{2} \Delta t_n$
- convergence pour N tel que $N_3 \leq N < N_1$: la convergence n'est pas très bonne, on diminue légèrement le pas de temps $\Delta t_{n+1} = 0.8 \Delta t_n$

3. la variation des ddl à chaque itération : Dans le cas où la norme de la variation des ddl à chaque itération est très petite (ex : $< 10^{-14}$) et que le résidu est assez loin de la solution il est préférable de diminuer le pas de temps, car la convergence de toute manière sera très longue, donc dépassera sans doute N_2
4. la vitesse de convergence : en étudiant l'évolution du rapport

$$\frac{\|R\|_\infty(i+1)}{\|R\|_\infty(i)}$$

on peut, en extrapolant, en déduire, combien d'itérations seront nécessaires pour obtenir la réponse. Si l'on pense que ce nombre dépassera N_1 , on arrête le calcul de l'incrément et on

diminue le pas de temps, en particulier si le résidu a tendance à systématiquement augmenter, le calcul peut être stoppé.

Ce type de prédiction débute après un certain nombre d'itérations : par exemple > 4

5. facteur de sur ou sous relaxation : au niveau de chaque itération, la formule suivante de mise à jour est utilisée :

$$(X_{i+1}) = (X_i) + \alpha([K]^{-1} (R)) \quad (193)$$

α est le coefficient de sous relaxation ($\alpha < 1.$) ou de sur relaxation $\alpha > 1$. Le choix d' α est guidé par l'expérience de calculs analogues

6. erreur sur le trajet de chargement : Cette partie concerne plus spécifiquement la dynamique, bien qu'elle peut s'appliquer à tous les cas.

Dans le cas d'un calcul classique temporel, l'équilibre est recherché en des temps particuliers t_i . Or entre deux temps successifs, la position est sensée évoluer en fonction du temps selon un certain schéma d'avancement temporel. Cependant, par exemple, pour le comportement matériel (loi de comportement) on considère en général, par simplicité, que l'évolution est linéaire en fonction du temps en particulier $\dot{X} = \Delta X / \Delta t$. Il est intéressant d'examiner si l'équilibre à mi-parcours n'est pas trop faux, ce qui renseigne sur l'erreur en trajet de chargement que l'on fait. En particulier, en dynamique, du au fait qui ne soit pas nécessaire d'avoir des conditions minimales d'isostatisme, des mouvements solides de grandes ampleurs (rotations) peuvent apparaître, pouvant entraîner des erreurs non négligeables au niveau de l'intégration de la loi de comportement. Plus généralement, l'examen de la valeur du résidu pour $(X_{n+1} + X_n) / 2$. par exemple, apporte ainsi une information sur la non-linéarité de l'équilibre. Si le déséquilibre est important, le pas de temps est réduit et on recommence le calcul.

7. Enfin, il est possible également d'utiliser une procédure de "line-search" pour augmenter la vitesse de convergence sur certaines itérations. Cette technique sera étudiée plus en détail dans un paragraphe particulier.

Sixième partie

Eléments de classifications des équations aux dérivées partielles

24.1 Introduction : notions d'équations hyperboliques, paraboliques et élliptiques

Les EDP sont classiquement classées en 3 catégories :

1. hyperboliques : par exemple l'équation de propagation d'ondes,
2. paraboliques : par exemple une équation de diffusion (thermique transitoire),
3. élliptiques : élasticité ou équation de Laplace.

Nous décrivons quelques caractéristiques typiques des membres de cette classification.

Cas hyperboliques La régularité de la solution dépend directement de la régularité des données. En particulier, lorsque les conditions limites présentent de brusques variations cela entraîne des solutions avec également de brusques variations (exemple : conditions limites avec des discontinuités en temps ou en espaces au niveau de l'équation des ondes). Dans le cas d'une équation non-linéaire, la solutions peut présenter de brusques variations même en présence de conditions limites régulières!

Dans un problème hyperbolique (temporel), les informations se propagent à une certaine vitesse finie (exemple : vitesse d'onde).

Cas élliptiques Les caractéristiques des équations élliptique sont opposées au cas hyperbolique. A priori, la solution est très régulière (sans brusque variations). Même si les conditions limites présentent des discontinuités, leurs influences s'estompent rapidement (équivalent au principe de St Venant en mécanique). Les conditions limites en tout point, affectent globalement tous la solution, ceci de manière quasi-instantanée. Il peut cependant y-avoir des singularités : (ex : des frontières géométriques avec des angles entrants (coins)), ce qui est par exemple le cas de la mécanique de la rupture. Néanmoins, ces conditions de singularités sont difficiles à rendre compte naturellement avec une équation élliptique.

Cas parabolique L'exemple typique est celui de problèmes en temps, en général réguliers en espace, mais qui peuvent également avoir des singularités à des coins. Ainsi, le cas parabolique est intermédiaire entre les cas hyperbolique et élliptique. Considérons par exemple le cas de la thermique transitoire. Dès que l'on chauffe, instantanément l'ensemble de la structure réagit : un fort gradient près de la source, un très faible gradient loin de la source. Cette réponse diffère du cas hyperbolique où rien ne se passe en dehors de la zone touchée par l'onde.

L'intérêt de pouvoir alors classer une équation représentant un phénomène physique est de pouvoir prédire à l'avance son comportement au regard des singularités d'où le choix des méthodes numériques les plus adaptées pour résoudre l'équation.

Nous allons maintenant décrire cette classification d'une manière plus systématique au travers de l'étude de l'existence de lignes de discontinuité.

24.2 Etude des lignes de discontinuité

Considérons la question : existe-t-il des lignes ou des surfaces internes aux travers desquelles les dérivées de la solution sont discontinues? L'existence ou non de ces lignes indique l'existence potentielle de discontinuités, qui est un élément central dans la classification du type d'équation.

Soit un système d'équations du premier ordre :

$$\begin{cases} A_1 U_{,x} + B_1 U_{,y} + C_1 V_{,x} + D_1 V_{,y} = E_1 \\ A_2 U_{,x} + B_2 U_{,y} + C_2 V_{,x} + D_2 V_{,y} = E_2 \end{cases} \quad (194)$$

Remarques

— Se rappeler qu'un système d'équations différentielles d'ordre n peut toujours se mettre sous la forme de n systèmes du premier ordre en prenant en variables intermédiaires des dérivées d'ordre i ; i entre 1 et $n-1$,

— Le système (194) est appelé quasi-linéaire, du fait qu'il est linéaire en dérivées partielles,

— $A_\alpha, B_\alpha, C_\alpha, D_\alpha$ sont des fonctions de x, y, U, V .

On cherche une ligne ou courbe de direction, au travers de laquelle la solution est discontinue c'est-à-dire $U_{,x}$ et $U_{,y}, V_{,x}, V_{,y}$ n'ont pas les mêmes valeurs de chaque côté de la ligne de discontinuité.

Soit "s" la direction (la tangente) courante de la ligne de discontinuité et "t" la direction normale. Effectuons un changement de variable pour calculer les grandeurs le long de la ligne.

$$U_{,s} = U_{,x}x_{,s} + U_{,y}y_{,s} \quad (195)$$

$$V_{,s} = V_{,x}x_{,s} + V_{,y}y_{,s} \quad (196)$$

Ce qui conduit à l'équation matricielle globale :

$$\begin{bmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ x_{,s} & y_{,s} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_{,s} & y_{,s} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} U_{,x} \\ U_{,y} \\ V_{,x} \\ V_{,y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ U_{,s} \\ V_{,s} \end{pmatrix} \quad (197)$$

Il existe plusieurs solutions si le déterminant est nul, c'est-à-dire :

$$III = a (y_{,s})^2 + 2 b x_{,s} y_{,s} + c (x_{,s})^2 = 0 \quad (198)$$

$$\text{avec } a = A_2 C_1 - A_1 C_2, \quad c = B_2 D_1 - B_1 D_2 \quad (199)$$

$$\text{et } 2 b = B_1 C_2 - B_2 C_1 + A_1 D_2 - A_2 D_1 \quad (200)$$

On divise III par $(x_{,s})^2$ et on tiens compte du fait que

$$\frac{y_{,s}}{x_{,s}} = \frac{dy}{dx} = y_{,x}$$

ce qui conduit à une équation caractéristique :

$$a (y_{,x})^2 + 2 b y_{,x} + c = 0 \quad (201)$$

La solution dépend des racines :

$$y_{,x} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - a c}}{a}$$

Discussion en fonction de $b^2 - a c$:

1. Si $b^2 - a c < 0$ cela entraîne $y_{,x}$ imaginaire. Dans ce cas il n'y a pas de ligne de discontinuité des dérivées : le système d'équations (194) est elliptique.
2. Si $b^2 - a c > 0$, deux lignes existent, il peut y avoir discontinuité : le système d'équations (194) est hyperbolique. Les lignes sont appelées les "caractéristiques".
3. Si $b^2 - a c = 0$ c'est le cas limite où une ligne existant. On se situe à la limite entre les deux premiers cas : le système d'équations (194) est parabolique.

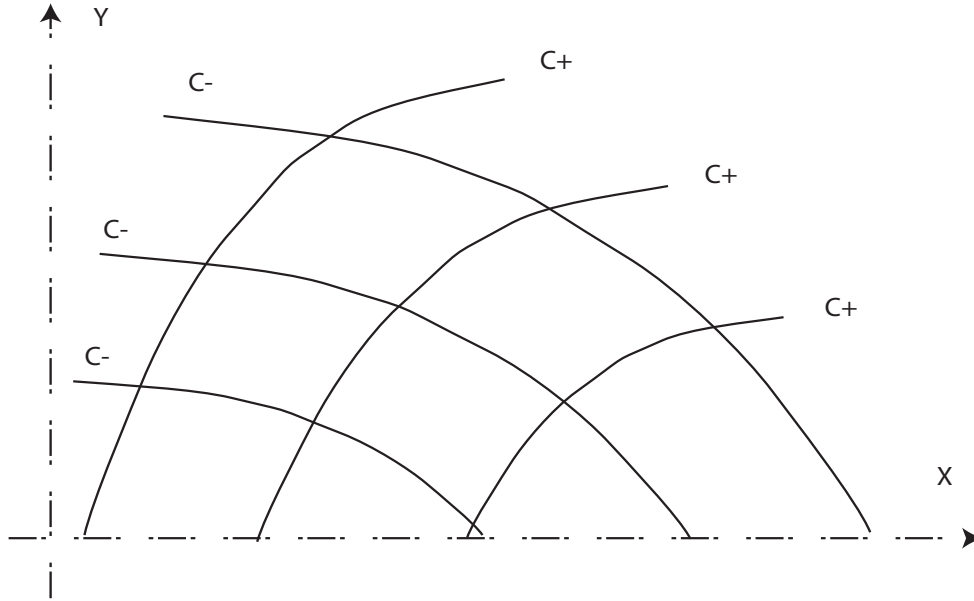


FIGURE 19 – exemples de lignes caractéristiques

Les différents cas se résument dans le tableau (3).

TABLE 3 – Classement des équations différentielles

$b^2 - a c$	EDP	classification	solution
> 0	2 familles de caractéristiques	hyperbolique	dérivées discontinues
$= 0$	une famille	parabolique	
< 0	pas de caractéristique réelle	elliptique	solution régulière

24.3 Application à l'équation des ondes en 1D

Soit l'équation des ondes en 1D

$$U_{,t^2} = c^2 U_{,x^2}$$

En prenant $f = U_{,x}$, $g = U_{,t}$ l'équation devient :

$$g_{,t} = c^2 f_{,x} \text{ et } f_{,t} = g_{,x} \tag{202}$$

d'où la relation matricielle correspondante à cf.(equ :eld3) :

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ c^2 & 0 & 0 & -1 \\ x_{,s} & t_{,s} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_{,s} & t_{,s} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} f_{,x} \\ f_{,t} \\ g_{,x} \\ g_{,t} \end{pmatrix} \quad (203)$$

Remarquons qu'ici les deux dimensions sont x et t . On obtient comme équation caractéristique

$$(x_{,s})^2 - c^2 (t_{,s})^2 = 0 \text{ ou } (x_{,t})^2 = c^2$$

d'où 2 caractéristiques :

$$x_{,t} = \dot{x} = \pm c$$

qui forment dans le plan $(x,c.t)$ un réseau de lignes à $\pm 45^\circ$ donc orthogonaux. Ces lignes représentent les fronts d'onde classiques.

Lorsque l'on traverse la ligne caractéristique, $U_{,x}$ c'est-à-dire en petite déformation ε , et $U_{,t}$ peuvent être discontinues, ce qui est en général le cas !

24.4 Application à une équation générique elliptique

Soit l'équation suivante :

$$G_1 U_{,xx} + G_2 U_{,yy} = 0$$

qui représente par exemple l'équilibre élastique ou l'équation de Laplace (en fonction de G_1 et G_2).

De manière à ne considérer que des dérivées premières, on pose :

$$f = U_{,x}$$

,

$$g = U_{,y}$$

d'où la relation matricielle à cf.(equ :eld3) :

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ G_1 & 0 & 0 & G_2 \\ x_{,s} & y_{,s} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_{,s} & y_{,s} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} f_{,x} \\ f_{,y} \\ g_{,x} \\ g_{,y} \end{pmatrix} \quad (204)$$

La condition $\det[] = 0$ conduit à :

$$G_1 (x_{,s})^2 + G_2 (y_{,s})^2 = 0$$

ou encore

$$(y_{,x})^2 = -\frac{G_1}{G_2}$$

Si G_1 et G_2 sont tous deux positifs (cas de l'élasticité par exemple) ou de même signe, il n'y a pas de solution réelle, le système est elliptique.

Si la répartition de G_1 et G_2 n'est pas homogène, comme dans le cas d'une discontinuité physique, on peut avoir une discontinuité, mais exactement à l'endroit de la discontinuité des G_α .

NB

1. $U_t = \alpha U_{,xx}$ est un exemple d'équation parabolique. On observe dans ce cas :
 - (a) une seule caractéristique existe,
 - (b) la courbe caractéristique est parallèle à l'axe des t ce qui signifie que l'information se transmet instantanément,
 - (c) Une discontinuité ne peut exister qu'en espace, et seulement s'il y a une discontinuité en données.

24.5 Exercices d'application

1. Montrez que l'équation de la conduction $U_{,xx} = \alpha U_{,t}$ avec $\alpha > 0$ est parabolique.
2. Quelle est la classification de l'équation de la dynamique des poutres : $U_{,xxxx} = \alpha U_{tt}$

24.6 Bibliographie

On se reportera par exemple à l'ouvrage de Belytscho () pour plus d'informations.

Septième partie

Particularités liés à l'intégration numérique

25 Remarques sur les méthodes d'intégrations

25.1 introduction

La formulation variationnelle induit naturellement le calcul de diverses intégrales. Sauf cas particulier, ces intégrations sont effectuées numériquement selon la méthode de Gauss pour la majorité des cas. L'utilisation de n points d'intégration permet d'intégrer exactement un polynôme de degré $2n-1$. Par contre la position des points est fixée par la méthode. Lorsque l'on veut imposer la position des points d'intégration, par exemple aux noeuds on utilise la méthode de Newton-Cote. Cette dernière méthode est moins précise, n points d'intégration ne permettant d'intégrer qu'un polynôme de degré $n-1$.

La position des points d'intégration constitue le lieu où seront calculées les différentes grandeurs secondaires. Ainsi pour un problème de mécanique, les contraintes et déformations ne seront calculées qu'aux points d'intégration. Par la suite si l'on désire connaître leurs valeurs pour une autre position, il sera nécessaire d'extrapoler (ou interpoler) les valeurs connues aux points d'intégrations. Ces nouvelles valeurs seront donc moins précises que celles aux points d'intégrations. Cette technique est par exemple appliquée pour le tracé des isovaleurs.

NB : *Cependant il est possible d'appliquer des techniques particulières qui permettent d'améliorer les résultats, comme dans le cas de la méthode de remontée aux contraintes utilisé pour le calcul d'erreur. Notons cependant que cette technique est coûteuse en temps de calcul. Elle n'est donc pas utilisée systématiquement.*

25.2 Quand faut-il utiliser la méthode de Newton-Côte par rapport à la méthode de Gauss

Supposons par exemple que l'on utilise une géométrie de coque ou plaque. Il peut-être intéressant de connaître la valeur des contraintes ou déformations sur les faces supérieures ou inférieures de la plaque. Dans ce cas il sera nécessaire d'utiliser une méthode du même type que celle de Newton-Cote, pour spécifier la position d'un ou plusieurs points d'intégration sur les peaux. Ainsi l'on gagne en précision de localisation du point d'intégration, mais l'on perd en degré d'interpolation.

25.3 Notion d'intégration exacte / sous-intégrations : en 1D, 2D ou 3D, en petites et en grandes transformations

D'une manière générale, le fait d'intégrer exactement un polynôme d'ordre $2n-1$ ou $n-1$ selon la méthode, montre que pour le cas de polynômes de degré supérieur, la méthode conduira à une approximation du résultat exacte. On parle dans ce cas d'intégration réduite ou de sous-intégration. L'utilisation d'une intégration réduite est justifiée tant que l'erreur induite reste bien inférieure à la

précision demandée au niveau de l'équilibre globale. Cependant la vérification du niveau d'erreur est actuellement rarement effectuée, le nombre de point d'intégration étant plutôt issue de l'expérience.

Pour simplifier soit le cas d'un calcul de mécanique 1D. La géométrie est discrétisée par une interpolation de Lagrange C^0 de degré m : classiquement $m=1, 2$ et plus rarement 3 (cubique). La déformation est ainsi de degré $m-1$, et de même pour la contrainte et la vitesse de déformation virtuelle. La fonction à intégrer est ainsi de degré $(m-1)^2$ auquel il faut ajouter le jacobien. Supposons $m=1$, la fonction à intégrer est constante, dans ce cas un seul point d'intégration sera suffisant. Supposons $m=2$, la fonction à intégrer est quadratique, le jacobien est linéaire, ainsi la fonction complète est cubique et 2 points d'intégration seront suffisants. Dans le cas d'une interpolation 2D ou 3D le problème est plus complexe. En effet supposons par exemple une interpolation 2D utilisant les polynômes de Lagrange C^0 de degré 1. Lorsque l'on parle d'interpolation linéaire en fait il s'agit d'interpolation bilinéaire. Ainsi, la déformation, malgré le fait qu'elle correspond à une dérivée partielle du déplacement n'induit pas de diminution de l'ordre de la fonction finale. Par exemple ε_{11} est une fonction constante en η^1 mais linéaire en η^2 !. Ainsi avec une simple loi élastique, le terme de puissance interne $\sigma : \overset{*}{D}$ qui comprend toutes les déformations réelles et virtuelles est une fonction de degré 2 en η^1 et η^2 . Chaque vecteur de base \vec{g}_i est constant suivant i et linéaire suivant l'autre direction d'où un jacobien qui est tout calcul fait linéaire (dans le cas d'un repère naturel orthogonal). En résumé la fonction finale à intégrer dans le repère de référence est de degré 3 selon chaque variable. Avec 2x2 points d'intégration, on obtient l'intégrale exacte. En suivant la même logique, dans le cas 3D la fonction à intégrer est de degré 4 sur chaque variable (degré 2 pour le terme de puissance interne et de degré 2 pour le jacobien). Avec 2x2x2 points d'intégration, on obtient une sous-intégration. En fait pour une intégration exacte il faut 3x3x3=27 points. Dans la pratique on se contente de 8 points d'intégrations pour diminuer les temps de calcul, qui sont dans ce cas globalement plus de 3 fois moindre qu'avec 27 points !

Notons que dans le cas où le repère naturel n'est pas orthogonal, le jacobien devient à lui seul une fonction complexe, généralement non polynomiale. Considérons par exemple un quadrangle bilinéaire d'angles aux sommets non droits et non égaux ce qui est le cas général. Le repère naturel obtenu est ainsi non orthogonal. On obtiens : $|J| = \|\vec{g}_1 \otimes \vec{g}_2\| = \sin(\alpha) \|\vec{g}_1\| \cdot \|\vec{g}_2\|$ où α est l'angle non droit entre les deux vecteurs. Le résultat n'est donc pas un polynôme classique. Une autre façon d'aborder ce résultat et d'effectuer le produit vectoriel de manière classique ce qui conduira à des composantes quadratiques en θ_β (coordonnées locales de l'élément de référence) ensuite le jacobien étant égal à la norme du produit vectoriel, il nécessite l'extraction d'une racine carrée. Ainsi le résultat obtenu n'est pas polynomiale. En théorie, il n'est donc plus possible d'obtenir une solution exacte, quelque soit le nombre de point d'intégration retenu. En pratique, le résultat obtenue (de l'intégration au travers de la méthode de Gauss) sera d'autant plus précis que l'angle α sera faible, ou encore que l'élément sera peut déformé.

Considérons le calcul de la déformation d'un simple cube dont un seul noeud est soumis à un déplacement, ce qui conduit à une déformation fortement in-homogène. Le fait d'utiliser une intégration complète permet de simuler des déformations de 20% supérieures au cas d'une intégration réduite 2x2x2, ce qui s'explique par une meilleur prise en compte de la forme finale avec une intégration complète. Cet exemple montre que le choix du nombre de point d'intégration souvent issue d'un compromis entre vitesse, précision, facilité ...

25.4 Singularité de la matrice de raideur : condition sur le nombre de point d'intégration minimum, cas d'un élément, cas de plusieurs éléments

Lorsque le nombre de point d'intégration est trop faible, cela peut entraîner une singularité de la matrice de raideur. Soit $[K^{rs}]$ la matrice de raideur dont la dimension est n =nombre de degré de liberté. En fait l'intégration correspond à une somme de m valeur de la fonction à intégrer multipliées par les poids d'intégration, m étant le nombre de point d'intégration. La fonction à intégrer est la somme $\frac{\partial \sigma^{ij}}{\partial d d l_r} \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial d d l_s}$: c'est-à-dire i et j variant de 1 à la dimension du problème cela fait 6 grandeurs en 3D, 3 grandeurs en 2D et 1 grandeur en 1D. En résumé par exemple pour un problème 3D, les éléments de la matrice de raideur sont des combinaisons linéaires de $6m$ valeurs différentes, le rang de la matrice ne peut donc être supérieur à $6m$. Cela fournit une condition nécessaire, mais pas suffisante, pour établir le nombre minimal de point d'intégration pour éviter la singularité de la matrice de raideur. Supposons pour fixer les idées, un seul hexaèdre linéaire bloqué isostatiquement. Remarquons tout d'abord que la matrice de raideur hors conditions limites géométriques doit naturellement être singulière d'ordre 6, ce qui traduit le fait qu'elle doit pouvoir représenter également tous les mouvements solides. Après mise en place des conditions limites géométriques, et résolution on espère obtenir une seule solution ce qui nécessite que la matrice K ne soit pas singulière elle doit donc avoir un rang égal à $n-6=24-6=18$. Supposons que l'on utilise 1 point d'intégration, d'après la remarque précédente, le rang de la matrice ne peut-être supérieur à $1 \cdot 6=6$, elle sera donc singulière! Si l'on utilise 8 points d'intégration, c'est-à-dire 2 selon chaque axe, la condition devient $\text{rang}[K] \leq 8 \cdot 6 = 48$. Dans ce cas on peut espérer une matrice non singulière. D'une manière pratique c'est effectivement 8 points d'intégration que l'on utilise classiquement. Le raisonnement présenté peut s'étendre facilement à tous les types d'éléments.

L'exemple précédent illustre la nécessité de vérifier l'existence d'un nombre minimal de point d'intégration. Cependant cette vérification n'est pas suffisante. En effet supposons que la loi de comportement et les fonctions d'interpolation sont ainsi définies qu'elles conduisent à des grandeurs σ^{ij} et ε_{ij} lié, par exemple égales pour fixer les idées. Dans ce cas le nombre de grandeur indépendantes, générateur des composantes de la matrice est réduit à m , et même avec 8 points d'intégration, la matrice finale devient singulière. Le cas présenté est peu plausible cependant il n'est pas impossible d'obtenir de tel singularité lorsque le comportement physique est très particulier.

Maintenant étudions se qui se passe lorsque l'on considère plusieurs éléments. En fait le nombre global de point d'intégration augmente proportionnellement avec ce nombre d'élément. Avec 10 hexaèdres on dispose de $10 \cdot 8 \cdot 6 = 480$ relations. Par contre les noeuds étend en général commun à plusieurs éléments, leur nombre augmente nettement moins rapidement que le nombre d'élément. Ainsi, à partir d'un certain nombre d'élément on peut espérer avoir une matrice globalement non singulière même si elle singulière pour 1 seul élément. Un exemple classique est celui des éléments quadratiques incomplets. soit un hexaèdre quadratique incomplet, dont le nombre de degré de liberté est 60. Avec 8 points d'intégration, la raideur est singulière pour 1 élément : $8 \cdot 6 > 60 - 6$. Dans le cas de deux éléments collés, le nombre de noeud est 32 d'où 96 degré de liberté. Le rang de la matrice de raideur doit donc être de 90 et l'on a $16 \cdot 6 = 96$ relations. L'assemblage de deux éléments quadratiques incomplet est donc non singulier.

Notons cependant comme nous l'avons vu précédemment que l'utilisation de $2 \cdot 2 \cdot 2$ points d'intégration pour l'hexaèdre quadratique conduit à une sous-intégration donc à une approximation des intégrales. Dans la pratique, on s'aperçoit que cette approximation est suffisante dans bien des cas et compte tenu du gain de temps apporté par ce choix d'intégration réduite comparé à une intégration complète avec 27 points d'intégration elle est en générale retenue.

25.5 Modes d'hourglass, stabilisation

Dans le cas de calcul en dynamique, le volume de calcul est d'autant plus important que le nombre de pas de temps augmente. D'autre part il est souvent intéressant d'utiliser des éléments linéaires, et non quadratique pour des raisons de stabilité numériques. Ceci conduit généralement à un grand nombre d'élément pour palier à la qualité médiocre des éléments linéaire. De manière à diminuer encore le nombre de calcul, l'idée est d'utiliser un seul point d'intégration par élément. La matrice de raideur est dans ce cas singulière, et les déplacements obtenus qui ne sont pas physiques sont appelé des modes d'hourglass en référence avec certain modes de déformation des verres qui forment des motifs périodiques. Pour supprimer ces modes d'hourglass, on modifie arbitrairement la matrice de raideur obtenu avec 1 point d'intégration, on parle de blocage des modes d'hourglass (qui sont aussi appelés spurious mode, mode à énergie nulle ou encore mode solide). Pour bloquer les modes d'hourglass, plusieurs solutions existent et il n'est pas question d'en faire une liste exhaustive. Cependant un exemple peut illustrer ces méthodes. Une solution est ainsi de déterminer une fois pour toute (c'est-à-dire indépendamment du chargement) les composantes des modes d'hourglass qui sont des vecteurs propres de la matrice K correspondant à des valeurs propres nulle. Ensuite dans le repère des vecteurs propres on modifie la valeur propre initialement nulle, de manière à bloquer les déplacements d'hourglass. En fait, le blocage des modes d'hourglass modifie le résultat final, il n'est donc pas anodin. Cependant le gain de temps de calcul apporté par l'utilisation d'élément sous-intégré est tellement important, que ces éléments sont très employés.

25.6 Utilisation de la sous-intégration pour relâcher les bloquages : en flexion dans le cas d'éléments plaques et coques, pour les comportements matériels dit incompressibles

Une dernière remarque concerne les phénomènes de blocage d'élément pour les formulations coques ou plaques par exemple ou encore les blocages dues à la modélisation de comportement dit incompressible. Dans ces deux cas, on observe des raidissements du comportement numérique, contraire à l'observation expérimentale. On peut expliquer les phénomènes numériques par l'apparition d'une grandeur qui prend une importance démesurée par rapport au autres grandeurs, d'où un mauvais conditionnement de la matrice de raideur finale, qui conduit à des résultats erronés. Dans le cas des plaques, la raideur peut se décomposer en 3 parties, la raideur de membrane, la raideur de flexion et la raideur de scission. Lorsque l'épaisseur de la plaque diminue, la raideur de scission tend pour certain élément, à supplanter fortement la raideur de flexion due aux limitations du modèle cinématique. Pour remédier à ce phénomène de blocage (locking) une solution est de sous-intégrer suffisamment la raideur de scission de manière à la rendre volontairement singulière. Ainsi la solution finale ne peut plus être imposé par la scission. On parle de sous-intégration sélective dans le cas où seule la raideur de scission est sous-intégré. Cette technique permet d'obtenir des éléments qui résistent aux phénomènes de blocage en flexion, qui constitue un des problèmes les plus important dans le développement d'élément coque ou plaque. Dans le cas du développement d'élément dédié aux matériaux dit incompressible, le problème est du même ordre. La raideur peut se décomposer en

deux parties, une partie relative au changement de volume, c'est-à-dire due à la pression hydrostatique, et une seconde partie relative au cisaillement ou à la viscosité. Lorsque le matériau présente un module de compressibilité très important par rapport au module de cisaillement statique ou dynamique, on observe numériquement que la raideur relative à la pression tend à "écraser" la seconde partie. Là encore une technique est de sous-intégrer suffisamment la raideur de pression de manière à la rendre singulière. Notons cependant que les formulations mixtes constituent un cadre variationnel également performant pour régler ce genre de problème.

Huitième partie

Formulations mixtes

26 Introduction

Cette partie concerne le cas de la prise en compte simultanée de plusieurs équations aux dérivées partielles éventuellement couplées.

27 Exemple de la mécanique

Tout d'abord recensons les différentes équations.

1. L'équation d'équilibre locale :

$$\mathbf{div}(\boldsymbol{\sigma}) + \mathbf{F}_{(volume)} - \rho\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{0} \quad (205)$$

ρ étant la masse volumique, $\boldsymbol{\gamma}$ l'accélération, et en composantes :

$$\sigma^{ij}|_j + F^i - \rho \gamma^i = 0 \quad (206)$$

2. la loi de comportement : d'une manière générale sous forme implicite

$$f(\boldsymbol{\sigma}, \dot{\boldsymbol{\sigma}}, \boldsymbol{\varepsilon}, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}, \dots) = \mathbf{0} \quad (207)$$

ou encore souvent exprimée sous une forme explicite :

$$\boldsymbol{\sigma} - f(\dot{\boldsymbol{\sigma}}, \boldsymbol{\varepsilon}, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}, \dots) = \mathbf{0} \quad (208)$$

f étant une fonction spécifique à la loi de comportement retenue, pouvant être très fortement non linéaire !

Le cas le plus simple est la loi linéaire de Hooke :

$$\sigma^{ij} - E^{ijkl} \varepsilon_{kl} = 0 \quad (209)$$

3. les relations déformations - déplacements, qui définissent la mesure de déformation retenue. Les 4 mesures les plus courantes sont la mesure de l'ingénieur ($\delta L/L_0$), la mesure de Green-Lagrange, celle d'Almansi, et enfin la mesure logarithmique et une approximation type "mesure logarithmique cumulée". Dans le cas des éléments finis on évite la première mesure qui n'est pas une "vraie mesure" (cf. 20). Les deux mesures qui suivent sont équivalentes pour les composantes, seule le repère de calcul change (repère initiale pour la mesure de Green-Lagrange, et finale pour la mesure d'Almansi). Enfin la dernière correspond à l'intégration de la vitesse de déformation dans un repère particulier mobile, le repère logarithmique. D'une manière générale, elle ne peut s'exprimer simplement, on peut la présenter sous forme d'une fonction non-linéaire des métriques initiales et finales qui dépendent des coordonnées associées. En résumé, on peut dans tous les cas écrire une relation générale du type :

$$\boldsymbol{\varepsilon} - h(\mathbf{X}_{t=0}, \mathbf{X}_t) = 0 \quad (210)$$

Par exemple dans le cas de la mesure d'Almansi :

$$\varepsilon_{kl} - \frac{1}{2}(g_{ij}(t) - g_{ij}(t=0)) = 0 \quad (211)$$

qui devient en hypothèses de petites déformations :

$$\varepsilon_{kl} - \frac{1}{2}(U_i|_j + U_j|_i) = 0 \quad (212)$$

4. les conditions limites géométriques :

$$\mathbf{X} - \mathbf{X}_{impose} = 0 \quad (213)$$

5. les condition limites mécaniques (en efforts) :

$$-\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} + \mathbf{f}_{surfacique} = \mathbf{0} \quad (214)$$

Les inconnues du problème sont les positions finales \mathbf{X} (trois composantes), le champ de déformation $\boldsymbol{\varepsilon}$ (6 composantes), le champ de contraintes $\boldsymbol{\sigma}$ (6 composantes), d'où l'équivalents de 15 inconnues scalaires.

Habituellement, dans une résolution classique en "déplacement", on garde comme inconnue uniquement le champs de positions finales, et on utilise de manière explicite la relation (210) pour exprimer les déformations en fonction des positions, puis de même la relation (208) pour exprimer les contraintes. Ainsi au final l'équation (205) dépend uniquement des inconnues \mathbf{X} . Dans ce cas, les relations (210) et (208) sont satisfaites exactement et la relation (205) est satisfaite de manière approchée sous forme variationnelle.

En fait le choix des inconnues que l'on garde est un peu arbitraire, et de manière théorique on pourrait d'une part choisir d'autres inconnues : par exemple les contraintes ce qui conduit à une formulation en "contrainte" ou encore l'ensemble des inconnues : ce qui conduit alors à une formulation "mixte" dans le sens où l'on mixte des inconnues de signification différentes. Ce dernier cas est le cas le plus générale. Pour ce faire, on doit également utiliser les relations (210) et (208) sous forme variationnelle.

Supposons que la méthode variationnelle retenue soit celle de Galerkin. Elle représente en fait, une opération de projection. On doit ce poser la question : sur quelle espace de fonctions (génératrices) chaque relation est projetée. Ici encore, il s'agit théoriquement d'un choix arbitraire. D'une manière "empirique" Il me semble qu'un choix cohérent avec l'objectif d'avoir un problème bien posé, est de choisir la projection qui permet d'obtenir une solution : certaine relation ne sont pas suffisantes pour isoler une solution.

Illustration très simple pour un système d'équation linéaire Soit la relation vectorielle 2D entre \mathbf{a} et \mathbf{b} : $a^1 \cdot b^1 + a^2 + b^1 + 10 = 0$. et $b^1 + b^2 = 0$. Supposons connues le vecteur \mathbf{a} , l'application de la relation vectorielle donne une solution unique pour le vecteur \mathbf{b} . L'inverse n'est pas vrai ! Il semble donc préférable de considérer que ces relations sont des équations de l'inconnues \mathbf{b} , \mathbf{a} constituant les coefficients. Le même raisonnement peu être étendu à un système d'EDP.

Par exemple, on sait que la relation (205) projeté sur les vitesses virtuelles, permet normalement (sauf cas particulier) d'obtenir une solution du solide en équilibre (statique ou "dynamique").

Un autre élément de choix serait que la forme obtenue corresponde à une grandeur physique (ex : une énergie, une puissance ...), c'est le cas du PPV pour la relation (205) qui, projetée sur l'espace des vitesses virtuelles, conduit à la puissance virtuelle.

En conclusion, en suivant ces principes (empiriques et arbitraires) la relations (210) peut-être projetée sur l'espace des vitesse de contraintes virtuelles et la relation (208) peut-être projetée sur l'espace des vitesses de déformation virtuelles (associées aux inconnues de déformation, et non associées aux inconnues de déplacement ou de position).

Ces choix s'expriment sous la forme :

$$\int_D (\mathbf{div}(\boldsymbol{\sigma}) + \mathbf{F}_{(volume)} - \rho\boldsymbol{\gamma}) \cdot (\mathbf{V}^*) dv = 0 \quad (215)$$

$$\int_D (\boldsymbol{\sigma} - f(\dot{\boldsymbol{\sigma}}, \boldsymbol{\varepsilon}, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}, \dots)) : (\boldsymbol{\varepsilon}^*) dv = 0 \quad (216)$$

$$\int_D (\boldsymbol{\varepsilon} - h(\mathbf{X}_{t=0}, \mathbf{X}_t)) : (\boldsymbol{\sigma}^*) dv = 0 \quad (217)$$

avec les grandeurs virtuelles \mathbf{V}^* , $\boldsymbol{\varepsilon}^*$, $\boldsymbol{\sigma}^*$ associées respectivement aux inconnues \mathbf{X} , $\boldsymbol{\varepsilon}$, $\boldsymbol{\sigma}$.

D'une manière pratique, il est courant d'utiliser une formulation mixte fondée sur les deux premières équations ou sur la première et la dernière. C'est le cas par exemple de la formulation type "hellinger-Reissner" qui est beaucoup utilisée pour les coques et plaque, pour mieux prendre en compte le cisaillement inter-lamellaire et/ou pour réduire les problèmes de blocages dans le cas des coques et plaques minces.

28 Extension à un système d'EDP quelconques

Supposons plusieurs phénomènes physiques, agissants simultanément, représentés chacun par une EDP. Dans le cas où ces phénomènes mettent en oeuvre des inconnues différentes et indépendantes pour chacun, les EDP sont indépendantes et les formes variationnelles équivalentes sont évidentes à écrire. Le cas de la mécanique vue précédemment est plus compliqué en ce sens que les EDP ne sont pas indépendantes, et qu'elles font intervenir les mêmes variables.

D'une manière générale, dans le cas de la prise en compte simultanée de plusieurs EDP non-indépendantes et utilisant un même jeux d'inconnues, la seule difficulté est le choix (arbitraire) de l'espace de projection (dans le cas d'une forme de Galerkin).

29 Exemple du couplage fort thermo-mécanique

Le couplage fort signifie que la thermique influence la mécanique et que la mécanique influence la thermique. Dans de nombreux cas la mécanique influence peu la thermique, on parle alors de couplage faible, et la méthode de résolution consiste à d'abord calculer l'équilibre thermique, puis celui de la mécanique en tenant compte du résultat thermique. Dans le cas d'un couplage fort, cette méthode normalement ne fonctionne pas, il est nécessaire de prendre en compte simultanément, le problème de mécanique et le problème de thermique.

Neuvième partie

Problèmes sous contraintes

30 Introduction

Cette partie concerne la mise en place de contraintes sur des degrés de liberté, par l'intermédiaire de multiplicateurs de Lagrange, de pénalisations et autres méthodes dérivées.

Soit un problème a priori non linéaire qui après discrétisation se présente sous la forme de

$$\langle \dot{ddl} \rangle^* (R) = 0 \quad (218)$$

Supposons que l'on souhaite également imposer aux degrés de liberté une condition qui s'exprime sous la forme d'un système d'équation.

$$(g(ddl)) = (0) \quad (219)$$

Les équations (218) représentent la forme variationnelle également d'une condition sur les degrés de libertés. On peut donc être tenté de traiter la condition (219) sous forme également variationnelle. Cependant, au final nous obtenons deux systèmes de n équations à n inconnues (n le nombre de degré de liberté). On imagine que cette technique ne permettra pas d'obtenir en générale une solution.

L'objectif de ce chapitre est ainsi de présenter différentes techniques classiques permettant de répondre à cette difficulté.

Remarque *En comparaison, remarquons que les méthodes de type "formulations mixtes", qui concernent des problèmes où l'on introduit également de nouvelles équations mais cette fois couplées avec de nouvelles inconnues, peuvent être traitées par une formulation variationnelle générale.*

30.1 Première présentation des multiplicateurs de Lagrange

Soit un problème d'équilibre mécanique écrit sous forme variationnelle en utilisant la minimisation de l'énergie totale (ce qui n'est correcte que pour un problème conservatif, par exemple pour une loi de Hooke : élasticité linéaire).

$$\delta W = 0 = \delta \left(-\frac{1}{2} \int_D \boldsymbol{\varepsilon} : \mathbf{E} : \boldsymbol{\varepsilon} dv + \int_{\partial D} \vec{T} \cdot \vec{V} ds \right) = 0 \quad \forall \delta ddl \quad (220)$$

ou encore de manière plus générale :

$$- \int_D \boldsymbol{\sigma} : \delta \boldsymbol{\varepsilon} dv + \int_{\partial D} \vec{T} \cdot \delta \vec{V} ds = 0 = \langle \delta ddl \rangle (R) \quad \forall \delta ddl \quad (221)$$

On remarque que cette dernière expression est identique à celle obtenue par la méthode de Galerkin. Cependant, ici l'équation (220) signifie que l'on se situe à un optimum (minimum) de l'énergie, alors que pour la méthode de Galerkin l'équation (221) ne représente pas la même chose, on recherche simplement la nullité de la projection sur les fonctions génératrices de la solution.

Supposons maintenant que l'on veuille imposer une condition supplémentaire représentée par un système d'équation de type (219).

On considère alors une nouvelle fonctionnelle :

$$W + \vec{\lambda} \cdot \vec{g} = 0 \quad (222)$$

$\vec{\lambda}$ représente le vecteur des multiplicateurs de Lagrange (nombre de composante = nombre de composantes de (219)).

Pour plus de précision, notons X^{ar} les degrés de liberté de W . On cherche maintenant un optimum de (222) (en fait un minimum de W par rapport aux X^{ar} et un maximum de $\vec{\lambda} \cdot \vec{g}$: point selle), d'où la forme suivante :

$$0 = \delta W + \delta(\vec{\lambda} \cdot \vec{g}) \quad (223)$$

$$= \delta W + \delta \vec{\lambda} \cdot \vec{g} + \vec{\lambda} \cdot \delta \vec{g} \quad (224)$$

$$= \left[\frac{\partial W}{\partial X^{ar}} + \vec{\lambda} \cdot \frac{\partial \vec{g}}{\partial X^{ar}} \right] \delta X^{ar} + \vec{g} \cdot \delta \vec{\lambda} \quad \forall \delta X^{ar} \text{ et } \forall \delta \vec{\lambda} \quad (225)$$

Ce qui constitue la présentation classique des multiplicateurs de Lagrange. Dans cette nouvelle équation, nous avons maintenant deux systèmes d'équations :

$$\left(\frac{\partial W}{\partial X^{ar}} + \vec{\lambda} \cdot \frac{\partial \vec{g}}{\partial X^{ar}} \right) = 0$$

et

$$(g) = 0$$

avec deux types d'inconnues X^{ar} et (λ) dont le nombre total = le nombre d'équation. On conçoit que l'on peut maintenant espérer ainsi obtenir une solution.

Faisons le parallèle avec la méthode plus générale de Galerkin. L'idée serait de modifier la forme initial de la manière suivante. Soit initialement la forme (218) et l'on veut la condition supplémentaire (219), on pose le nouveau problème :

$$\langle V^{*ar} \rangle \left((R) + \langle \lambda \rangle \left(\frac{\partial \vec{g}}{\partial X^{ar}} \right) \right) + \langle \dot{\lambda} \rangle (g) = 0 \quad \forall \dot{\lambda} \text{ et } \forall V^{*ar} \quad (226)$$

Reste donc a donner un sens à cette expression !

30.2 Seconde présentation des multiplicateurs de Lagrange

Soit par exemple une condition $g(X^{ar}) = 0$ pour $n_{ddl} = 2$, comme indiquée sur la figure (20).

La condition supplémentaire revient a imposer un déplacement le long de la courbe $g(X^{ar}) = 0$. Cela signifie qu'à tout point M , on doit imposer une force telle que $\vec{V}(M)$ soit tangent à la courbe, ceci en tenant compte des forces déjà existantes. La force ainsi introduite doit donc être proportionnelle à $\vec{grad}(g)$, soit

$$\vec{F} = \alpha \vec{grad}(g)$$

ou encore

$$(F) = \alpha \left(\frac{\partial g}{\partial X^{ar}} \right) \quad (227)$$

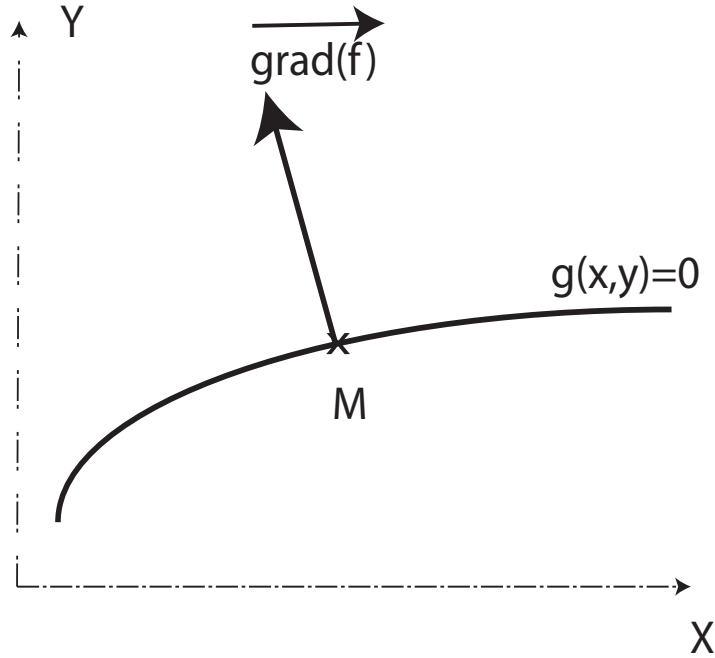


FIGURE 20 – exemple de condition en 2D

L'équilibre modifiée par cette nouvelle force devient :

$$\langle V^{*ar} \rangle \left((R) + \alpha \left(\frac{\partial \vec{g}}{\partial X^{ar}} \right) \right) = 0 \quad \forall V^{*ar} \quad (228)$$

On retrouve une expression analogue à (226).

La résolution de cette équation donnera une solution dépendant du paramètre α :

$$X^{ar}(\alpha)$$

Ensuite nous devons satisfaire la condition $g = 0$ c'est-à-dire $g(X^{ar}(\alpha)) = 0$. Cette condition dont l'inconnue est le paramètre α s'écrit naturellement sous forme variationnelle :

$$\dot{\alpha}^* g(X^{ar}(\alpha)) = 0 \quad \forall \dot{\alpha}^* \quad (229)$$

NB :

- le $\dot{\alpha}^*$ est purement arbitraire, il indique seulement que l'on considère un équilibre instantané. Ainsi, en considérant que $g(M)$ est une fonction de l'espace géométrique dans lui-même, au niveau dimension, $\dot{\alpha}^* g(X^{ar}(\alpha))$ à la dimension et la signification d'une puissance virtuelle.
- l'espace des α défini ainsi les seules forces qui sont susceptible d'imposer la condition $g = 0$. Ces forces sont duales à la condition : à une condition est associée une seule direction de force ($\vec{grad}(g)$)
- Imposer la condition $g = 0$ est équivalent à imposer la condition $(\vec{grad}(g)) \cdot d\vec{M}$ à une constante près.

Maintenant on peut grouper les deux conditions : (228) et (229) ce qui conduit à l'expression (226) où α doit-être remplacée par λ , ainsi les multiplicateurs λ peuvent être vue comme des forces généralisées dans l'espace duale à l'espace des contraintes $g = 0$.

30.3 Equivalence entre plusieurs conditions

D'une manière générale, supposons que l'on veuille résoudre une EDP $f(X^{ar}) = 0$ et que l'on veuille également tenir compte d'une contrainte supplémentaire $g(X^{ar}) = 0$. On remarque qu'a priori en l'absence d'informations supplémentaires, les rôles de f et g sont symétriques. On peut donc écrire sous forme variationnelle :

$$\langle V^{ar*} \rangle \left((R(f(X^{ar}))) + \langle \lambda \rangle \left(\frac{\partial \vec{g}}{\partial X^{ar}} \right) \right) + \langle \dot{\lambda} \rangle (g) = 0 \quad \forall \dot{\lambda} \text{ et } \forall V^{ar*} \quad (230)$$

ou alors :

$$\langle V^{ar*} \rangle \left((R(g(X^{ar}))) + \langle \lambda \rangle \left(\frac{\partial \vec{f}}{\partial X^{ar}} \right) \right) + \langle \dot{\lambda} \rangle (f) = 0 \quad \forall \dot{\lambda} \text{ et } \forall V^{ar*} \quad (231)$$

Dans le premier cas ($R(f(X^{ar}))$) représente le vecteur force généralisé correspondant à la forme variationnelle de f , tandis que dans le second cas ($R(g(X^{ar}))$) est relative à g . Les deux cas sont possibles est certaines méthodes numériques complexes combinent ces deux expressions.

Il me semble (affirmation non étayée scientifiquement !!) qu'il est préférable de réserver la formulation variationnelle initiale pour l'équation la plus complète et génératrice d'une solution complète indépendante, c'est-à-dire qu'en l'absence de seconde condition on obtient néanmoins une solution unique ce qui assure d'obtenir un problème sous contrainte bien défini et permet de limiter le nombre de multiplicateur introduit.

Remarquons également que l'introduction de multiplicateur augmente le nombre d'inconnues. Ainsi, il est sans doute préférable d'introduire les multiplicateurs relativement au système d'équations qui imposera un nombre le plus faible possible de multiplicateurs.

30.4 Cas d'une procédure de résolution itérative de type Newton

Dans le cas d'une méthode de Newton, l'élément clé est l'obtention de l'opérateur tangent, c'est-à-dire l'opérateur matriciel qui décrit la variation du résidu par rapport aux degrés de libertés. Supposons que l'on isole les deux types de degrés de libertés : (X^{ar} et λ l'expression (230) peut s'écrire sous la forme :

$$\langle V^{ar*}, \dot{\lambda} \rangle \left(\begin{array}{c} (R(f(X^{ar}))) + \langle \lambda \rangle \left(\frac{\partial \vec{g}}{\partial X^{ar}} \right) \\ g \end{array} \right) \quad (232)$$

ce qui met en évidence le vecteur résidu (le vecteur de droite) qui doit être nul quelque soit les vitesses de degrés de liberté virtuelles, d'où l'opérateur tangent :

$$-\frac{\partial}{\partial d\lambda} \left(\frac{(R(f(X^{ar}))) + \langle \lambda \rangle \left(\frac{\partial g}{\partial X^{ar}} \right)}{g} \right) = - \left[\begin{array}{c|c} \left[\frac{\partial(R(f(X^{ar})))}{\partial X^{bs}} \right] + \langle \lambda \rangle \left[\frac{\partial^2 g}{\partial X^{ar} \partial X^{bs}} \right] & \left[\frac{\partial g}{\partial X^{ar}} \right] \\ \hline \left[\frac{\partial g}{\partial X^{bs}} \right] & [0] \end{array} \right] = [K] \quad (233)$$

On remarque que la structure matricielle peut s'exprimer sous la forme :

$$[K] = \left[\begin{array}{c|c} K' & Q^T \\ \hline Q & 0 \end{array} \right] \quad (234)$$

où la matrice $[Q]$ représente les termes $[\partial g / \partial X^{ar}]$.

Lors d'une procédure classique de résolution, à chaque itération "n+1", on résout :

$$[K_n] \begin{pmatrix} \delta X^{bs} \\ \delta \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (R(f(X_n^{ar}))) + \langle \lambda_n \rangle \left(\frac{\partial g_n}{\partial X^{ar}} \right) \\ g_n \end{pmatrix} \quad (235)$$

L'indice "n" précise que le vecteur résidu et l'opérateur tangent sont calculés à l'aide des degrés de libertés obtenus à l'itération "n". Les degrés de libertés sont ensuite mis à jour :

$$\begin{pmatrix} X_{n+1}^{bs} \\ \lambda_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta X^{bs} \\ \delta \lambda \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} X_n^{bs} \\ \lambda_n \end{pmatrix} \quad (236)$$

A convergence, le vecteur résidu est nul, ainsi la relation $g = 0$ est satisfaite exactement (en fait à la précision de convergence près).

Remarque

- A cause des 0 sur la diagonale de la matrice de raideur $[K]$, celle-ci peut-être non défini-positive. Dans ce cas la convergence de l'algorithme de Newton devient problématique.

30.5 Exemple d'application de la méthode des multiplicateurs de Lagrange

Soit un problème de mécanique, que l'on exprime sous forme variationnelle. Les conditions limites sont imposés et il reste comme équation pour les degrés de libertés, 2 ddl libres : U_x et U_y pour un point selon les expressions qui suivent.

$$\langle \dot{V}_x^*, \dot{V}_y^* \rangle \begin{pmatrix} 4 a U_x + b U_y + 3 \\ b U_x + 2 a U_y - 2 \end{pmatrix} = 0 \quad (237)$$

Le vecteur vertical représente le vecteur résidu.

On décide d'imposer une condition supplémentaire : $U_x - 2 U_y = 1$ qui s'écrit également $g = U_x - 2 U_y - 1 = 0$. On demande :

1. Etablir une formulation incluant la contrainte supplémentaire à l'aide de multiplicateur de Lagrange,
2. Calculer la matrice de raideur pour la méthode de Newton-Raphson.
3. En posant $U_x^{(0)} = 0, U_y^{(0)} = 0$ et $\lambda^{(0)} = 0$ d'une part et $a = b = 1$ d'autre part, calculez $U_x^{(1)}, U_y^{(1)}, \lambda^{(1)}$

Nouvelle formulation Elle s'obtient en intégrant les multiplicateurs de Lagrange avec l'expression (232) en notant que $\partial g/\partial U_x = 1$ et $\partial g/\partial U_y = -2$.

$$\langle \dot{V}_x, \dot{V}_y, \dot{\lambda} \rangle \begin{pmatrix} 4a U_x + b U_y + 3 + \lambda \\ b U_x + 2a U_y - 2 - 2\lambda \\ U_x - 2U_y - 1 \end{pmatrix} = 0 \quad (238)$$

Matrice de raideur On applique la formule (233) en remarquant qu'ici les dérivées partielles secondes de la fonction g , sont nulles :

$$[K] = - \begin{bmatrix} 4a & b & | & 1 \\ b & 2a & | & -2 \\ \hline 1 & -2 & | & 0 \end{bmatrix} \quad (239)$$

Cette expression fait bien apparaître la structure matricielle vue précédemment :

$$[K] = \begin{bmatrix} K' & | & Q^T \\ \hline Q & | & 0 \end{bmatrix} \quad (240)$$

Une première itération On obtient pour le premier résidu :

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

et la résolution donne :

$U_x^{(1)} = 0 - 2/11$, $U_y^{(2)} = 0 - 13/22$, $\lambda^{(1)} = 0 - 37/22$. Notons que la notion de "force" introduite dans le cours, vaut alors :

$$(F) = -37/22 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

30.6 Méthode de pénalisation

La méthode est introduite de manière analogue au cas des multiplicateurs de Lagrange. On se place dans le cas d'une minimisation d'une fonctionnelle W_0 et on cherche à y adjoindre la condition $g = 0$.

Considérons la nouvelle fonctionnelle suivante :

$$W_0 + \frac{\beta}{2} g^2 = 0 \quad (241)$$

Remarque

- Tout d'abord on remarque que si W_0 est quadratique, la nouvelle fonctionnelle est également quadratique.
- Le fait de satisfaire (241) pour une valeur de β importante, conduit à satisfaire la condition $g = 0$. Par contre dans ce cas, la condition $W_0 = 0$ peut être moins bien représentée en particulier pour des valeurs de β très importantes.

— Si β est suffisamment grand, comme g^2 est positif, le fait de minimiser (241) implique que l'on minimise également g .

Dans ce contexte, l'équation (241) est approchée par la condition classique de minimisation :

$$\left(\frac{\partial W_0}{\partial ddl} + \beta g \frac{\partial g}{\partial ddl} \right) = (R') = (0) \quad (242)$$

En comparaison avec l'expression (228) on remarque que tout se passe comme si α est ici fixé et vaut $\alpha = \beta g$. En particulier on remarque que moins la condition $g = 0$ est bien vérifiée, c'est-à-dire plus la valeur de g est élevée, plus la force supplémentaire de rappel $\beta g \frac{\partial g}{\partial ddl}$ est importante. A l'opposé, à mesure que l'on se rapproche de la condition $g = 0$ la force supplémentaire diminue.

Dans le cas d'une résolution de type Newton, la raideur s'obtient aisément :

$$-\left[\frac{\partial R'}{\partial ddl} \right] = -\left[\left[\frac{\partial^2 W_0}{\partial ddl^2} \right] + \beta \left[\frac{\partial g}{\partial ddl} \frac{\partial g}{\partial ddl} \right] + \beta g \left[\frac{\partial^2 g}{\partial ddl^2} \right] \right] \quad (243)$$

$$= -[[K] + \beta[Q]^T.[Q] + \beta g [T]] \quad (244)$$

Dans le cas où la condition g est linéaire, le terme $[T]$ est nulle et le terme additionnel $\beta[Q]^T.[Q]$ à la raideur initiale $[K]$ est une matrice symétrique définie positive. Dans le cas où g est quadratique, le terme additionnel $[T]$ est une matrice également quadratique.

Maintenant la méthode est étendue à une formulation générale de type Galerkin suivant une méthodologie identique au cas des multiplicateurs de Lagrange. On pose comme nouvelle formulation variationnelle, avec (R) le résidu général sans contrainte (obtenue de manière quelconque par une méthode de Galerkin, sans obligatoirement l'utilisation d'une fonctionnelle W_0 :

$$\langle V^{*ar} \rangle ((R'(ddl))) = \langle V^{*ar} \rangle \left((R(ddl)) + \beta g \left(\frac{\partial g}{\partial ddl} \right) \right) = 0 \quad \forall V^{*ar} \quad (245)$$

d'où pour la raideur on trouve la relation générale.

$$-\left[\frac{\partial R'}{\partial ddl} \right] = -\left[\left[\frac{\partial R}{\partial ddl} \right] + \beta \left[\frac{\partial g}{\partial ddl} \frac{\partial g}{\partial ddl} \right] + \beta g \left[\frac{\partial^2 g}{\partial ddl^2} \right] \right] \quad (246)$$

Avantages de la méthode

- Elle n'introduit pas de degré de liberté supplémentaire,
- elle est très simple à implémenter,
- la matrice de raideur résultante est "plutôt" symétrique et définie positive si les termes linéaires et quadratiques de g sont prépondérants (et d'amplitudes positives pour les quadratiques).

Inconvénients de la méthode

- La qualité de la solution dépend du facteur β , appelé facteur de pénalisation. On a vu en introduction, que ce dernier devait être suffisamment grand pour imposer la condition, mais pas trop, pour ne pas "écraser" la formulation initiale.
- La condition $g = 0$ n'est pas satisfaite exactement contrairement aux multiplicateurs.

30.7 Exemple d'application de la méthode de pénalisation

On considère l'exemple résolu précédemment à l'aide des multiplicateurs de Lagrange. L'objectif va être de le résoudre à l'aide de la méthode de pénalisation.

En se fondant sur les résultats déjà acquis dans le cas de l'application de la méthode des multiplicateurs de Lagrange, on demande :

1. *Etablir une formulation incluant la contrainte supplémentaire à l'aide de la méthode de pénalisation,*
On utilise l'expression :

$$\langle \dot{V}^{*ar} \rangle \left((R(ddl)) + \beta g \left(\frac{\partial g}{\partial ddl} \right) \right) = 0 \quad \forall \dot{V}^{*ar}$$

Ce qui nous donne ici :

$$\langle \dot{V}_x^*, \dot{V}_y^* \rangle \left(\begin{array}{l} (4a U_x + b U_y + 3) + \beta(U_x - 2 U_y - 1) \\ (b U_x + 2a U_y - 2) - 2\beta(U_x - 2 U_y - 1) \end{array} \right) = 0 \quad (247)$$

2. *Calculer la matrice de raideur pour la méthode de Newton-Raphson.*

On dérive donc le résidu, en notant que les variations seconde de g sont nulles ce qui simplifie l'expression finale :

$$[K] = - \begin{bmatrix} 4a + \beta & b - 2\beta \\ b - 2\beta & 2a + 4\beta \end{bmatrix} \quad (248)$$

3. *Combien d'itération vont être nécessaire pour résoudre le problème ?*

Le problème est linéaire, il faut une seule itération.

4. *En posant $U_x^{(0)} = 0, U_y^{(0)} = 0$ et $a = b = 1$ d'autre part, calculez $U_x^{(1)}, U_y^{(1)}$ pour un coefficient de pénalisation quelconque. : **Attention à pas se tromper dans les signes du résidu et de la raideur pour la calcul de la solution (voir méthode de Newton).***

Le résidu pour la première itération vaut :

$$\begin{pmatrix} 3 - \beta \\ -2 + 2\beta \end{pmatrix}$$

d'où le système à résoudre :

$$\begin{bmatrix} -4 - \beta & -1 + 2\beta \\ -1 + 2\beta & -2 - 4\beta \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \delta U_x \\ \delta U_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 - \beta \\ -2 + 2\beta \end{pmatrix}$$

5. *Montrer que l'on tend vers une solution pas trop éloignée de celle obtenue à l'aide des multiplicateurs, lorsque le coefficient de pénalisation augmente.*

On trouve : $U_x = (-8 + 4\beta)/(7 + 22\beta)$ et $U_y = (11 - 13\beta)/(7 + 22\beta)$. Ainsi quand β augmente, on tend vers les valeurs $U_x(\text{limite}) = -2/11$ et $U_y(\text{limite}) = -13/22$ ce qui est la solution exacte obtenue avec les multiplicateurs.

30.8 Exemple de problème sous une contrainte non linéaire

On considère un problème éléments finis qui une fois discrétisé s'exprime sous la forme $(R(X, Y)) = (0)$ suivante :

$$(R(X, Y)) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

où l'inconnue est le point $M(X, Y)$, et "a" et "b" sont deux constantes.

De plus on veut imposer au point M une condition supplémentaire, qui est de se déplacer sur un cercle de rayon $R = 1$

1. Ecrire la condition supplémentaire sous forme d'une condition $g(X, Y) = 0$

$$g(X, Y) = X^2 + Y^2 - 1 = 0$$

2. En utilisant la méthode des multiplicateurs de Lagrange écrire la nouvelle forme du résidu du problème $(R(X, Y, \lambda)) = (0)$.

$$(R(X, Y, \lambda)) = \begin{pmatrix} X + Y + 2X\lambda - a \\ X + 3Y + 2Y\lambda - b \\ X^2 + Y^2 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

3. On se place dans le cadre d'une résolution itérative de type Newton. Ecrire la matrice de raideur du système.

$$[K] = - \begin{bmatrix} (1 + 2\lambda) & 1 & 2X \\ 1 & (3 + 2\lambda) & 2Y \\ 2X & 2Y & 0 \end{bmatrix}$$

4. Soit pour la suite $a = 2$ et $b = 0$ pour la suite. La solution du système sans contrainte est alors $X = 3$ et $Y = -1$. On se propose de faire quelques itération de Newton en prenant comme conditions initiale $X_0 = 3$, $Y_0 = -1$ et $\lambda_0 = 0$ c'est-à-dire les conditions du système sans contrainte. On demande :

- (a) Calculez le résidu (R_0) et la raideur initiale, ainsi que $\|(R_0)\|_\infty$

$$(R_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix}$$

d'où $\|(R_0)\|_\infty = 9$

$$[K] = - \begin{bmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 1 & 3 & -2 \\ 6 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

- (b) Calculez X_1 , Y_1 et λ_1

Tout calcul fait on trouve

$$\begin{pmatrix} \delta X_1 \\ \delta Y_1 \\ \delta \lambda_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1.32 \\ 0.52 \\ 0.13 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ \lambda_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.6764 \\ -0.47 \\ 0.13 \end{pmatrix}$$

(c) Calculez le résidu (R_1) ainsi que $\|(R_1)\|_\infty$, conclusion ?

$$(R_1) = \begin{pmatrix} 0.35 \\ 0.14 \\ 2.03 \end{pmatrix}$$

d'où $\|(R_1)\|_\infty = 2.03$, on peut donc dire que le résidu décroît ce qui est bon signe !!

30.9 Méthode : Lagrangien augmenté

On considère une combinaison des 2 méthodes précédentes sous la forme d'une nouvelle formulation variationnelle.

$$\langle V^{*ar} \rangle \left((R(X^{ar})) + \langle \lambda \rangle \left(\frac{\partial \vec{g}}{\partial X^{ar}} \right) + \beta g \left(\frac{\partial g}{\partial ddl} \right) \right) + \langle \dot{\lambda} \rangle (g) = 0 \quad \forall \dot{\lambda}^* \text{ et } \forall V^{*ar} \quad (249)$$

Avantages de la méthode par rapport à la méthode initiale des multiplicateurs de Lagrange

- La présence du paramètre β augmente la qualité du conditionnement de la matrice tangente. En particulier avec un β suffisamment grand, on obtient une raideur "plutôt" définie positive.
- Le fait d'avoir des multiplicateurs permet d'utiliser des valeurs plus faibles de β tout en gardant une bonne précision sur le résultat final, notamment sur la contrainte $g = 0$

30.10 Méthode : Lagrangien perturbé

L'objectif est ici d'améliorer le conditionnement de la raideur initiale de la méthode des multiplicateurs de Lagrange.

Soit la forme variationnelle suivante :

$$0 = \langle V^{*ar} \rangle \left((R(X^{ar})) + \langle \lambda \rangle \left(\frac{\partial \vec{g}}{\partial X^{ar}} \right) \right) + \langle \dot{\lambda} \rangle \left(g - \frac{1}{\beta} \lambda \right) \quad \forall \dot{\lambda}^* \text{ et } \forall V^{*ar} \quad (250)$$

$$= \langle V^{*ar}, \dot{\lambda} \rangle \begin{pmatrix} (R(X^{ar})) + \langle \lambda \rangle \left(\frac{\partial \vec{g}}{\partial X^{ar}} \right) \\ \left(g - \frac{1}{\beta} \lambda \right) \end{pmatrix} = \langle \dot{ddl}' \rangle (R') \quad (251)$$

Ce qui correspond dans le cas de la minimisation à celle de

$$W + \lambda.g - \frac{1}{\beta} \lambda^2$$

La fonctionnelle (251) conduit à la vérification approchée de la condition $g = 0$ qui ici est modifiée (perturbée) par un coefficient $-\lambda/\beta$, l'utilisation d'un coefficient β important par rapport aux multiplicateurs permet de minimiser la perturbation.

En adoptant la fonctionnelle (251) on obtient la raideur suivante :

$$-\left[\frac{\partial R'}{\partial dd'} \right] = \left[\begin{array}{c|c} \left[\frac{\partial(R(X^{ar}))}{\partial X^{bs}} \right] + \langle \lambda \rangle \left[\frac{\partial^2 g}{\partial X^{ar} \partial X^{bs}} \right] & \left[\frac{\partial g}{\partial X^{ar}} \right] \\ \hline \left[\frac{\partial g}{\partial X^{bs}} \right] & -\frac{1}{\beta} [Id] \end{array} \right] = [K] \quad (252)$$

Par rapport au cas initial des multiplicateurs de Lagrange, les termes nules de la diagonale sont remplacés par $-\frac{1}{\beta}$ ce qui améliore le conditionnement.

30.11 Bibliographie

Dixième partie

Estimateur d'erreur

31 Estimation de l'erreur

Deux types d'erreur peuvent être considérés. D'une part l'erreur due à une discrétisation trop large, d'autre part l'erreur due à une distorsion trop importante d'éléments. A l'aide de la connaissance du premier type d'erreur, il est possible de densifier le maillage en fonction des valeurs d'erreur correspondantes. Le deuxième type d'erreur relatif à la forme des éléments permettra de modifier cette forme jusqu'à un résultat acceptable.

Classiquement le premier type d'erreur est utilisé pour effectuer un raffinement local ou un re-maillage complet. Le second est utilisé avec l'algorithme de relocation pour améliorer globalement les formes sans pour autant déplacer fortement les noeuds. La méthode présentée a été tout d'abord proposée par O.C. Zienkiewicz and R.L. Taylor ([?]). Cette méthode est maintenant classique et permet de présenter les idées générales d'un calcul d'erreur. Nous finirons la présentation par des remarques générales concernant l'implantation informatique.

31.1 Calcul d'erreur

31.1.1 introduction

Considérons un calcul par éléments finis fondée sur une formulation en déplacements. Dans ce cas les inconnues primaires, déplacement ou position, qui s'avèrent également être les inconnues nodales, sont les inconnues calculées avec le plus de précision. En particulier la solution discrétisée obtenue présente une erreur régulièrement minimale sur toute la surface ou le volume de l'élément. Au contraire, les inconnues secondaires de type contrainte, obtenues par dérivation des inconnues primaires ne sont calculées de façon précise qu'aux points d'intégration.

En fin de calcul on dispose donc d'une interpolation spatiale correcte sur les déplacements, et d'une approximation correcte des contraintes au niveau des points d'intégration.

L'idée est alors de chercher un champ de contrainte continu entre éléments, dont la différence avec les valeurs précédemment calculées soit minimale. Ce minimum sera ici établi au sens des moindres carrés. Il est également possible de chercher à minimiser la puissance ou l'énergie développée par ce nouveau champ.

L'interpolation du nouveau champ de contrainte est choisie identique à celle du déplacement par homogénéité. Le nouveau champ de contrainte présente l'avantage d'être plus représentatif de la contrainte réelle qui est continue aux interfaces entre éléments. La différence entre cette nouvelle contrainte et les valeurs initialement calculées représentera donc une approximation de l'erreur introduite par la résolution EF.

31.1.2 La fonctionnelle

Soit la nouvelle contrainte interpolée :

$$\sigma_{(v)} = \sigma_{(v)}^r \phi_r \quad (253)$$

et soit σ la contrainte obtenue à partir du calcul par EF. La fonctionnelle exprime la différence au sens des moindres carrés entre ces deux types de contraintes.

$$\mathcal{F} = \int_{\mathcal{D}} (\sigma_{(v)} - \sigma) : (\sigma_{(v)} - \sigma) dv \quad (254)$$

Pour minimiser la fonctionnelle, une condition nécessaire est d'annuler les dérivées partielles par rapport aux inconnues du problème, ici les valeurs nodales de la contrainte.

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \sigma_{(v)}^r} = 2 \int_{\mathcal{D}} \frac{\partial \sigma_{(v)}}{\partial \sigma_{(v)}^r} : (\sigma_{(v)} - \sigma) dv = 2 \int_{\mathcal{D}} \phi_r (\sigma_{(v)} - \sigma) dv = 0 \quad (255)$$

Ce qui conduit à un système d'équations linéaires dont les inconnues sont des tenseurs. L'intégration est numérique et utilise les mêmes points d'intégration que dans le cas des éléments finis ce qui permet d'employer les valeurs σ calculées lors de la résolution de l'équation d'équilibre.

La minimisation de la fonctionnelle peut s'effectuer par une méthode itérative de type gradient (NEWTON) ou d'une manière directe. Dans le cas itératif une seule itération suffit étant donné que l'on verra que le Hessien de la fonctionnelle est constant. On calcul donc la dérivée seconde de la fonctionnelle, i.e. le Hessien.

$$\left[\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \sigma_{(v)}^r \partial \sigma_{(v)}^s} \right] = \left[2 \int_{\mathcal{D}} \frac{\partial \sigma_{(v)}}{\partial \sigma_{(v)}^r} : \frac{\partial \sigma_{(v)}}{\partial \sigma_{(v)}^s} dv \right] = \left[2 \int_{\mathcal{D}} \phi_r \phi_s dv \right] = [K_{rs}] \quad (256)$$

On s'aperçoit bien ici que la matrice de raideur est identique quelque soit les composantes du tenseur de contrainte ce qui nous permettra de résoudre le problème relatif à chaque composante, successivement composante par composante en utilisant la même matrice, triangulée une seule fois par exemple pour optimiser les calculs.

Pour faire suite à la remarque si-dessus concernant la valeur des contraintes aux points d'intégration. On remarque que dans le cas du calcul des éléments de la matrice, celle-ci fait apparaître un produit de fonction d'interpolation et non un produit de dérivée de fonction d'interpolation comme dans le cas d'un problème d'équilibre mécanique. Ainsi il est nécessaire d'utiliser un nombre supérieur de point d'intégration pour le calcul des éléments du Hessien si l'on veut une précision suffisante et même dans certain cas éviter la singularité de la matrice résultante. Par contre a priori le nombre supplémentaire de point d'intégration n'est pas nécessaire pour le second membre ou le résidu.

Notons que l'on peut améliorer la qualité du champ obtenu en intégrant les conditions limites en efforts connues, agissant sur la structure. L'intégration de ces conditions s'effectue de manière identique à l'imposition classique de ddl bloqué (cf. l'exemple (31.1.3) traité par la suite).

Après avoir calculé le nouveau champ de contrainte, il est possible d'estimer l'erreur de la solution éléments finis pour chaque élément à partir de l'expression :

$$\mathcal{F}_{v_1} = \frac{\int_{\mathcal{D}_{v_1}} (\sigma_{(v)} - \sigma) : (\sigma_{(v)} - \sigma) dv_e}{\left(\int_{\mathcal{D}_{v_1}} \sigma : \sigma dv_e \right)} \quad (257)$$

L'introduction d'un ratio permet d'obtenir une grandeur relative. Cette expression n'est évidemment licite que lorsque σ est non nul. Dans le cas où σ est nul ainsi que $\sigma_{(v)}$ l'erreur est également nulle.

Enfin lorsque $\sigma_{(v)}$ est non nul et σ nul on peut changer de dénominateur.

$$\mathcal{F}_{\mathcal{V}_\gamma} = \frac{\int_{\mathcal{D}_{\mathcal{V}_\gamma}} (\sigma_{(v)} - \sigma) : (\sigma_{(v)} - \sigma) dv_e}{\left(\int_{\mathcal{D}_{\mathcal{V}_\gamma}} \sigma_{(v)} : \sigma_{(v)} dv_e \right)} \quad (258)$$

En fait on peut utiliser indifféremment les expressions (257) ou (258), cette dernière pouvant être facilement obtenue à l'aide de l'expression qui suit : (260).

D'une manière pratique on rencontre la même difficulté au niveau de l'intégration que celle posée pour le calcul de la contrainte aux noeuds. En effet les contraintes obtenues lors du calcul mécanique ne sont définies qu'aux points d'intégration alors que les nouvelles valeurs des contraintes sont aux noeuds, et l'on sait qu'un nombre supérieur de point d'intégration par rapport au cas mécanique est nécessaire pour le calcul exacte de l'erreur. Ainsi dans la pratique l'expression 258 est calculée de la manière suivante. Le dénominateur est évalué à l'aide des points d'intégration mécanique. Le numérateur est décomposé en deux parties

$$\int_{\mathcal{D}_{\mathcal{V}_\gamma}} \sigma_{(v)} : \sigma_{(v)} dv_e \quad \text{et} \quad \int_{\mathcal{D}_{\mathcal{V}_\gamma}} (\sigma : \sigma - 2\sigma_{(v)} : \sigma) dv_e \quad (259)$$

Le premier terme est calculé sur les nouveaux points d'intégration au travers des fonctions d'interpolations de $\sigma_{(v)}$ et on a :

$$\int_{\mathcal{D}_{\mathcal{V}_\gamma}} \sigma_{(v)} : \sigma_{(v)} dv_e = \langle \sigma_{(v)}^r \rangle [K_{rs}] (\sigma_{(v)}^s) \quad (260)$$

alors que le second terme est calculé sur les points d'intégrations mécaniques "i" :

$$\int_{\mathcal{D}_{\mathcal{V}_\gamma}} (\sigma : \sigma - 2\sigma_{(v)} : \sigma) dv_e = \sum_i (\sigma_{(i)} : \sigma_{(i)} - 2 \cdot \phi_r(\eta(i)) \sigma_{(v)}^r : \sigma_{(i)}) W_{(i)} \sqrt{g(\eta(i))} \quad (261)$$

où $W_{(i)}$ est le poids d'intégration au point "i".

Si l'on désire visualiser la répartition de l'erreur sur la pièce il est souvent nécessaire de disposer de valeurs aux noeuds. On peut alors adopter pour l'erreur la même technique que celle utilisée pour le passage des contraintes aux noeuds. On recherche une interpolation de l'erreur qui soit la plus proche au sens des moindres carrés de l'erreur calculé au niveau de l'élément. Dans ce cas la raideur est identique à celle calculée dans le cas des contraintes, et le second membre s'écrit en appelant Ee la fonction erreur défini aux noeuds et E la fonction erreur défini à l'élément :

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial Ee^r} = 2 \int_{\mathcal{D}} \phi_r(Ee - E) dv \quad (262)$$

En fait à la première itération, il n'y a que l'erreur défini sur l'élément, qui est donc constante. L'intégral correspond alors au volume de l'élément multiplié par l'erreur. La raideur étant fixe, une seule itération est suffisante.

31.1.3 Exercice d'application

On se place à la suite d'un calcul de mécanique qui s'est effectué en 1D sur une pièce de longueur 60mm, à l'aide de la méthode des éléments finis. La pièce est discrétisée en 3 éléments de longueurs identiques 20mm. On considère qu'une extrémité de la barre est fixée en $x=0$ mm et l'autre extrémité ($x=60$ mm) est soumise à un effort de traction. La barre a une section qui évolue linéairement de 10mm^2 pour $x = 0\text{mm}$ à 100mm^2 pour $x = 60\text{mm}$. La barre est également soumise à un chargement réparti le long de la barre.

Un calcul par éléments finis a permis de déterminer le champ de contrainte suivant, résultant d'une part au chargement à chaque extrémité et d'autre au chargement réparti. Les éléments étant linéaires, les résultats se traduisent par une grandeur par point d'intégration, un point d'intégration par élément.

$$\sigma_{(1)} = 80\text{MPa}, \quad \sigma_{(2)} = 30\text{MPa}, \quad \sigma_{(3)} = 15\text{MPa}$$

En résumé, la barre est chargée uniformément sur sa longueur et également aux deux extrémités, mais on ne connaît que les efforts aux extrémités : $F(0) = -1000\text{N}$ et $F(60) = 1000\text{N}$

1. Dans ces conditions, proposez un champ de contraintes continu (interpolé) défini sur toute la barre. Calculez sa valeur.
2. En déduire une répartition d'erreur de calcul le long de la barre.

Réponse :

Le problème est 1D, et on retient le même type d'interpolation que celle initiale : linéaire. On a : $\sigma_{(v)} = \sigma_{(v)}^r \phi_r$ avec $\phi_1 = (1 - \eta)/2$ et $\phi_2 = (1 + \eta)/2$. La matrice de raideur du système (256) est calculée pour chaque élément. Soit l la longueur d'un élément, on notera (cf. les exemples habituels) que $\sqrt{g} = l/2$. On a :

$$\int_{\mathcal{D}} \phi_r \phi_s dv = \frac{l}{2} \int_{-1}^1 \phi_r \phi_s d\eta \quad (263)$$

c'est-à-dire :

$$\left[\int_{\mathcal{D}} \phi_r \phi_s dv \right] = \frac{l}{2} \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} \frac{(\eta-1)^2}{4} & \frac{(1-\eta^2)}{4} \\ \frac{(1-\eta^2)}{4} & \frac{(\eta+1)^2}{4} \end{bmatrix} d\eta \quad (264)$$

$$= \frac{l}{2} \begin{bmatrix} \left[\frac{(\eta-1)^3}{12} \right]_{-1}^1 & \left[\frac{\eta}{4} - \frac{\eta^3}{12} \right]_{-1}^1 \\ \left[\frac{\eta}{4} - \frac{\eta^3}{12} \right]_{-1}^1 & \left[\frac{(\eta+1)^3}{12} \right]_{-1}^1 \end{bmatrix} \quad (265)$$

$$= \frac{l}{2} \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} = \frac{l}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (266)$$

Maintenant la matrice globale est obtenue en assemblant les matrices élémentaires des 3 éléments ce qui conduit à :

$$[K]_{global} = \frac{l}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (267)$$

Concernant le second membre local, en tenant compte du fait que la contrainte calculer par élément finis est constante par élément, nous avons :

$$\left(\int_{\mathcal{D}} \sigma_{(e)} \phi_r dv \right) = \frac{l \sigma_{(e)}}{2} \left(\int_{-1}^1 \phi_r d\eta \right) = \frac{l \sigma_{(e)}}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (268)$$

ce qui conduit au second membre global :

$$(SM) = \left(\int_{\mathcal{D}} \sigma \phi_r dv \right) = \frac{l}{2} \begin{pmatrix} \sigma_{(1)} \\ \sigma_{(1)} + \sigma_{(2)} \\ \sigma_{(2)} + \sigma_{(3)} \\ \sigma_{(3)} \end{pmatrix} = \frac{l}{2} \begin{pmatrix} 80 \\ 110 \\ 45 \\ 15 \end{pmatrix} \quad (269)$$

d'où l'équation finale :

$$\frac{l}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{(v)}^1 \\ \sigma_{(v)}^2 \\ \sigma_{(v)}^3 \\ \sigma_{(v)}^4 \end{pmatrix} = \frac{l}{2} \begin{pmatrix} 80 \\ 110 \\ 45 \\ 15 \end{pmatrix} \quad (270)$$

On simplifie par $l/2$:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{(v)}^1 \\ \sigma_{(v)}^2 \\ \sigma_{(v)}^3 \\ \sigma_{(v)}^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 240 \\ 330 \\ 135 \\ 45 \end{pmatrix} \quad (271)$$

Maintenant on tient compte des conditions limites : $\sigma_{(v)}^1 \cdot n = -\sigma_{(v)}^1 = -F(0)/S(0) = -1000/10 = -100MPa$ et $\sigma_{(v)}^4 \cdot n = \sigma_{(v)}^4 = F(60)/S(60) = 1000/100 = 10MPa$, n étant le signe de la normale sur x . La première et la dernière équation du système linéaire (271) sont supprimés et les deux autres sont modifiées en fonction des conditions limites.

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{(v)}^2 \\ \sigma_{(v)}^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 330 - 1 \cdot \sigma_{(v)}^1 \\ 135 - 1 \cdot \sigma_{(v)}^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 230 \\ 125 \end{pmatrix} \quad (272)$$

d'où après résolution : $\sigma_{(v)}^2 = 53MPa$ et $\sigma_{(v)}^3 = 18MPa$ et ainsi le vecteur solution :

$$(\sigma_{(v)}^r) = \begin{pmatrix} 100 \\ 53 \\ 18 \\ 10 \end{pmatrix} \quad (273)$$

Maintenant nous pouvons en déduire un estimateur d'erreur déduit des formules (258), (260) et (261) calculer sur chaque élément en tenant compte ici qu'il y a un seul point d'intégration et que $\int_{-1}^1 \phi_r d\eta = W_{(1)} \phi_r(0) = 1$. Pour l'élément "e" :

$$E_e = \frac{\langle \sigma_{(v)}^r \rangle [K_{rs}] (\sigma_{(v)}^s) + (\sigma_e \cdot \sigma_e - 2 \cdot (\sigma_{(v)}^1 + \sigma_{(v)}^2) \sigma_e) l/2}{\langle \sigma_{(v)}^r \rangle [K_{rs}] (\sigma_{(v)}^s)} \quad (274)$$

Pour le premier élément en notant que :

$$l/6 \langle 100, 53 \rangle \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 100 \\ 53 \end{pmatrix} = 12072,66$$

on obtient :

$$E_1 = l/2 \frac{12072,66 + (6400 - 2 \cdot 153 \cdot 80)}{(l/2) 12072,66} \approx 0.497 \quad (275)$$

De même pour le deuxième élément :

$$l/6 < 53, 18 > \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 53 \\ 18 \end{pmatrix} \approx 2725$$
$$E_2 = l/2 \frac{2725 + (900 - 2 \cdot 71 \cdot 30)}{(l/2) 2725} \approx 0.233 \quad (276)$$

Et pour le dernier élément :

$$l/6 < 18, 10 > \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 18 \\ 10 \end{pmatrix} \approx 402.6$$
$$E_3 = l/2 \frac{402.6 + (225 - 2 \cdot 28 \cdot 15)}{(l/2) 402.6} \approx 0.216 \quad (277)$$

On remarque que l'erreur est double sur le premier élément, alors qu'elle est sensiblement égale sur les deux autres éléments.

Onzième partie

Maillage adaptatif

32 Introduction

Un processus de maillage adaptatif se déroule suivant deux phases distinctes. Dans la première il s'agit de créer un nouveau maillage qui doit représenter la même pièce que celle étudiée mais qui conduit à de meilleurs résultats, via des éléments qui sont de meilleure qualité et une optimisation de la densité des éléments. La seconde phase concerne le transfert des informations mécaniques, thermiques, etc. , de l'ancien maillage vers le nouveau. Ces deux processus entraînent des erreurs qu'il faut évidemment minimiser. A défaut de les connaître avec précision, il sera également intéressant de disposer d'une approximation de ces différentes erreurs qui permettront d'orienter les différentes phases de calcul.

Classiquement on dispose de 3 méthodes pour la création d'un nouveau maillage, ces méthodes pouvant être également couplés. Il s'agit de la méthode de relocation, méthode R, dont l'idée est de déplacer les noeuds de manière à optimiser leur position en fonction du critère d'erreur retenu. La deuxième méthode est dite de type H. Elle consiste à raffiner le maillage ou à remailler complètement la pièce. Contrairement à la première méthode, la méthode H conduit à changer le nombre de noeud global d'où la taille et la topologie de la matrice de raideur. La troisième méthode est dite de type P. Elle consiste à augmenter le degré des fonctions d'interpolations, soit globalement, linéaire à quadratique par exemple, ou soit localement à l'aide de fonction bulles qui permettent d'intervenir uniquement à l'intérieur de l'élément sans modifier le comportement à ses frontières.

La méthode de relocation est la plus simple et la plus rapide à mettre en place. Elle est bien adaptée au cas d'un faible déplacement des noeuds, par exemple pour minimiser la distorsion des éléments. Par contre dans le cas de forts gradients cette méthode présente rapidement des limitations.

La méthode H, est la plus courante. Dans la forme utilisant le raffinement local, elle est relativement facile à mettre en oeuvre au sein du programme de calcul et permet de répondre efficacement aux carences de la première méthode. Par contre elle introduit rapidement un grand nombre de noeud pour obtenir une grande précision. La méthode H avec remaillage complet, et encore plus performante, en ce sens qu'elle permet une optimisation théoriquement plus libre des paramètres de maillage. Par contre elle nécessite souvent l'utilisation d'un mailleur externe au programme de calcul, ce qui complexifie le déroulement de la simulation. Notons cependant que les mailleurs libres génèrent de préférence des éléments basiques de type tétraèdre. Ces éléments ont des performances médiocres comparés aux hexaèdres par exemple. Par ailleurs, la génération automatique d'éléments hexaédriques est souvent plus complexe et donc moins automatique surtout en regard de critère d'erreur de distorsion.

La troisième méthode de type P, est beaucoup plus performante. Pour s'en convaincre il suffit de considéré de gain de précision obtenu en passant d'une interpolation linéaire à une interpolation quadratique. Par contre elle présente des difficultés conceptuelles et d'implantation. Par exemple l'emploi d'interpolation à haut degrés peut ce révéler délicate dans le cas de problèmes dynamique, par exemple pour le calcul de la matrice masse ...

Actuellement ce sont les deux premières méthodes qui sont les plus utilisés. Pour simplifier l'introduction des concepts, la présentation s'appuiera principalement sur la méthode de relocation et la méthode H de raffinement local, qui constituent des méthodes aisées à automatiser.

33 Concepts généraux sur la définition d'une nouvelle géométrie

L'objectif n'est pas de répondre à un problème spécifique, mais de définir une démarche générale. Pour cela il nous faut préciser le contexte et par là les différents cas que l'on peut être amené à rencontrer.

La dimension de l'espace peut varier de 1 à 3 et l'objet lui-même peut posséder une dimension minimale de 1 à 3. Ainsi un segment est une entité de dimension 1, mais n'aura pas le même nombre de degrés de liberté selon que l'espace soit de dimension 1 ou 3!

De manière exhaustive on peut donc distinguer :

1. les éléments linéiques de dimension minimale 1, qui peuvent évoluer en dimension 1, 2 ou 3 ;
2. les éléments surfaciques triangulaires ou quadrangulaires qui peuvent évoluer en dimension 2 ou 3 ;
3. les éléments volumiques, hexaèdres, pentaèdres, tétraèdres, etc., qui ne peuvent évoluer qu'en dimension 3.

Lorsque l'on considère les noeuds internes à un maillage volumique, la position de ces noeuds n'intervient pas sur la définition géométrique du solide, i.e. sur le volume la forme, etc. Par contre ceci n'est pas le cas des noeuds qui définissent la frontière. Une modification de ces noeuds peut se traduire par une modification de la forme externe, du volume et donc de la masse. Dans le cas d'une plaque courbe, le problème concerne tous les noeuds de la plaque qui définissent en fait la forme de la surface courbe discrétisée. Ainsi on peut penser que les surfaces externes d'un solide pourront être traitées d'une manière identique à celle des plaques courbes. D'une manière également analogue, la question des frontières d'une surface courbe devrait également être traitée comme celle des éléments linéiques en 3 D.

Pour ces derniers éléments, deux cas sont à considérer.

1. la ligne courbe est fermée et ne présente pas de point anguleux particulier, comme par exemple un cercle, il n'y a pas d'extrémité particulière, tous les noeuds décrivent la forme courbe, chacun n'ayant pas plus d'importance que les autres ;
2. la ligne possède des points particuliers, qu'il est nécessaire de conserver tels quels, par exemple les extrémités, ou des points anguleux. Dans ce cas, au cours du processus de remaillage, ces noeuds seront fixes, ce qui nécessite un repérage particulier de ces noeuds.

D'une manière analogue pour un élément volumique ou surfacique, dans certaines situations on souhaitera qu'une partie des frontières soit fixe ou non pour l'opération de remaillage, d'où la nécessité d'adopter un système de repérage et de gestion spécifique à l'objectif de remaillage, repérage qui n'a pas de raison d'être dans les autres cas.

Ces cas particuliers étant pris en compte, étudions le problème même de l'optimisation du maillage.

33.1 Méthodologie retenue pour améliorer le maillage

L'amélioration du maillage s'appuie sur un critère de qualité qui peut être fonction du problème traité. Par exemple nous pouvons considérer deux types de modification de maillage :

1. le premier type concerne une erreur géométrique, qui est supposée d'autant plus grande que les éléments sont distordus et de taille différente les uns des autres. Un bon maillage comporte des éléments de taille régulière et des gradients de taille faible ; La méthode de relocation est bien adaptée pour minimiser ce premier type d'erreur.
2. le second type concerne la densité du maillage dans les différentes régions. La procédure de relocation peut-être associée dans ce cas à une procédure de raffinement local qui permet de densifier localement le maillage, ce qui évite l'appel à une procédure de remaillage complet.

L'expérience de l'auteur, montre qu'il est difficile de résoudre ces deux modifications avec une seule méthode, ce n'est pas impossible mais cela amène à effectuer de tels compromis que ni les formes ni les densités ne sont finalement acceptables. Néanmoins, dans un cadre où l'on veut limiter le nombre de noeuds, qui par exemple est déjà élevé, seule la relocation permet aisément d'améliorer la situation en garantissant le même nombre de noeuds et la même connexion au niveau des éléments, ce qui peut être intéressant.

Dans le cas général où l'on couple relocation et raffinement, cela induit une variation du nombre de noeud, et en général également un changement de la topographie de la matrice de raideur. Dans le cas de l'utilisation d'une matrice bande par exemple, il sera nécessaire d'effectuer une renumérotation des noeuds de manière à optimiser la largeur de bande.

Remarquons également que dans tous les cas le problème peut être décliné en deux versions selon que les transformations sont grandes ou non. Dans le cas de faibles transformations, le scénario suivant peut convenir :

- calcul complet du début jusqu'à la fin du chargement avec un jeu fixé de conditions initiales ;
- à partir de l'analyse des résultats obtenus, opération de relocation et de raffinement local de manière à obtenir un nouveau maillage plus performant.
- nouvelle étape de calcul à partir des conditions initiales.

Ce scénario permet d'éviter le transfert des informations de l'ancien maillage sur le nouveau maillage du fait que l'on redémarre le calcul à partir des conditions initiales.

Par contre dans le cas des grandes transformations, il faut intégrer la phase de remaillage pendant le calcul, ce qui implique le transport des inconnues secondaires, contraintes et informations sur le comportement matériel de l'état considéré, etc., de l'ancien maillage vers le nouveau maillage.

Nous allons maintenant examiner les grandes lignes des méthodes à employer pour effectuer la relocation avec densification.

33.2 Relocation à l'aide d'une méthode variationnelle

La qualité du maillage est amélioré au travers d'une démarche variationnelle, d'une manière identique à celle adoptée lors d'un calcul de résolution d'équations aux dérivées partielles. Pour ce faire, l'objectif est de définir une fonctionnelle permettant l'optimisation.

Dans le cas du premier type d'erreur, dû à la distorsion d'éléments, nous allons travailler à partir de l'élément lui-même en définissant une grandeur analogue au type d'erreur considéré, qui sera évaluée à partir de la position des noeuds, qui seront les degrés de liberté de notre problème. La fonctionnelle est alors obtenue par la somme des carrés de ces grandeurs. L'optimisation consiste à minimiser la fonctionnelle c'est-à-dire à effectuer une minimisation au sens des moindres carrés. Dans notre cas la solution précise de notre problème, qui n'est pas a priori quadratique en inconnues, n'est pas utile. Il nous suffit simplement d'améliorer la solution actuelle avec une ou deux itérations maximales d'un algorithme de type NEWTON. On cherchera également à simplifier les calculs de la fonctionnelle pour minimiser les temps de calcul.

Dans le second type d'erreur, dû à une densité trop faible d'éléments, si l'on adopte un langage de mécanicien, l'idée est de définir au niveau des noeuds ou des éléments, des efforts d'attraction par rapport aux autres noeuds. Ceci peut revenir à imposer des conditions limites particulières au niveau du problème variationnel.

Maintenant supposons que la démarche générale précédente soit en place, il nous faut voir comment intégrer les conditions particulières des éléments frontières. Etudions le cas simple mais représentatif du problème, d'une ligne courbe dans l'espace 2D.

34 Exemple de Remaillage sur une ligne courbe en 2 D

Dans notre cas la ligne courbe est supposée décrire la ligne théorique et physique de la pièce. On supposera que les deux extrémités sont fixes relativement au procédé de remaillage, et qu'en dehors des extrémités il n'y a pas d'autres points fixes.

Le problème évident qui apparaît d'emblée est celui du respect de la forme originale de la ligne théorique. Supposons dans un premier temps que la discrétisation est linéaire. On peut penser que la ligne originale est une courbe régulière qui ne possède pas de point anguleux, ainsi la facettisation initiale est une approximation. A moins de connaître la forme théorique initiale via un système d'équations par exemple, ce qui n'est pas le cas en général dans le processus de calcul par éléments finis, les seules informations que l'on connaisse sur la forme théorique sont contenues dans la ligne brisée. Néanmoins cherchons à reconstruire la forme courbe la plus probable au travers de la connaissance d'une droite tangente en chaque noeud de la ligne que l'on peut approcher par différence finie entre segments successifs. L'idée de base est identique à celle utilisée pour définir un plan tangent dans le cas d'un sommet de plusieurs facettes non coplanaires. Le processus est ainsi représentatif également d'une pièce 3D. Ainsi chaque noeud représente un point de la courbe où l'on connaît également la tangente. Si l'on doit déplacer le noeud au cours du remaillage on cherchera tout d'abord à le déplacer sur cette droite tangente dans la phase d'optimisation ce qui évitera l'indétermination de la ligne brisée suivant le sens où l'on se déplace sur la courbe.

La longueur de la ligne brisée doit rester constante, de manière par exemple à satisfaire une masse globale constante. Par contre localement, la longueur des segments va varier, il n'est donc pas possible de satisfaire à l'invariance de longueur par un procédé local. L'erreur sur la longueur sera a priori faible. L'idée est donc de modifier le déplacement des noeuds à l'aide d'un facteur multiplicatif identique pour tous les noeuds, adapté pour maintenir une longueur globale constante. Ce facteur, qui doit être très proche de 1, permet de conserver globalement la forme de la ligne. Une autre

solution serait de calculer la nouvelle tangente, et d'imposer un déplacement normal à la tangente, qui tend à augmenter ou diminuer la longueur suivant le signe du facteur. Ainsi on garantit que la nouvelle ligne courbe respecte les tangentes au premier ordre. En fait, en supposant que le facteur soit très proche de 1, cette dernière méthode présente le défaut d'être complexe et de pas apporter d'amélioration sensible.

Après avoir déplacé les noeuds sur la ligne tangente, ce qui correspond au point A' de la figure (21), il est possible d'optimiser la position finale. La position réelle est inconnue, mais on l'approchera par la moyenne du point obtenu par remaillage (relocation par exemple) et celui projeté.

$$A'' = \frac{A' + A'''}{2} \quad (278)$$

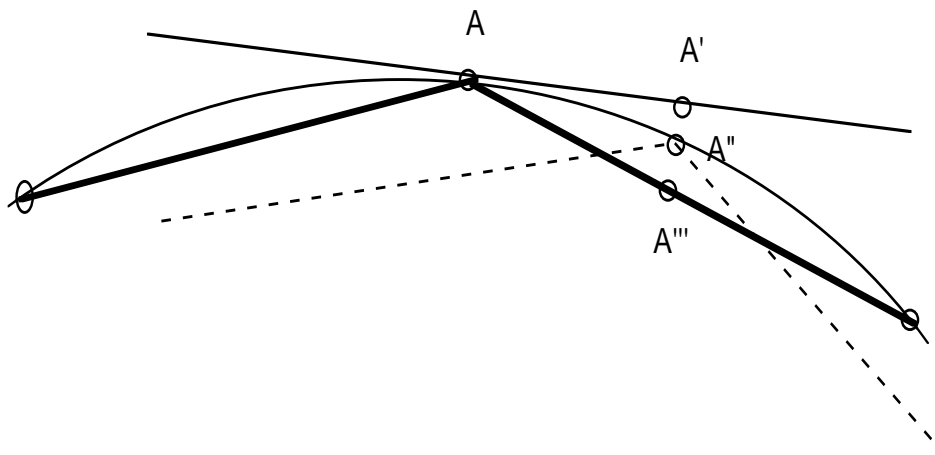


FIGURE 21 – Différents cas de repositionnement en fonction de la ligne tangente et de la ligne avant relocation

35 Exemple de remaillage sur une surface en 3D

La discussion est identique au cas précédent. Tout d'abord il nous faut fixer à l'aide de conditions limites géométriques, les points et lignes qui sont soumis à des conditions limites mécaniques. Pour les positions restantes, on définit un plan tangent en chaque noeud à l'aide d'une moyenne calculée à partir des éléments contenant le noeud. Pendant la phase de remaillage, le déplacement du noeud doit s'effectuer dans ce plan tangent. Pour cela on introduit une condition de déplacement nul normalement au plan. A partir de la position obtenue et de sa projection sur le maillage initial, un point milieu est défini comme la moyenne des deux points précédents de manière à minimiser la variation de la surface.

36 Remaillage dans un volume 3D

Contrairement aux cas précédents, aucune contrainte n'est a priori nécessaire sur les noeuds internes. Ce sont donc les noeuds qui sont les plus simples à manipuler.

Concernant la fonctionnelle elle-même, voyons quel type d'erreur locale on peut rencontrer. En fait un segment linéaire par lui-même ne peut être distordu. Il en est pas de même pour l'interpolation quadratique, ou d'ordre supérieur. Dans le cas de surface 2D ou de volume 3D classiquement on utilise comme mesure de la distorsion des valeurs angulaires. Par exemple en 2D pour un quadrangle, la distorsion sera mesurée par le maximum de différence entre les angles aux sommets et l'angle droit. Pour les triangles l'angle de référence sera $\pi/3$. Dans le cas de surface en 3D, il faut également tenir compte du vrillage de l'élément. Là encore on utilise de préférence une mesure angulaire. Cette analyse s'étant sans difficulté au cas 3D.

37 Raffinement du maillage

Classiquement la technique de raffinement consiste à subdiviser un ou plusieurs éléments, en fonction de la densité voulue. Il nous faut envisager le cas des différentes dimensions.

37.1 Cas d'un espace de dimension 1

Les éléments sont paramétrés par des éléments de référence de type segment. Le raffinement est immédiat. Un segment est décomposé en deux nouveaux segments en introduisant un point milieu (cf. la figure 22). Le point milieu est calculé comme la moyenne des abscisses des extrémités de l'élément de référence, et on utilise les fonctions d'interpolation pour déterminer le point milieu. L'opération ne comporte aucune ambiguïté.

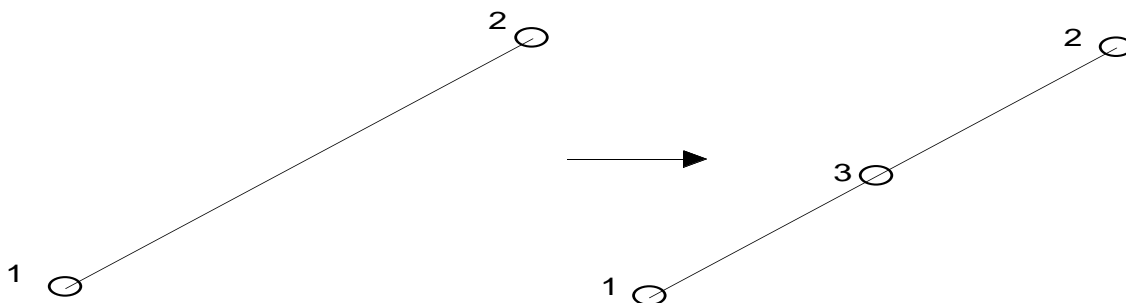


FIGURE 22 – Raffinement dans le cas 1D

37.2 Cas d'un espace de dimension 2

Les cas les plus simples à traiter sont ceux du découpage triangulaire linéaire ou quadratique (cf. la figure 23) et quadrangulaire bilinéaire ou biquadratique complet ou non (cf. 24).

Dans les deux cas on introduit des points internes dont la position est obtenue par interpolation sur l'élément initial : pour le triangle on introduit un noeud interne au niveau du centre de gravité, pour le quadrangle, on introduit 4 noeuds internes. Par exemple si l'on considère que les coordonnées locales du quadrangle sont $[-1,1]$ en x et y , on peut choisir $(0.5,0.5)$, $(0.5,-0.5)$, $(-0.5,0.5)$, $(-0.5,-0.5)$. On voit sur ces figures que les éléments obtenus ne possèdent pas une géométrie optimale, d'où l'intérêt et la nécessité d'utiliser conjointement une phase de relocation pour améliorer la forme du maillage final.

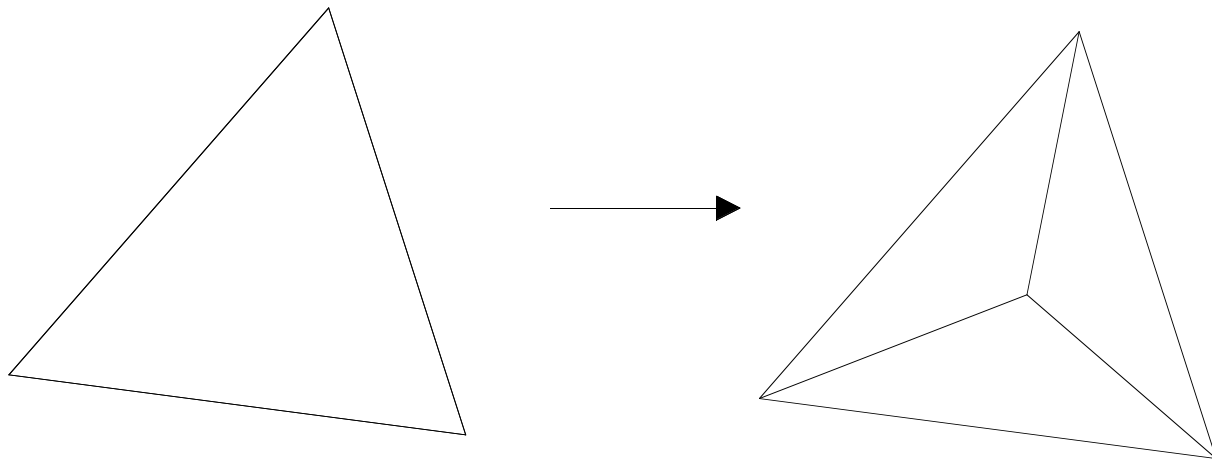


FIGURE 23 – Raffinement dans le cas 2D pour un triangle linéaire

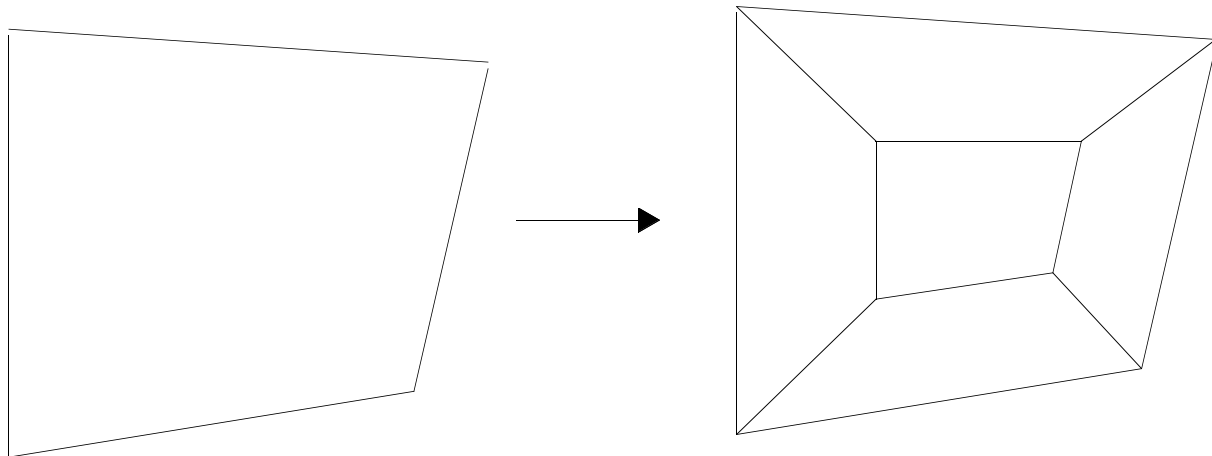


FIGURE 24 – Raffinement dans le cas 2D pour un quadrangle bilinéaire.

Une autre solution consiste également à décomposer le quadrangle en 4 ou 2 triangles. Dans ce cas la forme finale obtenue est de meilleure qualité. Cependant avec cette technique, après quelques phases de raffinement, on risque de transformer une majorité de quadrangles en triangles. Or la précision de calcul avec les quadrangles est en général bien meilleure qu'avec les triangles. Il faut donc réserver cette technique uniquement dans les cas où la distorsion des quadrangles est par exemple trop importante. Dans ce cas le passage à une forme triangulaire est une alternative intéressante. Dans les autres cas, on cherchera à conserver le type d'éléments initiaux.

Dans le cas de l'élément triangulaire raffinée, le résultat tend à produire des éléments aplatis, une phase de relocation est donc souhaitable pour améliorer la géométrie de ces nouveaux éléments. Une autre solution est proposée sur la figure (25). L'élément central est ainsi transformé en 4 triangles d'une qualité comparable à l'élément initial. Par contre cette technique impose d'utiliser des éléments de frontière qui permettent la jonction entre la partie de maillage non modifié et la partie de maillage raffinée. Cette partie raccordement est encore plus problématique dans le cas d'une géométrie quadrangulaire (cf. figure(26)).

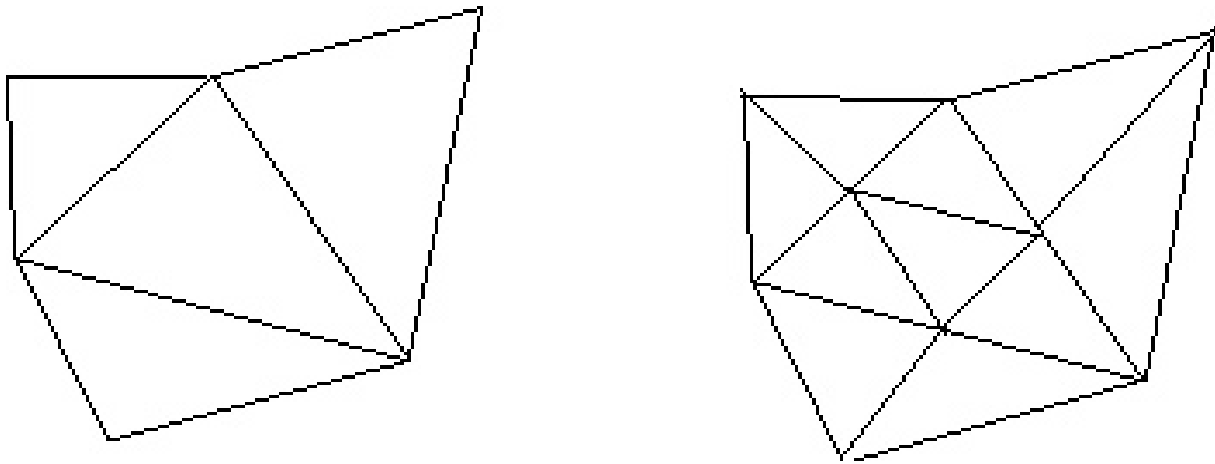


FIGURE 25 – Raffinement de triangle entraînant l'utilisation un seul type d'élément.

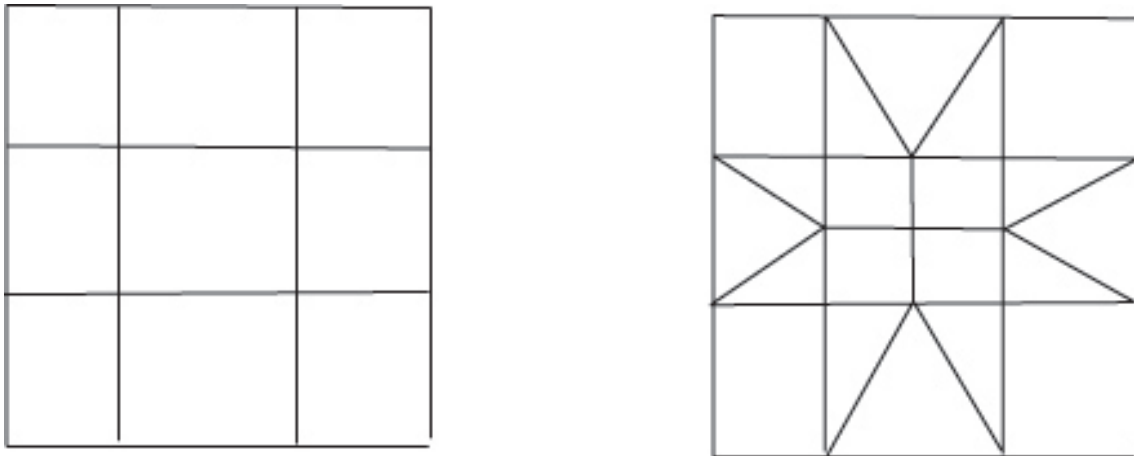


FIGURE 26 – Raffinement de quadrangle entraînant l'utilisation de deux types d'éléments.

37.3 Cas d'un espace de dimension 3

Le raffinement des éléments 3D est fondé sur un principe équivalent au cas 2D.

Sur la figure (27) on voit deux exemples de raffinement directement issues du raffinement 2D. En fait de nombreuses alternatives existent, seule l'expérimentation permettra de conclure.

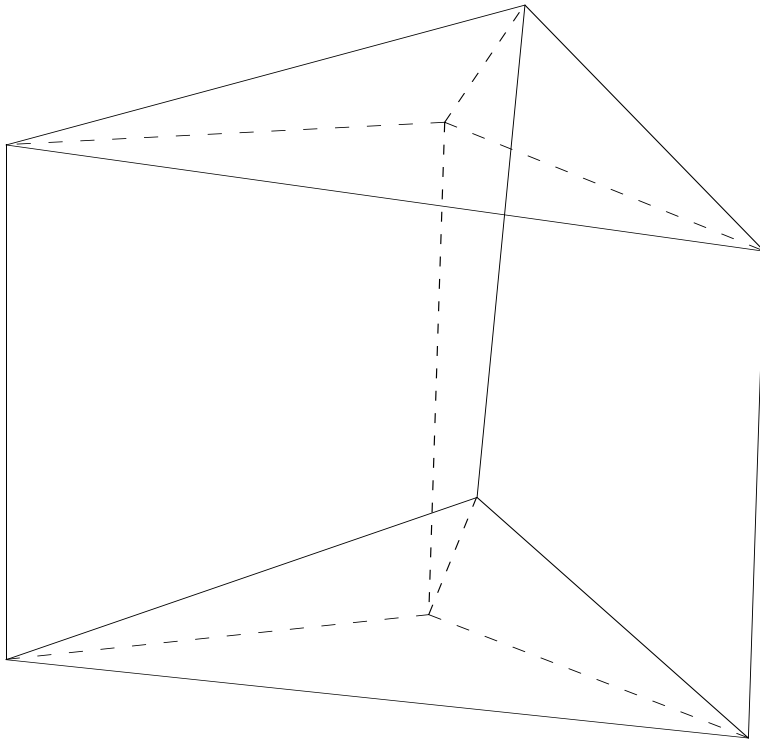
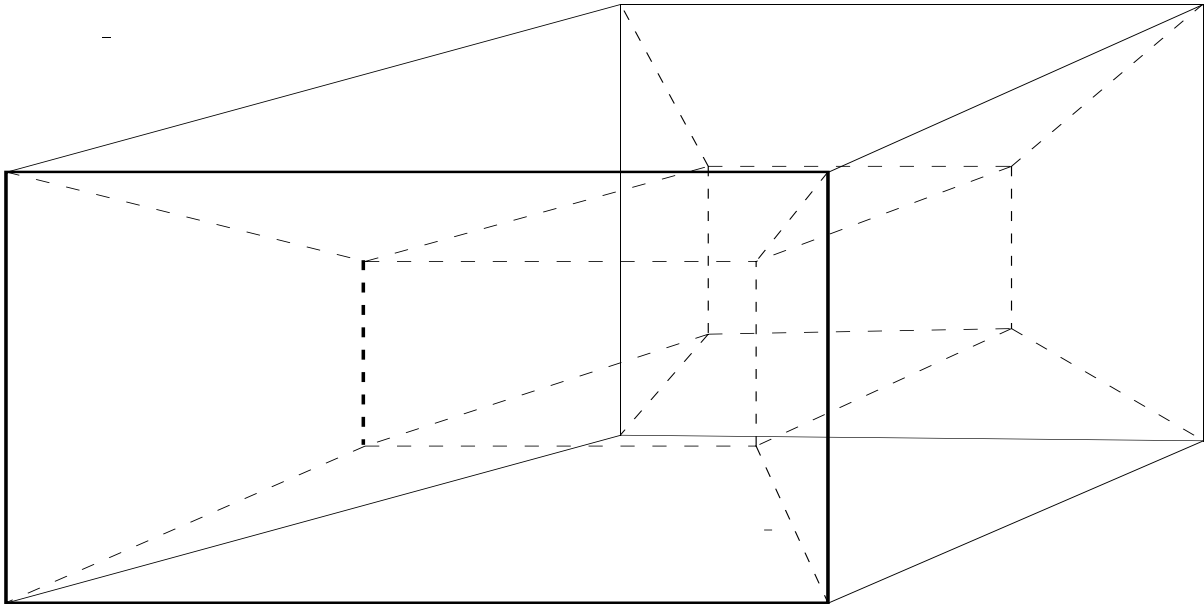


FIGURE 27 – Raffinement dans le cas 3D, cas d'un hexaèdre et d'un pentaèdre.

Douzième partie

Condensation statique

38 Technique de condensation

Cette partie concerne une courte introduction sur les techniques de condensation. Commençons par un exemple. Soit un élément quadrangulaire 2D dans un espace 2D avec une interpolation quadratique complète c'est-à-dire comportant 9 noeuds d'interpolation. Au sein d'un maillage, chaque noeud appartient en général à plusieurs éléments sauf les noeuds milieux qui n'appartiennent qu'à un seul élément. Ainsi le résidu calculé localement en ce noeud, ainsi que la raideur sera identique à celle figurant dans la raideur finale. Il n'est donc pas nécessaire d'effectuer une phase d'assemblage pour ce noeud, ni d'attendre la constitution de la matrice de raideur finale pour déterminer ses degrés de liberté en fonction de ceux des autres noeuds de l'élément. Si nous effectuons cette résolution localement, nous supprimons le noeud central, car la résolution nous fournit l'expression des ddl du noeud central en fonction de ceux des noeuds externes. Nous pourrions alors remplacer la raideur initiale correspondant aux 9 noeuds de dimension 18×18 par une raideur correspondant uniquement aux noeuds périphériques. On dit que l'on a condensé statiquement le noeud central. On obtient alors un élément à 8 noeuds, ayant une raideur finale de 16×16 .

Ce procédé peut être étendu à tout sous-structure. Supposons un assemblage de n éléments, dont on connaît la frontière. Il est possible d'exprimer tous les degrés de liberté des noeuds internes en fonction des seules ddl des noeuds de la frontière. On crée ainsi un macro-élément ou un super-élément. On parle de sous-structuration. En fait dans ce type de résolution, le calcul s'effectue selon trois étapes. La première étape, correspond à la phase de condensation dans chaque macro-élément. La deuxième étape qui ne comprend que les noeuds des différentes frontières, correspond à la phase de résolution globale. La troisième étape est dédiée au calcul des ddl internes en fonction des résultats du calcul globales aux frontières et des relations obtenue aux cours de la première étape.

La technique de sous-structuration est intéressante en particulier lors de calculs sur de très grandes structures. Elle permet de répartir le travail en particulier lors de la première et de la dernière étapes par exemple entre plusieurs CPU différents, ce qui constitue alors une forme de parallélisation.

Treizième partie

Contact

39 Simulation des phénomènes de contact

L'objectif ici, est d'étudier comment classiquement, on prend en compte les conditions de contact dans le cadre d'une simulation par éléments finis.

39.1 Introduction

On rappelle très succinctement, comment le contact est classiquement introduit, tout d'abord dans le cas de forces globales d'inter-action entre solides, puis d'une manière plus fine dans le cas d'une prise en compte de la déformation locale des solides en contact.

39.1.1 Modélisation simple (historique)

Soit 2 solides "A" et "B" en contact (cf. figure 28) et posés sur un massif C. Le contact s'introduit globalement :

a à l'aide de la troisième loi de Newton : le principe de l'action-réaction ;,

$$F_1^a = -F_1^b \quad (279)$$

— et de la loi de Coulomb :

$$\begin{cases} F_2^a \leq \nu_1 F_1^a \\ F_2^c \leq \nu_2 F_1^c \end{cases} \quad (280)$$

ν_1 et ν_2 sont les coefficients de frottement supposés dépendre du couple de matériaux en présence.

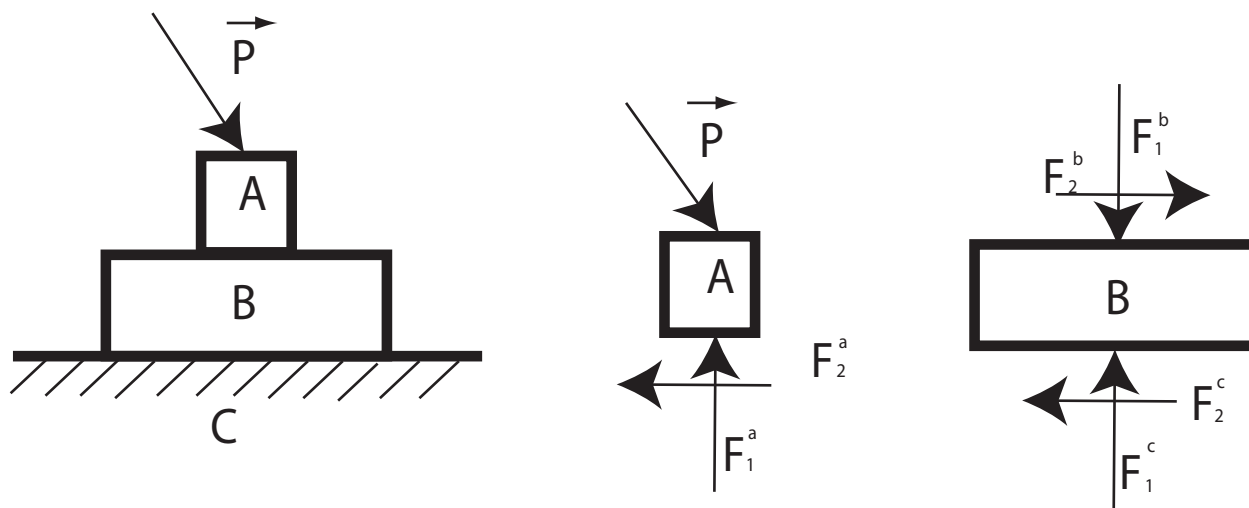


FIGURE 28 – Interactions entre des solides en contact

Remarque On considère des forces globales (uniformément réparties).

39.1.2 Modélisation plus précise analytique

Le calcul initial est amélioré en prenant en compte la déformation des solides en contact. Ceci conduit à une répartition non uniforme des efforts de surface.

Exemples :

- Étude de Hertz (1882),
- travaux de Johnson (1985).

Ces travaux sont toujours d'actualité. Ils conduisent en général à des formules analytiques et/ou des graphes d'évolution. Les travaux de Hertz ont par exemple été largement utilisés pour l'étude et le dimensionnement des contacts roulants, type roulements à billes, à rouleaux, ... Ces travaux servent également de résultat de référence, pour les calculs numériques.

L'idée est d'effectuer suffisamment d'hypothèse simplificatrice de manière à permettre une résolution analytique. Dans cet objectif, les géométries considérées sont simples : plan, cylindre, sphère par exemple. Le comportement matériel est également très simple : il s'agit d'une élasticité de Hooke (linéaire). Enfin, par exemple dans le cas de Hertz on postule dans certains cas, une répartition de d'efforts de contact donnée (cf. figure 29).

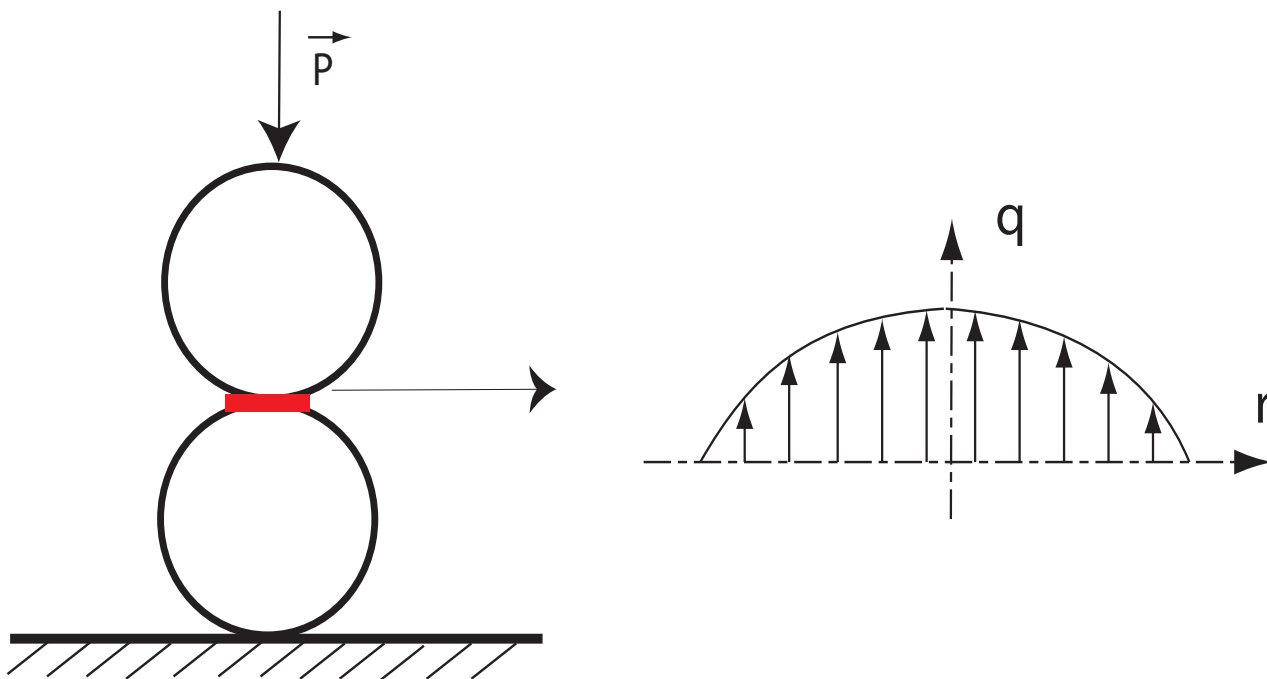


FIGURE 29 – Exemple de contact entre des géométries circulaires : hypothèse de répartition sinusoidale de la pression q entre les deux cylindres (modèle de Hertz)

39.1.3 Modélisation par éléments finis

L'objectif est d'obtenir un résultat qui tient compte des géométries réelles en contact et de la répartition réelle des efforts de contact. Soit $\delta\mathcal{D}$ la surface externe d'un solide, telle que :

$$\delta\mathcal{D} = \delta\mathcal{D}_X + \delta\mathcal{D}_T + \delta\mathcal{D}_c \quad (281)$$

avec

- $\delta\mathcal{D}_X$: les surfaces où l'on impose un positionnement ou un déplacement,
- $\delta\mathcal{D}_T$: les surfaces où des efforts externes sont imposés,
- $\delta\mathcal{D}_c$: les surfaces où il y a un contact.

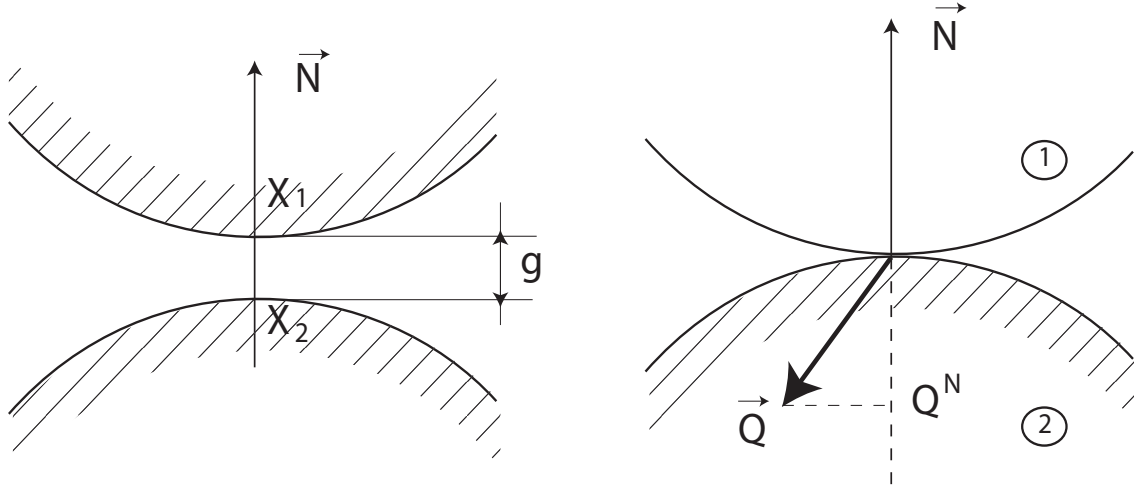


FIGURE 30 – Solides en vis-à-vis : figure de gauche pas de contact et présence d'un gap "g" non nul, figure de droite, cas d'un contact et présence d'un effort de réaction de sens négatif par rapport à la normale (on considère l'effort de contact du solide 1 sur le solide 2)

Sur deux surfaces en vis-à-vis avec "g" la distance minimum entre les deux solides (selon la normale à un des solides, en supposant qu'elle existe) on peut relever les conditions suivantes :

- a "g" doit-être supérieure à zéro ou nulle. C'est la condition de non-pénétration (cf. fig(30), figure de gauche) :

$$g(x, t) = g(X_1, X_2) \geq 0. \quad (282)$$

- b On suppose qu'il n'y a pas de collage des matériaux en contact. Ce qui signifie que la force de contact, lorsqu'elle existe est obligatoirement négative par rapport à la norme de la surface que l'on considère (cf. fig(30), figure de droite).

$$\vec{Q} \cdot \vec{N} = Q^N \leq 0. \quad (283)$$

La force de contact ne doit pas empêcher le décollement,

- c On doit toujours avoir soit la condition "a" soit la condition "b", c'est-à-dire :

$$g(x, t) \cdot Q^N = 0 \quad (284)$$

Les conditions "a", "b", "c" sont appelées les conditions de Signorini.

La formulation variationnelle du problème s'écrit simplement comme l'extension de la formule sans contact :

$$\int_{\mathcal{D}} \vec{\gamma} \cdot \vec{V}^* dv - \int_{\mathcal{D}} \vec{F} \cdot \vec{V}^* dv + \int_{\mathcal{D}} \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D}^* dv - \int_{\delta\mathcal{D}_T} \vec{T} \cdot \vec{V}^* ds - \int_{\delta\mathcal{D}_c} \vec{Q} \cdot \vec{V}^* ds = 0 \quad (285)$$

Dans cette dernière expression, on remarque que le contact introduit deux nouvelles inconnues : la surface en contact $\delta\mathcal{D}_c$ et les efforts de contact \vec{Q} . Classiquement, ces deux inconnues ne sont pas résolues de manière identique, ni au même moment pendant le processus de résolution.

En résumé, les éléments particuliers au contact sont :

1. une loi de frottement, dans le cas où l'on tient compte de cet aspect,
2. une méthode pour tenir compte des conditions de contact (c'est-à-dire les conditions de Signorini) ce qui constitue un problème sous contraintes (au sens mathématique),
3. un algorithme de recherche des lieux de contact.

39.2 Formulation - Remarques générales

39.2.1 Discrétisation

La prise en compte du contact, n'apporte aucune particularité par rapport au cas sans contact, pour la discrétisation de l'intérieur des domaines.

Concernant les surfaces susceptible d'entrer en contact :

1. En général l'interpolation initiale est de type C_0 , ceci entraîne une non-continuité de la normale à la surface frontière, aux raccordements entre éléments. Dans le cas du passage par glissement, d'un élément à l'autre, il y a apparition d'irrégularités dans la réponse (au niveau des réactions par exemple).
2. Pour certains éléments de contact particuliers, les efforts de contact sont également des inconnues discrétisés, ceci par exemple pour récupérer une densité continue d'effort de contact (contrairement au cas de contact ponctuel, qui est le cas classique!).
3. Classiquement le rôle des deux surfaces en vis-à-vis n'est pas symétrique. Une des deux surfaces est considéré comme la surface "cible" (ou la surface maître) (on parle de cible ou maître). La seconde surface est uniquement considéré via ses noeuds, appelé noeuds "projectiles" (ou esclaves). On parle de technique "cible-projectile" ou "maître-esclave". C'est la cible ou le maître qui, lors d'un contact, impose la position des noeuds "projectiles" ou esclaves. Dans certain cas, lorsque l'on veut une analyse plus symétrique, à la suite d'une première analyse maître-esclave, on inverse le rôle des surfaces en présence (le maître devient l'esclave et vis-versa) et on refait une seconde analyse. Cependant le résultat final peut dépendre de l'ordre dans lequel on a traité les surfaces.

39.2.2 Procédure de recherche de la surface de contact

La recherche de la surface de contact s'effectue au travers de celle des noeuds en contact, ou plus particulièrement des couples projectile-cible. La méthode classique utilisée est celle d'essai-erreur. La méthode est la suivante, soit un certain nombre de noeud en contact ou non :

1. Calcul de l'équilibre,
2. vérification :
 - (a) les efforts au niveau des contacts ne sont pas positifs, sinon on relâche les noeuds et dans ce cas \rightarrow changement de statut,
 - (b) vérification qu'il n'y a pas pénétration d'un noeud libre, si oui, le noeud est en contact considéré est en contact et dans ce cas \rightarrow changement de statut,
3. s'il y a modification d'un statut de noeud, retour au début de l'algorithme sinon, fin.

Cette procédure est longue et coûteuse en temps car il faut itérer.

Dans le cas où il y a un très grand nombre de noeud, la deuxième partie de la phase de vérification (détection de la pénétration), qui est proportionnelle au nombre de noeud, peut-être très lourde.

Pour améliorer la vitesse, pour chaque noeud on définit un nombre restreint de cibles potentielles, ceci à l'aide d'un algorithme de trie. Par exemple on définit une "boite" qui entoure le noeud, et on ne considère que les cibles qui sont internes à la boite. La boite doit-être mise à jour régulièrement en fonction du déplacement des noeuds, mais malgré les calculs induits supplémentaires, cette technique permet une réduction drastique du temps de vérification.

39.3 Prise en compte du contact - problème sous contrainte

Deux voies sont classiques :

1. méthode par pénalisation,
2. méthode par multiplicateur de Lagrange.

On reconnaît là les méthodes que l'on a vue au chapitre (30).

On se place dans le cas où on a détecter une pénétration, donc un contact, et on cherche à assurer la condition de non-pénétration. Dans ce cas la contrainte a respecter est la condition :

$$g(x, t) = g(X_1, X_2) = 0. \quad (286)$$

Il suffit alors d'utiliser directement, les méthodes introduites au chapitre (30).

En particulier dans le cas de la pénalisation, on utilisera les expressions (246) et (245).

$$\langle \dot{V}^{*ar} \rangle ((R'(ddl))) = \langle \dot{V}^{*ar} \rangle \left((R(ddl)) + \beta g \left(\frac{\partial g}{\partial ddl} \right) \right) = 0 \quad \forall V^{*ar}$$

d'où pour la raideur on trouve la relation générale.

$$- \left[\frac{\partial R'}{\partial ddl} \right] = - \left[\left[\frac{\partial R}{\partial ddl} \right] + \beta \left[\frac{\partial g}{\partial ddl} \frac{\partial g}{\partial ddl} \right] + \beta g \left[\frac{\partial^2 g}{\partial ddl^2} \right] \right]$$

Dans le cas des multiplicateurs de Lagrange on utilise les relations (232) et (233).

$$\langle V^{*ar}, \dot{\lambda} \rangle \left((R(f(X^{ar}))) + \langle \lambda \rangle \left(\frac{\partial g}{\partial X^{ar}} \right) \right)$$

et

$$- \frac{\partial}{\partial ddl} \left(\frac{(R(f(X^{ar}))) + \langle \lambda \rangle \left(\frac{\partial g}{\partial X^{ar}} \right)}{g} \right) = - \left[\frac{\left[\frac{\partial(R(f(X^{ar})))}{\partial X^{bs}} \right] + \langle \lambda \rangle \left[\frac{\partial^2 g}{\partial X^{ar} \partial X^{bs}} \right]}{\left[\frac{\partial g}{\partial X^{bs}} \right]} \quad \left| \quad \frac{\left[\frac{\partial g}{\partial X^{ar}} \right]}{[0]} \right] = [K]$$

De manière à être plus précis au niveau de la condition, supposons le contact entre un noeud projectile M avec une facette triangulaire de sommets A B C. La normale à la facette est :

$$\vec{N} = \frac{\vec{AB} \times \vec{AC}}{\|\vec{AB} \times \vec{AC}\|} \quad (287)$$

et la condition peut s'écrire sous la forme :

$$\vec{AM} \cdot \vec{N} = 0 \quad (288)$$

Cette équation fait intervenir comme degrés de liberté, les coordonnées finales des points M, A, B, C.

Dans le cas d'une interpolation quadratique, et ou d'une facette quadrangulaire, le même type de raisonnement peut-être effectué, ce qui généralise la méthode. Cependant, il faut noter que dans tous les cas autres que celui de la facette triangulaire, le calcul de la normale est dépendant du point de la surface de la cible où le calcul est effectué. La méthode classique est de prendre le point de la cible, le plus proche de M.

39.4 Exemple d'application : contact entre deux barres

Soit un problème unidimensionnel de contact entre deux barres. L'origine 0 de la première barre est supposée fixe et encastree. Les deux barres ne peuvent se déplacer que selon l'axe X.

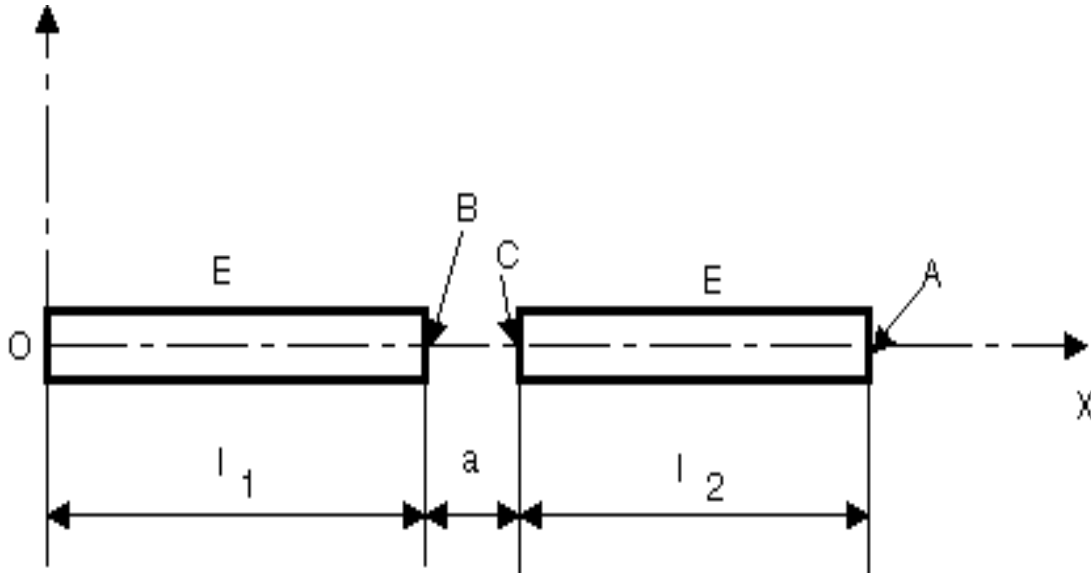


FIGURE 31 – Géométrie des barres avant contact

La face contenant le point A est déplacée négativement de la valeur de $2a$, ce qui provoque le contact entre les points B et C. On se place en petites déformations, petits déplacements.

On se propose de résoudre le problème par différentes méthodes c'est-à-dire de déterminer la position finale du point B et C en fonction de E module d'YOUNG, l_1, l_2, a et la section S supposée identique pour les deux barres. Pour simplifier les différentes expressions on posera :

$$k_1 = \frac{ES}{l_1} \quad \text{et} \quad k_2 = \frac{ES}{l_2} \quad (289)$$

Après déplacement du point A on a la situation de la figure 32.

$$\begin{aligned} F_B &= \varepsilon ES = \frac{U^B}{l_1} ES = k_1 U^B = k_1 (\hat{X}^B - X^B) \\ F_C &= \varepsilon ES = \frac{U^C}{l_2} ES = k_2 U^C = k_2 (\hat{X}^C - X^C) \end{aligned} \quad (290)$$

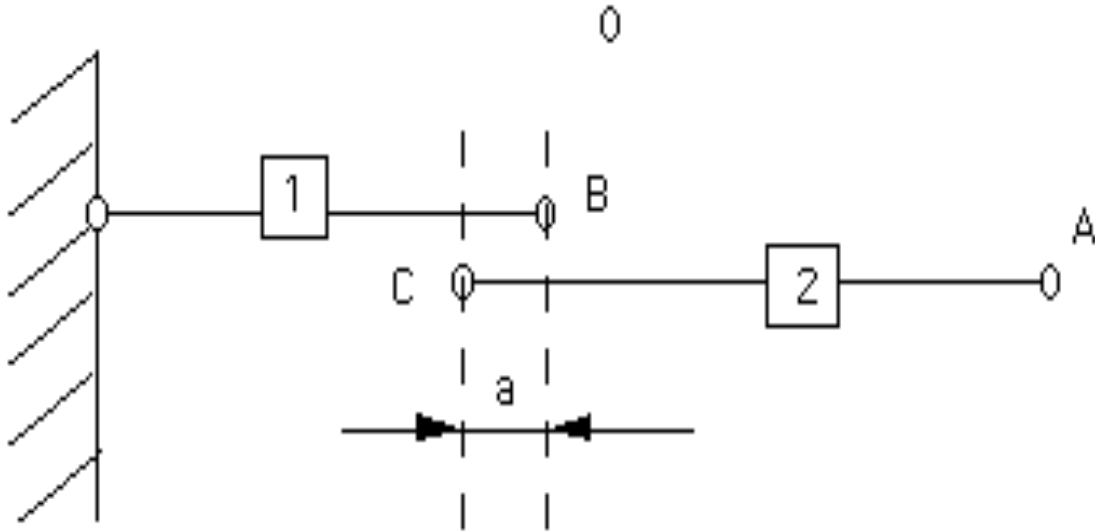


FIGURE 32 – Géométrie des barres après contact

Sans l'intervention du contact le problème peut s'écrire :

$$k_1(\hat{X}^B - X^B) = 0 \quad \text{et} \quad k_2(\hat{X}^C - X^C) = 0 \quad (291)$$

C'est-à-dire :

$$(R) = \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{X}^B \\ \hat{X}^C \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} k_1 X^B \\ k_2 X^C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad X^B = l_1 \quad \text{et} \quad X^C = l_1 - a \quad (292)$$

a) Résolution par une méthode directe (équations de la RDM). On utilise les efforts de contact de chaque barre : F_B et F_C , ces efforts doivent être égaux d'où :

$$k_1(\hat{X}^B - X^B) = -k_2(\hat{X}^C - X^C) \quad (293)$$

Au contact on a :

$$\hat{X}^B = \hat{X}^C \quad (294)$$

d'où :

$$\hat{X}^B = \hat{X}^C = \frac{(k_1 X^B + k_2 X^C)}{(k_1 + k_2)} \quad (295)$$

b) Résolution par la méthode des multiplicateurs de LAGRANGE. On a la relation cinématique

$$g(ddl) = \hat{X}^B - \hat{X}^C = 0 \quad (296)$$

d'où :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial \hat{X}^B} \\ \frac{\partial g}{\partial \hat{X}^C} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (297)$$

d'où le résidu modifié :

$$(R') = \begin{pmatrix} (R) + \lambda \frac{\partial g}{\partial dd} \\ g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 & 0 & 1 \\ 0 & k_2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{X}^B \\ \hat{X}^C \\ \lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} k_1 X^B \\ k_2 X^C \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (298)$$

La matrice de raideur pour la méthode de Newton est :

$$[K] = \left[-\frac{\partial R'}{\partial dd'} \right] = - \begin{pmatrix} k_1 & 0 & 1 \\ 0 & k_2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (299)$$

qui est de la forme

$$\begin{pmatrix} K'' & Q^T \\ Q & 0 \end{pmatrix} \quad (300)$$

On retient comme données de départ par exemple : $0 = \hat{X}^B = \hat{X}^C = \lambda$ d'où à la première itération on a l'équation matricielle :

$$- \begin{pmatrix} k_1 & 0 & 1 \\ 0 & k_2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{X}^B \\ \hat{X}^C \\ f \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} k_1 X^B \\ k_2 X^C \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{avec } X^B = l_1 \text{ et } X^C = l_1 - a \quad (301)$$

NB : $f = \lambda$ est l'effort de contact :

$$k_1(\hat{X}^B - X^B) = -\lambda \quad \text{et} \quad k_2(\hat{X}^C - X^C) = \lambda \quad (302)$$

La résolution du système ci-dessus conduit à :

$$\hat{X}^B = \hat{X}^C = \frac{(k_1 X^B + k_2 X^C)}{(k_1 + k_2)} \quad (303)$$

d'où la force f .

d) Résolution par la méthode de pénalisation.

On reprend la formule (242) du chapitre général sur la méthode de pénalisation, pour calculer le nouveau résidu :

$$(R') = \begin{pmatrix} k_1 + \alpha & -\alpha \\ -\alpha & k_2 + \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{X}^B \\ \hat{X}^C \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} k_1 X^B \\ k_2 X^C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (304)$$

Pour calculer la matrice de raideur on utilise la formule (244) ce qui conduit à :

$$\{[K''] + [Q]^T \alpha [Q](X)\} \quad (305)$$

car la variation seconde de la fonction g , est nulle (la dérivée première est constante), c'est-à-dire :

$$[K] = \left[-\frac{\partial R'}{\partial dd'} \right] = - \begin{pmatrix} k_1 + \alpha & -\alpha \\ -\alpha & k_2 + \alpha \end{pmatrix} \quad (306)$$

On retient comme données de départ par exemple : $0 = \hat{X}^B = \hat{X}^C$ d'où à la première itération on a l'équation matricielle :

d'où :

$$-\begin{pmatrix} k_1 + \alpha & -\alpha \\ -\alpha & k_2 + \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{X}^B \\ \hat{X}^C \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} k_1 X^B \\ k_2 X^C \end{pmatrix} \quad (307)$$

Si l'on suppose $\alpha \gg k_1$ et k_2 , on obtient la condition :

$$\alpha(\hat{X}^B - \hat{X}^C) \approx 0 \quad (308)$$

d'où on retrouve la condition de contact $\hat{X}^B = \hat{X}^C$ puis en ajoutant les deux équations du système linéaire on obtient le résultat (303).

On voit aussi que si $\alpha \ll k_1$ et k_2 , dans ce cas le contact n'est plus pris en compte et on obtient à la limite : $\hat{X}^B = X^B$ et $\hat{X}^C = X^C$.

39.5 Exemple de la prise en compte des conditions limites de contact dans le code de calcul Herezh++ : description de quelques particularités de l'implantation

39.5.1 Réponse à la question : le point est-il intérieur à l'élément ?

La réponse à cette question permet de statuer sur la pénétration éventuelle du noeud projectile.

Soit un point M et un élément fini E , une question qui est posée au cours de la résolution de la conditions de contact est : le point est-il intérieur à l'élément ?

L'option retenue est dans une première étape de privilégier la précision par rapport à la vitesse du calcul.

Le test est effectué dans l'élément de référence. Pour ce faire on détermine les coordonnées du point par rapport au repérage curviligne de l'élément de référence, à l'aide d'une méthode itérative de type Newton. Ensuite le test est effectué aisément sur les coordonnées locales (curvilignes). Par exemple pour un hexaèdre le test se résume à : $|\theta^i| < 1$.

Soit M_{ref} le point origine de l'élément de référence. Ce dernier a des coordonnées curvilignes nulles $\theta^i = 0$. L'objectif est donc de trouver les coordonnées curvilignes θ^i correspondants à $M_{ref} \vec{M}$. Pour cela on utilise la boucle suivante :

- Initialisation : $\theta^i = 0$
- boucle tant que $\|\Delta\theta^i\| > \varepsilon$ faire
 - calcul de la base locale \vec{g}_i au point $A(\theta^i)$
 - calcul de $\Delta\theta^i = \vec{A}\vec{M} \cdot \vec{g}_i$,
 - $\theta^i_+ = \Delta\theta^i$

Le point A ainsi déterminé représente au final la projection de M dans le repérage de référence. Dans le cas d'éléments volumique, à convergence A et M sont confondus, par contre dans le cas d'un élément surfacique en 3D, $\vec{A}\vec{M}$ représente le vecteur normal à la surface passant par M. Il est alors possible de vérifier la condition d'appartenance à la coque (ou plaque) : $\|\vec{A}\vec{M}\| < h/2$ avec h l'épaisseur de la coque au point A, dont la position est supposée être au niveau de la surface médiane.

Remarque : Un point M très éloigné de l'élément, peut conduire à un repère local inexploitable, par exemple dans le cas d'éléments quadratiques. On se limite donc, aux repères locaux calculés strictement dans l'élément.

39.5.2 Création des éléments de frontière

Tout d'abord une explication sur la terminologie, on appelle frontières de l'éléments les frontières naturelles c'est-à-dire :

- pour les éléments 1D : les noeuds aux l'extrémitées en monde 1D, sinon également l'élément en monde 2D et 3D,
- pour les éléments 2D : les arrêtes de l'élément en monde 2D, sinon également la surface de l'élément en monde 2D et 3D,
- pour les éléments 3D : les surfaces externes de l'élément.

En 3D, les arrêtes des éléments surfaciques représentent à l'aide de la donnée d'épaisseur, la surface latérale de l'élément. Les arrêtes des éléments linéiques représentent à l'aide des données de la section générique, la surface latérale de l'élément, et de même pour les points extrêmes.

39.5.3 Eléments de Contact

Une remarque générale : il serait théoriquement possible de traiter le contact en examinant à chaque instant si les noeuds projectile sont interne aux éléments cibles. Cette procédure est très lourde, et on la réserve aux phases d'initialisation. Une fois déterminé un contact c'est-à-dire un couple noeud - face (ou ligne) d'élément, il est plus avantageux a priori de suivre le noeud en contact tout au long de son déplacement en gardant, d'un pas de temps à l'autre, le souvenir de la face (ou ligne) avec lequel il est en contact. On définit donc des éléments de contact constitué d'un noeud et d'une face (ou un ligne).

39.5.4 Pénalisation

L'idée de la pénalisation est d'introduire des efforts de réaction proportionnelles à la pénétration. L'effort s'exerce d'une part sur le noeud qui pénètre, et d'autre part sur la face (ou la ligne) de la frontière qui est impactée. Se pose alors de problème de la répartition de l'effort sur la cible.

Le problème n'a pas qu'une seule solution. Une première idée serait de répartir l'effort sur les différents noeuds en fonction de la distance du noeud au point impacté. La distance euclidienne utilisant des carrées et des racines carrées, peut se révéler relativement coûteuse au final sur un grand nombre de point impacté, en particulier si l'on veut déterminer un opérateur tangent par rapport aux degrés de liberté du système. En conséquence, la solution retenue est d'utiliser une expression moins précise mais plus simple et rapide :

$$\vec{F}^r = \frac{\sum_a |X^{ar}| \vec{F}}{\sum_s \sum_b |X^{bs}|} \quad (309)$$

39.5.5 Adaptation du facteur de pénalité

Le coefficient de pénalisation doit être adapté à la raideur des matériaux en contact. Un facteur trop faible induit une pénétration importante non réaliste. Un facteur trop élevé va avoir tendance a "écraser" les autres constituants de l'équilibre. Nous allons examiner différentes propositions.

La solution retenue par le logiciel LS-DYNA est d'utiliser un facteur de pénalisation fonction du module de compressibilité du matériau d'une part, et de dimensions géométriques d'autre part. Pour les éléments volumiques, la formule suivante est proposée :

$$\alpha_{se} = \frac{f K_e A_{se}^2}{V_e} \quad (310)$$

où α_e est le facteur de pénalité relatif à la surface "s" de l'élément "e", "f" est un facteur d'ajustement fixé par défaut à 0.1, K_e est le module de compressibilité de l'élément "e", A_{se} est la surface de face en contact, V_e est le volume de l'élément.

39.5.6 Frottement

Le frottement intervient lors du contact entre deux matériaux. Les paramètres matériaux dépendent en général du couple de matériaux en présence. Dans le cas d'Herezh++, le contact est simulé au travers d'“éléments de contact” qui sont constitué d'un noeud, appelé “noeud projectile” et d'une surface “cible”. On parle également de “noeud esclave” et surface maître. La surface est toujours constituée par une frontière d'un élément fini. La loi de frottement est donc associée à “cette” élément fini.

Les éléments de contact se créent et disparaissent au gré de l'apparition ou non de contact.

Parmi les différentes lois de frottement disponibles, la loi dite de Coulomb est la plus classique. C'est la première loi de frottement implanté. L'objectif d'une loi de frottement est de déterminer les efforts de frottement en fonction du déplacement ou de la vitesse.

39.5.7 Loi de Coulomb

La loi de Coulomb est une loi phénoménologique qui est largement employée. On distingue la loi classique et la loi régularisée.

Dans le cas classique, deux types de régime peuvent survenir : soit les points en contact ne glissent pas l'un par rapport à l'autre, c'est le contact collant (stick contact), soit il y a glissement (sliding). Le comportement est régi par “le coefficient de frottement” qui détermine le cône de frottement. La force de contact est telle qu'elle doit toujours demeurer à l'intérieur du cône : strictement dans le cas du contact collant, sur le cône dans le cas du glissement. Dans ce dernier cas on a la relation :

$$\vec{F}_T = -\mu \|\vec{F}_N\| \cdot \frac{\vec{V}_{(rt)}}{\|\vec{V}_{(rt)}\|} \quad (311)$$

\vec{F}_T est la force tangentielle, μ est le coefficient de frottement qui dépend du couple de matériau en contact, \vec{F}_N est la force normale, et $\vec{V}_{(rt)}$ est la vitesse relative tangentielle du point en contact.

Le coefficient de frottement peut également dépendre de la vitesse : en général au démarrage le coefficient est plus important que lorsque le frottement est en régime établi. Une modélisation de cette dépendance peut s'exprimer sous la forme suivante :

$$\mu(v) = \mu_C + (\mu_S - \mu_C) \cdot e^{-c \cdot v} \quad (312)$$

où μ_S est le frottement statique, μ_C est le frottement cinématique, $v = \|\vec{V}_{(rt)}\|$ est l'intensité de la vitesse relative, $\mu(v)$ est le coefficient variable.

La loi de Coulomb classique introduit une indétermination lorsque l'on se trouve dans le cône de frottement. Ceci peut-être résolu par différentes méthodes générales (cf. théorie du contact) mais il est également possible d'utiliser une loi de contact dite “régularisée” qui permet d'éviter cette indétermination. Dans le cas d'un frottement régularisée, la relation $\vec{F}_T = f(\vec{V}_{rt})$ est toujours vérifiée (il n'y a pas deux régimes). Cependant la forme de la fonction “f” tend à reproduire le fonctionnement initial de la loi classique de Coulomb. Normalement, due au fait qu'il n'y ait plus d'indétermination, le calcul global est plus robuste.

Dans le cas d'un calcul régularisé on adopte le comportement suivant :

$$\vec{F}_T = -\mu \cdot \varphi(v) \|\vec{F}_N\| \cdot \frac{\vec{V}_{(rt)}}{\|\vec{V}_{(rt)}\|} \quad (313)$$

où la fonction $\varphi(v)$ peut prendre plusieurs formes. Les formes implantées sont extraites de l'ouvrage de Peter Wriggers (Computational Contact Mechanics, Wiley, ISBN 0-471-49680-4).

$$\varphi_1(v) = \frac{v}{\sqrt{(v^2 + \varepsilon^2)}} \quad (314)$$

$$\varphi_1(v) = \tanh\left(\frac{v}{\varepsilon}\right) \quad (315)$$

$$\varphi_1(v) = \begin{cases} -1 & \text{if } v < -\varepsilon \\ \frac{v}{2\varepsilon} & \text{if } -\varepsilon \leq v \leq \varepsilon \\ 1 & \text{if } v > \varepsilon \end{cases} \quad (316)$$

La première fonction est qualifiée par l'auteur de "square root regularization", la seconde de "hyperbolic tangent regularization" la dernière de "piecewise polynomial regularization". ε est un paramètre de réglage qui permet de contrôler le passage à la saturation de la loi. Lorsque ε tend vers 0, le comportement tend vers celui du modèle original de Coulomb.

Dans de nombreux cas il est nécessaire de disposer du comportement tangent par rapport aux degrés de liberté, par exemple pour le calcul de la matrice de raideur tangente en implicite. Ici cela revient à déterminer le comportement tangent par rapport aux composantes du vecteur vitesse, ce dernier étant lui-même relié aux ddls de positions par les relations cinématique.

Dans le cas de la loi originale de Coulomb en contact collant, le noeud est entièrement lié à la surface cible par une relation cinématique de position, on peut dire que le comportement tangent ne dépend pas de la loi de comportement.

Dans le régime glissant, on utilise la relation (311) en notant que :

$$\frac{\partial \vec{V}_{(rt)}}{\partial V_{(rt)}^a} = \vec{I}_a \quad \text{et} \quad \frac{\partial v}{\partial V_{(rt)}^a} = \frac{V_{(rt)}^a}{v} \quad (317)$$

on obtient :

$$\frac{\partial \vec{F}_T}{\partial V_{(rt)}^a} = - \left(\mu \frac{\partial}{\partial V_{(rt)}^a} \left(\frac{\vec{V}_{(rt)}}{v} \right) + \frac{\vec{V}_{(rt)}}{v} \frac{\partial \mu}{\partial V_{(rt)}^a} \right) \|\vec{F}_N\| \quad (318)$$

Lorsque le coefficient de frottement est invariant le second terme de l'expression de droite est nul, sinon nous avons :

$$\frac{\partial \mu}{\partial V_{(rt)}^a} = \left(\frac{-c(\mu_S - \mu_C) \cdot e^{-c \cdot v}}{v} \right) V_{(rt)}^a \quad (319)$$

Dans le cas d'une loi régularisée, il faut prendre en compte la variation de la fonction de régularisation $\varphi(v)$. En fonction de (316) nous avons :

$$\frac{\partial \varphi_1(v)}{\partial V_{(rt)}^a} = \frac{1}{\sqrt{(v^2 + \varepsilon^2)}} \left(1 - \frac{v^2}{(v^2 + \varepsilon^2)} \right) \quad (320)$$

$$\frac{\partial \varphi_1(v)}{\partial V_{(rt)}^a} = 1 - \tanh^2\left(\frac{v}{\varepsilon}\right) \quad (321)$$

$$\frac{\partial \varphi_1(v)}{\partial V_{(rt)}^a} = \begin{cases} 0 & \text{if } v < -\varepsilon \\ \frac{1}{2\varepsilon} & \text{if } -\varepsilon \leq v \leq \varepsilon \\ 0 & \text{if } v > \varepsilon \end{cases} \quad (322)$$

La variation finale de (313) est alors :

$$\frac{\partial \vec{F}_T}{\partial V_{(rt)}^a} = - \left(\mu \varphi(v) \frac{\partial}{\partial V_{(rt)}^a} \left(\frac{\vec{V}_{(rt)}}{v} \right) + \frac{\vec{V}_{(rt)}}{v} \varphi(v) \frac{\partial \mu}{\partial V_{(rt)}^a} + \frac{\mu \vec{V}_{(rt)}}{v} \frac{\partial \varphi(v)}{\partial V_{(rt)}^a} \right) \|\vec{F}_N\| \quad (323)$$

Quatorzième partie

Elements d'implantation informatique : partie 1

40 Introduction

41 conception_objet

Quinzième partie

partie 2 : Utilisation d'XML dans le cadre du calcul par éléments finis

42 Introduction

Je tiens a remercier Laëtitia Duigou, qui a collaborée à la réalisation de cette partie

L'objectif est ici de mettre en place une utilisation rationnelle de la norme XML dans le cadre de nos développements qui utilisent la méthode des éléments finis. L'idée est ainsi de définir une syntaxe générale en mode texte, fortement typée, permettant d'exprimer les grandeurs manipulées dans le cadre des différentes entrées-sorties.

42.1 Contexte et état de l'art

D'une manière générale, de nombreux travaux ont été consacrés à la définition et la mise en place de formats dédiés aux calculs scientifiques avec comme objectif de favoriser l'échange entre des logiciels d'origines différentes. HDF5 développé par le "National Center for Supercomputing Applications" (NCSA) [?] en constitue un exemple représentatif. HDF5 est un format de stockage auto-documenté, qui est proposé avec une librairie de fonctions permettant l'ensemble des manipulations courantes. La librairie est libre, et permet de manipuler des informations de très grandes tailles. L'intérêt du format HDF est donc indéniable, cependant son utilisation est restreinte aux logiciels qui utilisent la librairie associée. A l'inverse, tout format fondé sur la norme XML, peut être exploité par un nombre important de logiciels d'horizons très divers : outils de formatage, outils du web ... De plus un format de type HDF n'est pas adapté à la "validation" (au sens XML) des données particulièrement utiles pour la constitution d'un fichier de commande de calculs éléments finis. C'est pourquoi nous nous intéressons à l'utilisation du XML.

Plusieurs travaux ont déjà été réalisés en vue de définir un format d'échange en XML. Par exemple, le projet femML [?] présenté par J. Michopoulos avait pour objectif de définir un standart général dédié aux éléments finis. Le formatage des données s'appuie principalement sur un fichier DTD ("Document Type Definition" [?]), qui constitue la première forme historique de formatage des fichiers XML. En fait, le typage obtenu avec une DTD est assez restreint d'où la mise en place des "Schema" XML (proposition 2001 du W3C) qui permettent un typage beaucoup plus riche. Cependant, du fait, sans doute, de la jeunesse des Schema, nous avons trouvé très peu de Schema dédiés au domaine des éléments finis.

Trois réalisations sont assez représentatives de la bibliographie. XSIL [?] [?] "Extensible Scientific Interchange Language" a été développé dans les années 2000 et s'appuie principalement sur une DTD. Un schéma existe également, mais simple et utilisant très peu les nouvelles possibilités des schémas. XDMF [?] "eXtensible Data Model and Format" qui est utilisé au sein du projet ICE "Interdisciplinary Computing Environment" est une surcouche XML au format HDF5. Les informations sont décomposées en deux catégories : les données "légères" (une date, un nombre, une référence) sont directement gérées en XML, les données complexes et volumineuses sont gérées en HDF5. L'idée est donc d'essayer d'utiliser l'existant (HDF5) tout en cherchant à bénéficier des nouvelles technologies XML. L'ensemble reste finalement complexe et dédié aux gros projets, il contient les avantages et

inconvenients initiaux du format HDF5. Enfin certains codes de calcul, voir par exemple FeViaduct [?], XMDS [?], utilisent un système d'entrées-sorties XML. En entrée l'intérêt est de pouvoir valider des données, et en sortie de faciliter les transferts de données pour le post-traitement. Cependant, les DTD ou schémas utilisés restent simples (XMDS) ou inconnus (FeViaduct).

42.2 Intérêt d'XML

La norme XML fournit d'une part, des concepts permettant d'établir une grammaire adéquate à notre objectif, et d'autre part, un ensemble d'outils permettant de traiter les informations conformes au langage établi. Cette norme constitue ainsi pour nous un guide de formatage des données. Le fait qu'il s'agisse d'une norme internationale, utilisée dans de nombreux domaines, est une garantie de pérennité.

Les documents XML comportent la nécessité d'être "bien formés" c'est-à-dire d'obéir aux règles syntaxiques du langage XML. Différents outils permettent de vérifier cette qualité, en particulier les "parseurs" (voir par exemple Xerces de la fondation Apache [?]) et les éditeurs (exemple : Morphon [?] qui comportent également en interne un parseur). Le critère "bien formés" pourra être ainsi vérifié avant toute utilisation par le code de calcul. Un document XML peut également être "valide" par rapport à des règles fixées. Par exemple, on peut ainsi vérifier l'existence de différents mots clés, associés à un champ de valeurs possibles, un nombre d'occurrences, un type etc. Ceci correspond tout-à-fait à l'objectif que l'on recherche, à savoir construire un document texte, contenant des données, qui puisse être validé au regard d'un ensemble de règles (en plus des règles syntaxiques) qui garantissent qu'il n'y ait pas d'erreur de lecture et de compréhension lors de leur utilisation par le programme de calcul.

Initialement, XML n'a pas été conçu pour établir des règles concernant particulièrement des données scientifiques. En fait il s'adressait plutôt aux données textuelles (livres, articles, rapports), associées à des objectifs divers : stockage pérenne, format d'échange rationnel, outils de manipulations via le web ... Cependant, les possibilités introduites dans XML se sont révélées également pertinentes dans le cadre du traitement des données numériques (voir par exemple les interactions avec les bases de données [?]).

Initialement, le formatage des données s'est appuyé sur les DTD qui permettent de définir des structures de types de documents bien adaptés aux documents traditionnels dans le cadre de l'édition, l'affichage et l'impression. Dans le cadre des échanges de données structurées, les DTD souffrent d'un certain nombre de lacunes ([?],[?]) par exemple au niveau des domaines nominaux (namespace). Ainsi, bien que toujours utilisés, les DTD peuvent être avantageusement remplacés par les "schémas XML" apparus à partir de 1999 et finalisés en 2001 (cf. ressources W3C [?]). Les travaux présentés s'inscrivent dans ce contexte.

43 Constitution d'un Schéma général

On entend ici par Schema la définition du schéma XML associé aux structures de données que nous utilisons dans notre code éléments finis Herezh++ [?] développé en C++ suivant une approche objet. Une caractéristique intéressante des schémas est d'utiliser une structuration très proche des langages objets. D'une manière pratique, le schéma se présente sous forme d'un fichier texte, écrit en XML, lisible par tout traitement texte. Par exemple la présentation s'effectue avec des "balises" qui, contrairement au langage HTML, peuvent être choisies librement.

Nous distinguons a priori dans le schéma deux niveaux de données. Le premier concerne les types de

bases classiques, tels que les coordonnées, les vecteurs au sens large c'est-à-dire sans limite de taille, les tenseurs, les matrices, les chaînes de caractères particulières etc. Le second niveau est relatif aux classes plus complexes qui intègrent en général un grand nombre d'objets du premier niveau, et dont la structure interne peut en général se représenter sous forme d'arbres, contrairement aux types de bases. Concernant la portée des types, le premier niveau doit évidemment avoir une portée globale. Pour le second niveau, il est possible de restreindre la portée de certains types d'usages strictement internes, à une arborescence donnée. Ce dispositif permet notamment d'utiliser plusieurs fois un même identificateur générique pour plusieurs groupes de données différents suivant le contexte. Le schéma XML permet naturellement d'effectuer cette distinction. Les types de premier niveau sont implantés directement sous la racine ce qui leur assure une portée générale, alors que les types de second niveau peuvent être déclarés soit internes à un type plus général, et donc dans ce cas avec une portée restreinte ou soit également directement sous la racine.

L'information s'introduit sous forme d' "éléments" XML constitués d'un nom (utilisé comme balise), d'un type et d'attributs éventuels également typés. Ainsi un type unique peut être utilisé de nombreuses fois.

Nous introduisons ainsi, à la suite des définitions des types globaux, la définition d'un "élément" (au sens XML) particulier pour chaque entrée-sortie : un élément pour le fichier d'entrées de données et de commandes, un élément pour le fichier "restart", un élément pour les commandes de post-traitement

Un point également important est la distinction entre attribut et information interne dans une expression entre balises. A priori les spécialistes de bases de données sont plus favorables à l'utilisation de la notion d'attribut pour stocker les données en particulier, grâce à la concision de l'écriture dans le cas d'un grand nombre d'attributs. Cependant, l'utilisation des grandeurs attributs comporte des inconvénients majeurs : il n'est pas possible d'imposer l'ordre de leur apparition et l'accès dans l'arborescence globale des informations n'est pas possible via "un chemin direct" XPath. Pour ces raisons, nous utiliserons de préférence des "éléments" internes qui encapsulent les informations entre une balise ouvrante et une balise fermante.

Dans une première partie, nous examinons un certain nombre de propriétés utiles pour les structures de données que nous voulons mettre en oeuvre puis, dans une seconde partie, nous introduisons des éléments d'implantation.

43.1 Quelques propriétés utiles

Il n'est pas possible ici de faire une présentation exhaustive de l'ensemble des possibilités permises par les schémas. Cependant, nous rappelons quelques propriétés intéressantes adaptées aux éléments finis.

Tout d'abord, on retrouve les différents types de bases classiques : chaîne de caractères ("string"), booléen ("boolean"), les réelles en simple ("float") et double précision ("double"), les entiers signés ou non ("integer", "long", "int", "short" ...). Pour être plus précis différents types particuliers sont également déclinés comme : le temps absolu ou relatif, la durée, les dates récurrentes, les nombres décimaux ("decimal"). Ces derniers types seront, par exemple, utilisés pour décrire les paramètres temporels de calculs en transitoire ou dynamique.

Ces types de bases peuvent être complétés par des "facettes" qui constituent des restrictions du type initial. Parmi les 14 facettes proposées par XML, on note la possibilité de définir une valeur minimale ("minInclusive" ou "minExclusive"), une valeur maximale ("maxInclusive" ou "maxExclusive"). Il est également possible d'introduire des "extensions" aux types initiaux. Une succession de nombres, par exemple les coordonnées d'un tenseur, sera prise en compte par le type "list".

Deux types de commentaires sont disponibles : des commentaires dans le texte (usage classique), mais également de la documentation qui sera ensuite traitée par des outils standards d'extraction et de formatage.

Comme structure de base intéressante, pour les éléments on dispose : de "sequence" qui permet d'imposer la présence ordonnée d'un ensemble d'éléments; de "choice" qui au contraire impose un choix unique entre plusieurs possibilités et enfin "all" qui permet un ordre quelconque d'apparition d'éléments. Ainsi pour introduire une chronologie dans le fichier XML de commande (par exemple, la dimension devra être tout d'abord définie avant d'introduire le maillage), nous utiliserons "sequence" et il est possible de gérer le nombre d'apparitions d'éléments via les attributs : "minOccurs", "maxOccurs", ce dernier pouvant être non borné.

Les éléments sont susceptibles d'être groupés, d'appartenir à d'autres éléments, d'être présentés sous forme générique ... ce qui met en évidence la possibilité de définir une hiérarchie tout-à-fait analogue à celle rencontrée au sein des objets (ou classes) en langage orienté objet.

Enfin, plusieurs schémas d'origines différentes, peuvent être pris simultanément en compte au travers des domaines de noms (d'une manière équivalente au "namespace" du C++), point utile par exemple pour définir une interface entre des logiciels d'origines diverses.

43.2 Implantation

XML offre en standard deux API (Application Programming Interface) permettant de lire, manipuler, transformer et écrire des informations XML. En fait, le W3C fournit des recommandations pour les API, mais leurs mises en oeuvre nécessitent l'utilisation d'une implémentation particulière.

D'une manière générale, deux grandes tendances existent, soit l'utilisation d'outils indépendants qui permettent par exemple de valider un document (vérification de la syntaxe, des règles ...), soit l'utilisation d'une bibliothèque permettant une jonction directe avec l'outil de calculs. De nombreux traitements standards sont alors possibles comme le filtrage et la transformation de sous-parties. Ceci se révélera particulièrement appréciable dans le cadre du post-traitement pour isoler des informations particulières et les transformer en format directement exploitable par des outils classiques de post-traitement : tracés de courbes, éditions de documents en pdf ou html ... L'utilisation de langages dédiés dans ce sens comme le PERL (cf. [?]) ou PYTHON, qui intègre en standard un Parser (API) XML, est alors très simple et performante. Il est à noter l'importance de ces deux langages, dans le cadre du calcul scientifique.

Pour notre part, nous nous sommes plus particulièrement intéressé à l'intégration des API dans le code de calcul, via une bibliothèque associée. Dû au foisonnement actuel du développement d'outils XML, de nombreuses possibilités existent. En particulier on notera les différentes librairies LIBXML existant sous tous les systèmes LINUX. Nous avons opté pour la librairie Xerces proposée par "The Apache Software Foundation" (cf. [?]) qui offre une implantation en C++ plus aboutie, conforme à une grande part des préconisations du W3C les plus récentes. De plus, les outils semblent particulièrement robustes et performants.

Pour notre objectif, deux principales API sont envisageables : SAX et DOM. La première API permet de parser simplement un flot d'informations. Au fil et en fonction de la lecture, elle génère des événements qui doivent être capturés par des méthodes implantées par l'utilisateur. Par exemple à la lecture d'une balise ouvrante d'un élément, SAX signale cette ouverture et peut ramener les différentes entités de l'élément lu. SAX agit ainsi comme un outil de lecture intelligent, qui tout en lisant les grandeurs typées, vérifie la cohérence des grandeurs avec le schéma ou le DTD associé, on parle de parser validant. L'intérêt immédiat est de ne pas avoir à se préoccuper de la mise en page du texte (enregistrement sur une ou plusieurs lignes ...). Cependant SAX ne stocke pas l'ensemble

des informations, il est donc nécessaire d'enregistrer au fur et à mesure de la lecture, les données dans les instances de classes utilisateur associé. Dans le cadre d'une conception objet, lors de la lecture d'informations faisant intervenir un grand nombre de classes d'une manière non linéaire, ce fonctionnement par "gestion d'interruption" n'est pas toujours pratique, une méthode alternative proposée par Xerces est un fonctionnement pas à pas.

L'API DOM, effectue la lecture de données tout en construisant un arbre (ou bosquet) de stockage de ses informations. DOM fournit ensuite un ensemble de méthodes objets permettant de récupérer ces données, voir de les modifier. DOM est plus complexe et plus lente que SAX mais permet une interrogation beaucoup plus souple, en particulier par chaque objet de la structure éléments finis, de manière à générer directement et de manière indépendante les informations encapsulées. Elle est évidemment validante, ainsi on est sûr de disposer de données conformes au schéma. Dans le cas de petites tailles de fichiers (de l'ordre de quelques Mo maximum), cas typique d'un fichier d'entrées, l'API DOM apparaît alors tout-à-fait adaptée. Cependant l'utilisation de DOM aboutit à doubler la place de stockage au moment de la lecture : stockage avec DOM et stockage dans les objets.

En résumé, nous retenons les conclusions suivantes pour nos développements. L'API SAX permet de traiter aisément et efficacement des fichiers de petites ou de grandes tailles ou des fichiers à structures simples, comme un passage typé et fréquent de données entre des logiciels différents. L'API DOM est quant à elle plus intéressante pour des fichiers à structures complexes de faible taille, tels certains fichiers de commande. Cependant l'utilisation d'un parser introduit un temps de traitement supplémentaire. Dans le cas de flots de données situées en interface avec l'utilisateur ou des programmes externes, ce surcoût est la contrepartie au contrôle de la qualité des données. Dans le cas de données entièrement gérées par le logiciel de calcul, par exemple les données nécessaires à un redémarrage (fichier "restart") induisant parfois de très gros fichiers (100Mo, 1Go...), l'idée a été pour l'instant de conserver les méthodes d'entrée-sortie classiques des flots de données C++, tout en adoptant un formatage XML. En restart, la lecture est alors réalisée sans vérification de types afin d'optimiser le temps de traitement.

44 Conclusion

L'étude concerne l'utilisation de la nouvelle norme XML dans le cadre des différentes entrées-sorties pour un calcul éléments finis. Les entités manipulées lors du calcul apparaissent comme des candidats naturels à un traitement et à un formatage utilisant la norme XML aux travers des schémas. Après avoir défini la structure du schéma retenu pour notre application, son implémentation systématique au sein de l'ensemble des classes est en cours de réalisation. Le schéma XML nous semble ainsi une solution pertinente, il reste maintenant à valider ce concept dans le cas d'utilisation concrète : en particulier pour des gros fichiers de maillage ou de sauvegarde, au regard des temps de traitement supplémentaires induits.

Références

- [Belytschko, 1983] Belytschko, T. (1983). *Computational methods for transient analysis*, volume 1 of *Mechanics and mathematical methods*, chapter An overview of semidiscretization and time integration procedures, pages 1–65. Elsevier Science.
- [Bonelli and Bursi, 2002] Bonelli, A. and Bursi, O. S. (2002). "explicit predictor-multicorrector time discontinuous galerkin methods for non-linear dynamics". *Journal of Sound and Vibration*, 256(4) :695–724.
- [Bonelli et al., 2001] Bonelli, A., Bursi, O. S., and Mancuso, M. (2001). Explicit predictor-multicorrector time discontinuous galerkin methods for linear dynamics. *Journal of Sound and Vibration*, 246(4) :625–652.
- [Chien et al., 2003] Chien, C., Yang, C., and Tang, J. (2003). Three-dimensional transient elastodynamic analysis by a space and time-discontinuous galerkin finite element method. *Finite Elements in Analysis and Design*, 39 :561–580.
- [Chung and Lee, 1994] Chung, J. and Lee, J. (1994). A new family of explicit time integration methods for linear and non-linear structural dynamics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 37 :3961–3976.
- [Engeln-Müllges and Uhlig, 1996] Engeln-Müllges, G. and Uhlig, F. (1996). *Numerical Algorithms with C*. Number ISBN 3-540-60530-4. Springer-Verlag.
- [Géradin and Rixen, 1993] Géradin, M. and Rixen, D. (1993). *Théorie des vibrations*. Masson. ISBN 2-225-83952-2.
- [Hughes, 2000] Hughes, T. J. (2000). *The Finite Element Method, Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis*. Dover Publications, Inc. Mineola, New York :, reprint of 1987 edition. ISBN : 0-486-41181-8.
- [Li et al., 2003] Li, X., Yao, D., and Lewis, R. W. (2003). A discontinuous galerkin finite element method for dynamic and wave propagation problems in non-linear solids and saturated porous media. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 57 :1775–1800.
- [Li and Wiberg, 1996] Li, X. D. and Wiberg, N.-E. (1996). Structural dynamic analysis by a time-discontinuous galerkin finite element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 39 :2131–2152.
- [Press et al., 2002] Press, W. H., Teukolsky, S. A., Vetterling, W. T., and Flannery, B. P. (2002). *Numerical Recipes in C*. Number ISBN 0-521-43108-5. Cambridge University Press, second edition edition.
- [Rio, 2014] Rio, G. (2014). *Herezh++ : FEM software for large transformations in solids*. Laboratoire d'ingénierie des matériaux de Bretagne (UEB-UBS), dépôt APP (Agence pour la Protection des Programmes) - Certification IDDN.FR.010.0106078.000.R.P.2006.035.20600.
- [Underwood, 1983] Underwood, P. (1983). Dynamic relaxation : a review. in : Ted belytschko and thomas j.r. hughes editors. *computational methods for transient analysis*. volume 1, chapter 5, pages 245–265. Elsevier Science Publishers B.V.
- [Watts and Champine, 2005] Watts, H. A. and Champine, L. F. (2005). Rkf45 runge-kutta-fehlberg ode solver. Technical report, Albuquerque, New Mexico.
- [Wright, 2002] Wright, W. (2002). *General linear methods with inherent Runge-Kutta stability*. PhD thesis, University of Auckland.

[ZHAI, 1996] ZHAI, W.-M. (1996). Two simple fast integration methods for large-scale dynamic problems in engineering. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 39(24) :4199–4214.