Calcul Tensoriel

Université de Bretagne Sud

Hervé LAURENT/Gérard RIO

version 2001/2002

Table des matières

Notations

Notation matricielle :

$[\ ]$	matrice
$(\ )$	vecteur colonne
$<\ >$	vecteur ligne

Notation indicielle :

$a \ldots h$	concerne les coordonnées dans le repère cartésien (variant de 1 à 3)
$i \ldots q$	concerne les coordonnées curvilignes (variant de 1 à 3)
$\alpha \ldots \omega$	concerne les coordonnées curvilignes (variant de 1 à 2)

Algèbre

$a, \ldots, z;\ A, \ldots, Z$	scalaire ($\in \mathbb{R}$)
$\overrightarrow{a}, \ldots, \overrightarrow{z}$	vecteurs ($\in \mathbb{R}^n$)
$\underset{\sim}{A}, \ldots, \underset{\sim}{Z}$	tenseurs ($\in \mathbb{R}^n$)

$\delta^i_j = \delta_{ij} = \delta^{ij}$	symbole de Kronecker
$\underset{\sim}{Id}$	tenseur identité
e_{ijk}	composantes du tenseur permutation
ϵ_{ijk}	composantes du tenseur permutation absolu
$\parallel \overrightarrow{a} \parallel$	norme euclidienne du vecteur $\overrightarrow{a}$
$\lvert \underset{\sim}{a} \rvert = det \left[\underset{\sim}{a}\right]$	déterminant du tenseur $\underset{\sim}{a}$
$\overrightarrow{a} \ . \ \overrightarrow{b}$	produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$
$\overrightarrow{a} \ \wedge \ \overrightarrow{b}$	produit vectoriel des vecteurs $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$
$\underset{\sim}{a} \ : \ \underset{\sim}{b}$	produit contracté des tenseurs $\underset{\sim}{a}$ et $\underset{\sim}{b}$
$\underset{\sim}{a} \ \otimes \ \underset{\sim}{b}$	produit tensoriel des tenseurs $\underset{\sim}{a}$ et $\underset{\sim}{b}$
θ^i	paramétrage curviligne
Γ_{ijk}	symbole de Christoffel de première espèce
${\Gamma_i}^j{}_k$	symbole de Christoffel de seconde espèce

Chapitre 1

Rappels sur les espaces vectoriels en géométrie différentielle

1.1 Espace vectoriel sur IR [5]

Définition : Un ensemble de vecteurs $\boldsymbol{e}$ est un espace vectoriel sur IR si les éléments de $\boldsymbol{e}$ composés des vecteurs $\overrightarrow{x}$, $\overrightarrow{y}$, $\overrightarrow{z}, \ldots$ ont les propriétés suivantes :

1. **Opérations d'addition** (loi de composition interne)
   (a) Commutativité : $\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y} = \overrightarrow{y} + \overrightarrow{x}$
   (b) Associativité : $\overrightarrow{x} + (\overrightarrow{y} + \overrightarrow{z}) = (\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}) + \overrightarrow{z}$
   (c) Elément neutre : $\exists$ un vecteur nul $\overrightarrow{O}$ $\mid$ $\overrightarrow{x} + \overrightarrow{O} = \overrightarrow{x}$
   (d) Elément symétrique : $\exists$ pour chaque vecteur, un vecteur opposé noté $-\overrightarrow{x}$ tel que : $\overrightarrow{x} + (-\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{O}$
2. **Opérations de multiplication par un scalaire** (loi de composition externe)
   (a) Pour tout $\overrightarrow{x} \in \boldsymbol{e}$ on a : $1.\overrightarrow{x} = \overrightarrow{x}$
   (b) Associativité : pour tout $\overrightarrow{x} \in \boldsymbol{e}$ et pour tous réels α et β, on a : $\alpha.(\beta.\overrightarrow{x}) = (\alpha.\beta).\overrightarrow{x}$
   (c) Distributivité des scalaires par rapport à l'addition : pour tout $\overrightarrow{x} \in \boldsymbol{e}$ et pour tous réels α et β, on a : $(\alpha + \beta).\overrightarrow{x} = \alpha.\overrightarrow{x} + \beta.\overrightarrow{x}$
   (d) Distributivité des vecteurs par rapport à l'addition : pour tout $\overrightarrow{x} \in \boldsymbol{e}$ et pour tous réels α et β, on a :

$$\alpha.(\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}) = \alpha.\overrightarrow{x} + \alpha.\overrightarrow{y}$$

Un espace vectoriel possède les propriétés suivantes :

1. Pour tout $\overrightarrow{x}$, $\overrightarrow{y}$, $\overrightarrow{z}$ de $\boldsymbol{e}$: $\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y} = \overrightarrow{x} + \overrightarrow{z} \Longleftrightarrow \overrightarrow{y} = \overrightarrow{z}$
2. Pour tout $\overrightarrow{x}$, $\overrightarrow{y}$ de $\boldsymbol{e}$, il existe un unique vecteur $\overrightarrow{z}$ tel que $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{y} + \overrightarrow{z}$
3. Pour tout $\overrightarrow{x} \in \boldsymbol{e}$ et pour tout réel α on a :

$$\alpha.\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0} \Longleftrightarrow \alpha = 0 \text{ ou } \overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$$

1.2 Sous Espace Vectoriel

Définition : On nomme **sous espace vectoriel** d'un espace vectoriel $\boldsymbol{e}$, toute partie $\boldsymbol{e'}$ non vide de $\boldsymbol{e}$ stable pour les opérations d'addition et de multiplication définies sur $\boldsymbol{e}$.
$\forall\ \overrightarrow{x},\ \overrightarrow{y}\ \in\ \boldsymbol{e'}$ et pour tout réel α etβ :

$$(\alpha\overrightarrow{x}+\beta\overrightarrow{y})\ \text{appartient à}\ \boldsymbol{e'}$$

On montre alors que $\boldsymbol{e'}$ est un espace vectoriel muni des opérations d'addition et de multiplication.

1.3 Base d'un espace vectoriel

1.3.1 Combinaison linéaire de vecteurs

Soit $\boldsymbol{e}$ un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et soit $(\overrightarrow{e_1},\ \overrightarrow{e_2},\ldots,\ \overrightarrow{e_n})$ un sous ensemble fini de vecteurs de $\boldsymbol{e}$. On appelle **combinaison linéaire des vecteurs** $\overrightarrow{e_1},\ \overrightarrow{e_2},\ldots,\ \overrightarrow{e_n}$ tout vecteur $\overrightarrow{v}$ tel que :

$$\overrightarrow{v}=\alpha_1\overrightarrow{e_1}+\alpha_2\overrightarrow{e_2}+\cdots+\alpha_n\overrightarrow{e_n}=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\,\overrightarrow{e_i}$$

Rq : $\overrightarrow{v}$ est toujours un élément de $\boldsymbol{e}$.

1.3.2 Espace vectoriel engendré et famille génératrice

L'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs de toute partie finie $(\overrightarrow{e_1},\ \overrightarrow{e_2},\ldots,\ \overrightarrow{e_n})$ d'un espace vectoriel $\boldsymbol{e}$ est un sous espace vectoriel de $\boldsymbol{e}$, appelé **sous espace vectoriel engendré** par : $\overrightarrow{e_1},\ \overrightarrow{e_2},\ldots,\ \overrightarrow{e_n}$
Une **partie $\boldsymbol{G}$** ou **famille de vecteur** d'un espace vectoriel $\boldsymbol{e}$ est dite **génératrice de $\boldsymbol{e}$** si tout vecteur de $\boldsymbol{e}$ est une combinaison linéaire de $\boldsymbol{G}$.

1.3.3 Partie libre, partie liée d'un espace vectoriel

Une partie d'un espace vectoriel $\boldsymbol{e}$ sur $\mathbb{R}$, est dite **libre** si pour tout nombre fini d'éléments $(\overrightarrow{e_1},\ \overrightarrow{e_2},\ldots,\ \overrightarrow{e_n})$ de cette partie on a :

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\,\overrightarrow{e_i}=\overrightarrow{0}\implies\alpha_1=\alpha_2=\cdots=\alpha_n=0$$

La partie **liée** dans le cas contraire.
Propriété : si une partie $\boldsymbol{L}$ est une partie liée d'un espace vectoriel, alors l'un au moins des vecteurs de $\boldsymbol{L}$ est une combinaison linéaire d'autres vecteurs de $\boldsymbol{L}$.

1.3.4 Base d'un espace vectoriel

On nomme **base d'un espace vectoriel** toute partie génératrice et libre de cet espace vectoriel.

- **Propriété caractéristique d'une base** : pour qu'une partie $\boldsymbol{B}$ d'un espace vectoriel $\boldsymbol{e}$ soit une base de $\boldsymbol{e}$, il faut et il suffit que tout vecteur de $\boldsymbol{e}$ s'exprime de façon unique, par une combinaison linéaire d'un nombre fini de vecteurs de $\boldsymbol{e}$.
- **Coordonnées d'un vecteur dans une base donnée** soit $B = (\overrightarrow{e_1},\ \overrightarrow{e_2}, \ldots,\ \overrightarrow{e_n})$ une base finie d'un espace vectoriel $\boldsymbol{e}$ sur $\mathbb{R}$. Tout vecteur de $\boldsymbol{e}$ s'exprime de façon unique en fonction des vecteurs $\overrightarrow{e_1},\ \overrightarrow{e_2}, \ldots,\ \overrightarrow{e_n}$, autrement dit il existe des réels $x_1,\ x_2, \ldots,\ , x_n$ tels que :

  $$\overrightarrow{v} = x_1\overrightarrow{e_1} + x_2\overrightarrow{e_2} + \cdots + x_n\overrightarrow{e_n}$$

  le n-uplet $(x_1,\ x_2, \ldots,\ x_n)$ est appelé coordonnée du vecteur $\overrightarrow{v}$ dans la base $(\overrightarrow{e_1},\ \overrightarrow{e_2}, \ldots,\ \overrightarrow{e_n})$.

1.4 Dimension d'un espace vectoriel fini

Si un espace vectoriel $\boldsymbol{e}$ admet une base de n éléments, toute les autres bases de $\boldsymbol{e}$ ont également n éléments, ce nombre d'élément est appelé **dimension** de l'espace vectoriel $\boldsymbol{e}$ que l'on note $dim\ e$.

1.5 Espace vectoriel euclidien

Définition : L'espace vectoriel euclidien, noté $\boldsymbol{E}$ est un espace vectoriel possédant une opération particulière, **le produit scalaire** qui s'écrit :

$$\forall\ \overrightarrow{x},\ \overrightarrow{y} \text{ et } \overrightarrow{z}\ \in\ \boldsymbol{E}, \text{ on a } :\ \overrightarrow{x} \text{ et } \overrightarrow{y}\ \rightarrow\ \overrightarrow{x}\ .\ \overrightarrow{y}\ \in\ \mathbb{R}$$

Il possède les propriétés suivantes :

1. Commutativité : $\overrightarrow{x}\ .\ \overrightarrow{y} = \overrightarrow{y}\ .\ \overrightarrow{x}$
2. Associativité : $\alpha\,(\overrightarrow{x}\ .\ \overrightarrow{y}) = (\alpha\,\overrightarrow{x})\ .\ \overrightarrow{y}$
3. Distributivité : $\overrightarrow{x}\ .\ (\overrightarrow{y} + \overrightarrow{z}) = \overrightarrow{x}\ .\ \overrightarrow{y} + \overrightarrow{x}\ .\ \overrightarrow{z}$
4. Si $\overrightarrow{x}\ .\ \overrightarrow{y} = 0 : \forall \overrightarrow{x} \neq \overrightarrow{0}\ \Longrightarrow\ \overrightarrow{y} = \overrightarrow{0}$
5. Norme associée au produit scalaire : $\|\overrightarrow{x}\| = \sqrt{(\overrightarrow{x}\ .\ \overrightarrow{x})}$

Rq : *On dit que l'espace vectoriel euclidien est proprement euclidien si :* $\|\overrightarrow{x}\| \geq 0$.

1.6 Espace affine euclidien

Définition : L'espace affine est un espace ponctuel ξ muni d'une origine O, associé avec un espace vectoriel euclidien $\boldsymbol{E}$ tel que :

1. $\forall$ A et $B \in \xi$, il existe $\overrightarrow{a} \in \boldsymbol{E}$ tel que :

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{a}$$

2. $\forall$ $\overrightarrow{a} \in \boldsymbol{E}$, il existe un point A unique appartenant à ξ tel que :

$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{a}$$

3. la distance entre 2 points A et B est égale à :

$$AB = \|\overrightarrow{AB}\|$$

Soit $(\overrightarrow{e_i})$ avec $i = 1, \ldots, n$ une base d'un espace vectoriel euclidien, de dimension n. On dit que $(O, \overrightarrow{e_i})$ forme un repère de l'espace affine euclidien.

Chapitre 2

Introduction à la notion de tenseurs

2.1 Extension de la notion de vecteurs et scalaires

Les vecteurs et scalaires permettent de représenter un grand nombre de grandeurs physique :

– énergie, puissance : scalaire,
– force, vitesse : vecteur.

D'où l'intérêt de développer et de codifier les différentes opérations que l'on peut effectuer sur les vecteurs et les scalaires (cf. chapitre 1 sur les espaces vectoriels).

En fait, la notion de vecteurs peut être considérée comme une extension de la notion de scalaires. En effet, un vecteur exprimé dans une base est représenté par un tableau unidimensionnel de scalaires, c'est-à-dire ses coordonnées :

$$\boxed{\overrightarrow{V} = \sum_{i=1}^{3} V^i \overrightarrow{e_i}} \tag{2.1}$$

Dans certaines branches de la physique (ex : la mécanique), on a besoin pour représenter certaines grandeurs, de tableaux multidimensionnels.
Exemple : matrice des contraintes :

$$\left[\sigma^{ij}\right] \text{ avec } \begin{cases} i = 1, \ldots, 3 \\ \text{et} \\ j = 1, \ldots, 3 \end{cases}$$

Ces tableaux sont les composantes d'un vecteur exprimé dans un repère particulier : **les tenseurs sont donc une extension ou une généralisation de la notion de vecteurs** [3], [2], [4], [1].

Cette notion de tenseurs est fondamentale en Mécanique, en Physique, etc. Elle est assez complexe mais elle permet de représenter les grandeurs physiques, les interpréter et faire les calculs dans n'importe quelle base. Elle devient extrêmement simple et pratique dans le cas d'un espace vectoriel euclidien.

Dans ce cours, nous allons définir, dans un premier temps, de manière abstraite les espaces de tenseurs ainsi que les règles qui les régissent. Dans un deuxième temps, nous définirons des tenseurs particuliers au domaine de la géométrie différentielle (ex : tenseur métrique, tenseur des courbures). Grâce à l'opération de changement de base, nous donnerons ensuite une définition mathématique de la notion de tenseur.

Convention d'Einstein : *Dans la suite du cours, nous utiliserons la notation d'Einstein pour les indices muets : chaque fois qu'un indice (inférieur ou supérieur) est répété, la somme est effectuée sur tous les termes en faisant varier les indices de 1 à N (voir également relation (2.1)) :*

$$\text{Ex} \;\; : \sum_{i=1}^{N} a_i\, x^i = a_1\, x^1 + a_2\, x^2 + a_3\, x^3 + \cdots + a_N\, x^N = a_i\, x^i$$

2.2 Somme de deux sous espace vectoriels

Soient $\boldsymbol{e}$ et $\boldsymbol{f}$, deux sous espace vectoriels de dimension n et p d'un espace vectoriel euclidien affine $\boldsymbol{E}$, de bases respectives $(\overrightarrow{e_i})$ et $\left(\overrightarrow{f_j}\right)$. La méthode classique pour créer un espace plus grand est d'ajouter ces deux espaces vectoriels.

S'ils sont disjoints, c'est-à-dire : $\boldsymbol{e} \bigcap \boldsymbol{f} = 0$, on obtient un espace de dimension $n+p$ généré par la base $\left(\overrightarrow{e_i}, \overrightarrow{f_j}\right)$. La somme des sous espaces vectoriels $\boldsymbol{e}+\boldsymbol{f}$ est un sous espace vectoriel de $\boldsymbol{E}$.

2.3 Produit tensoriel

Un **espace des tenseurs** (il peut en exister d'autres) est obtenu à partir du **produit tensoriel d'espaces vectoriels**.

Le produit tensoriel des deux sous espaces vectoriel $\boldsymbol{e}$ et $\boldsymbol{f}$, noté $\boldsymbol{e} \otimes \boldsymbol{f}$, permet d'obtenir un espace de dimension $n.p$ qui est également un espace vectoriel. Le produit tensoriel des vecteurs de base $\overrightarrow{e_i} \otimes \overrightarrow{f_j}$ conduit à des vecteurs particuliers que l'on appelle **tenseurs d'ordre 2**. Un élément de $\boldsymbol{e} \otimes \boldsymbol{f}$ s'écrit :

$$\boxed{\underset{\sim}{T} = T^{ij}\overrightarrow{e_i} \otimes \overrightarrow{f_j}} \tag{2.2}$$

où T^{ij} sont appelées **les composantes du tenseur $\underset{\sim}{T}$ exprimées dans la base $\overrightarrow{e_i} \otimes \overrightarrow{f_j}$**. Ces composantes sont identiques à une matrice à 2 dimensions de taille np.

On peut également définir le produit tensoriel de plusieurs espaces vectoriels. Par exemple, à l'ordre 3, on a : $\boldsymbol{e} \otimes \boldsymbol{e} \otimes \boldsymbol{e}$. Un élément de cet espace s'écrit : $\underset{\sim}{W} = W^{ijk} \overrightarrow{e_i} \otimes \overrightarrow{e_j} \otimes \overrightarrow{e_k}$

NB : D'une manière pratique, dans la suite du cours, si il n'y a aucune indication supplémentaire, $\boldsymbol{e}$ sera de dimension 3, c'est-à-dire que l'espace $\boldsymbol{e}$ de référence est l'espace de base composé des vecteurs de base $\overrightarrow{e_i}$ avec $i = 1, \ldots, 3$. Les tenseurs d'ordre 2 seront rapportés à : $\boldsymbol{e} \otimes \boldsymbol{e}$, d'ordre 3 à : $\boldsymbol{e} \otimes \boldsymbol{e} \otimes \boldsymbol{e}$, etc.

Propriétés de l'opération produit tensoriel $\otimes$:
$\forall \overrightarrow{x},\ \overrightarrow{x_1},\ \overrightarrow{x_2} \ \in\ \boldsymbol{e}$ et $\overrightarrow{y},\ \overrightarrow{y_1},\ \overrightarrow{y_2} \ \in\ \boldsymbol{f}$ and $\alpha \in \mathbb{R}$

1. Distributivité par rapport à l'addition vectorielle :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{x} \otimes (\overrightarrow{y_1} + \overrightarrow{y_2}) &= \overrightarrow{x} \otimes \overrightarrow{y_1} + \overrightarrow{x} \otimes \overrightarrow{y_2} \\ (\overrightarrow{x_1} + \overrightarrow{x_2}) \otimes \overrightarrow{y} &= \overrightarrow{x_1} \otimes \overrightarrow{y} + \overrightarrow{x_2} \otimes \overrightarrow{y} \end{aligned}$$

2. Associativité : $\alpha\ (\overrightarrow{x} \otimes \overrightarrow{y}) = (\alpha \overrightarrow{x}) \otimes \overrightarrow{y} = \overrightarrow{x} \otimes (\alpha \overrightarrow{y})$

En général, il n'y a pas commutativité : $\overrightarrow{x} \otimes \overrightarrow{y} \neq \overrightarrow{y} \otimes \overrightarrow{x}$

Remarque : *On peut également représenter les tenseurs sous forme de vecteurs uni-colonne puisqu'un espace de tenseurs est un espace vectoriel, c'est ce qu'on appelle l'opération de contraction d'indices (voir également §5).*

On considère l'espace vectoriel de dimension 4, obtenu par le produit tensoriel de $\boldsymbol{e} \otimes \boldsymbol{e}$. On note :

$$\begin{array}{ll} \overrightarrow{e_1} \otimes \overrightarrow{e_1} = \overrightarrow{U_1} & \quad \overrightarrow{e_2} \otimes \overrightarrow{e_2} = \overrightarrow{U_2} \\ \overrightarrow{e_1} \otimes \overrightarrow{e_2} = \overrightarrow{U_3} & \quad \overrightarrow{e_2} \otimes \overrightarrow{e_1} = \overrightarrow{U_4} \end{array}$$

Et on a alors :

$$\begin{array}{rcccccccccccc} \underset{\sim}{T} & = & T^{11} & \overrightarrow{e_1} \otimes \overrightarrow{e_1} & + & T^{22} & \overrightarrow{e_2} \otimes \overrightarrow{e_2} & + & T^{12} & \overrightarrow{e_1} \otimes \overrightarrow{e_2} & + & T^{21} & \overrightarrow{e_2} \otimes \overrightarrow{e_1} \\ & = & \alpha^1 & \overrightarrow{U_1} & + & \alpha^2 & \overrightarrow{U_2} & + & \alpha^3 & \overrightarrow{U_3} & + & \alpha^4 & \overrightarrow{U_4} \end{array}$$

Soit : $\underset{\sim}{T} = \underbrace{T^{ij}}_{i\ et\ j=1...2} \overrightarrow{e_i} \otimes \overrightarrow{e_j} = \underbrace{\alpha^k}_{k=1...4} \overrightarrow{U_k}$

Donc : $T^{11} = \alpha^1$; $T^{22} = \alpha^2$; $T^{12} = \alpha^3$; $T^{21} = \alpha^4$

Le fait d'utiliser des indices doubles, triples, etc permet en fait une plus simple manipulation.

Chapitre 3

Base duale

3.1 Produit scalaire dans une base $\vec{e_i}$

Soit un espace vectoriel affine euclidien $\boldsymbol{E}$ rapporté à une base $\overrightarrow{e_i}$. Les coordonnées x^i et y^j des vecteurs $\overrightarrow{x}$ et $\overrightarrow{y}$ dans la base $\overrightarrow{e_i}$ se notent d'après la convention d'Einstein :

$$\overrightarrow{x} = x^i \overrightarrow{e_i} \text{ et } \overrightarrow{y} = y^j \overrightarrow{e_j}$$

On définit classiquement l'opération du produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{x}$ et $\overrightarrow{y}$ par :

$$\boxed{\overrightarrow{x} \ . \ \overrightarrow{y} = x^i \, y^j \ \overrightarrow{e_i} \ . \ \overrightarrow{e_j}} \tag{3.1}$$

Dans le cas d'une **base orthonormée**, il apparaît :

$$\boxed{\overrightarrow{e_i} \ . \ \overrightarrow{e_j} = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ si } i \neq j \end{cases}} \tag{3.2}$$

3.2 Utilisation du symbole de Kronecker

On définit alors un symbole, appelé symbole de Kronecker qui donne :

$$\boxed{\delta_{ij} = \delta^i_j = \delta^{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ si } i \neq j \end{cases}} \tag{3.3}$$

Si $\overrightarrow{e_i}$ est une base orthonormée, la relation (3.1) devient :

$$\boxed{\overrightarrow{x} \ . \ \overrightarrow{y} = x^i \, y^i \ \delta_{ii} = x^i \, y^i} \tag{3.4}$$

3.3 Base duale

De manière à obtenir une formule analogue à l'équation (3.2), **mais pour tout espace vectoriel** (c'est-à-dire pour une base quelconque $\overrightarrow{e_i}$), on définit une **base duale à** $\overrightarrow{e_i}$, notée $\overrightarrow{e^i}$, telle que :

$$\boxed{\overrightarrow{e_i} \,.\, \overrightarrow{e^j} = \delta_i^j} \tag{3.5}$$

Démonstration : On considère le repère de référence fixe $\overrightarrow{I_i}$. Chaque vecteur de base $\overrightarrow{e_i}$ se décompose dans $\overrightarrow{I_k}$ par le changement de base suivant :

$$\overrightarrow{e_i} = \beta_i^k \, \overrightarrow{I_k}$$

où β_i^k est la matrice de changement de base : $\overrightarrow{I_k} \longrightarrow \overrightarrow{e_i}$ c'est-à-dire que β_i^k est la k i-ème composante du vecteur $\overrightarrow{e_i}$ sur la base $\overrightarrow{I_k}$. De même, on suppose qu'il existe une base telle que :

$$\overrightarrow{e^j} = \alpha_l^j \, \overrightarrow{I_l}$$

L'équation (3.5) devient :

$$\overrightarrow{e_i} \,.\, \overrightarrow{e^j} = \delta_j^i = \beta_i^k \, \overrightarrow{I_k} \, \alpha_l^j \, \overrightarrow{I_l} = \beta_i^k \, \alpha_l^j \, \delta_{kl} = \beta_i^k \, \alpha_k^j = \delta_j^i$$

Ce que l'on peut écrire sous forme matricielle : $\left[\beta_i^k\right] \,.\, \left[\alpha_k^j\right] = [Id]$
$\overrightarrow{e_i}$ étant une base, la matrice $\left[\beta_i^k\right]$ a un déterminant non nul (sinon vecteur liés) et on peut donc l'inverser :

$$\left[\beta_i^k\right] = \left[\alpha_k^j\right]^{-1} \; (matrice \ inverse)$$

Donc $\overrightarrow{e^j}$ forme donc une base appelée base duale de $\overrightarrow{e_i}$.

Interprétation géométrique : Un vecteur dual $\overrightarrow{e^i}$ est orthogonal à tous les vecteurs de la base naturelle d'indice différent et est tel que son produit scalaire avec celui de même indice est égal à 1.

<u>Exemple :</u> Soit un espace vectoriel à 2 dimensions où la base $\overrightarrow{e_i}$ est une base non-orthogonale (voir figure (3.1)).

D'après la relation (3.5), on a : $\overrightarrow{e^1} \,.\, \overrightarrow{e_2} = \delta_1^2 = 0 \implies \overrightarrow{e^1} \perp \overrightarrow{e_2} \rightarrow$ d'où la direction de $\overrightarrow{e^1}$.

De même : $\overrightarrow{e^1} \,.\, \overrightarrow{e_1} = \delta_1^1 = 1 = \cos\theta \, \|\overrightarrow{e^1}\| \, \|\overrightarrow{e_1}\|$

Comme $\cos\theta \neq 0$ sinon $\overrightarrow{e_1}$ colinéaire à $\overrightarrow{e^1}$, on a : $\|\overrightarrow{e^1}\| = \dfrac{1}{\|\overrightarrow{e_1}\| \cos\theta} \rightarrow$ sens et norme de $\overrightarrow{e^1}$

$\rightarrow$ idem pour la construction de $\overrightarrow{e^2}$.

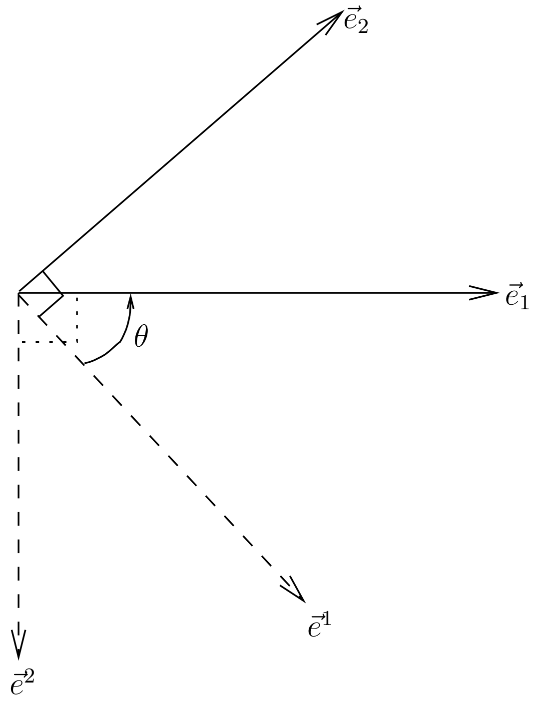

FIG. 3.1 – Base naturelle et duale

3.4 Définition générale du produit scalaire

En exprimant les vecteurs $\overrightarrow{x}$ et $\overrightarrow{y}$ dans la base duale $\overrightarrow{e^i}$, il vient :

$$\boxed{\forall\ \overrightarrow{x} \text{ et } \overrightarrow{y},\ \exists\ x_i \text{ et } y_i\ \in\ \mathbb{R}\ \mid\ \overrightarrow{x} = x_i\,\overrightarrow{e^i} \text{ et } \overrightarrow{y} = y_j\,\overrightarrow{e^j}} \tag{3.6}$$

Pour tout type de base, il est alors possible de définir **le produit scalaire** sous la forme :

$$\overrightarrow{x}\ .\ \overrightarrow{y} = \begin{cases} x^i\overrightarrow{e_i}\ .\ y_j\overrightarrow{e^j} = x^i\,y_j\,\overrightarrow{e_i}\ .\ \overrightarrow{e^j} = x^i\,y_j\,\delta^i_j = x^i\,y_i \\ \text{ou} \\ x_i\overrightarrow{e^i}\ .\ y^j\overrightarrow{e_j} = x_i\,y^j\,\overrightarrow{e^i}\ .\ \overrightarrow{e_j} = x_i\,y^j\,\delta^j_i = x_i\,y^i \end{cases}$$

3.5 Composantes contravariantes et covariantes

D'après la relation (3.6), il existe deux composantes possibles x^i et x_i pour exprimer un vecteur $\overrightarrow{x}$:

$$\boxed{\overrightarrow{x} = x^i\overrightarrow{e_i} = x_i\,\overrightarrow{e^i}} \tag{3.7}$$

où par rapport à la base $\overrightarrow{e_i}$:

- x^i sont les **composantes contravariantes** de $\overrightarrow{x}$
- x_i sont les **composantes covariantes** de $\overrightarrow{x}$

Chapitre 4

Changement de base

4.1 Changement de base pour les composantes d'un vecteur

Soit un espace vectoriel euclidien $\boldsymbol{E}$, rapporté à une base $\overrightarrow{e_i}$ et la base duale associée $\overrightarrow{e^i}$. On considère une nouvelle base de $\boldsymbol{E}$, notée $\overrightarrow{E_i}$ telle que :

$$\boxed{\overrightarrow{E_i} = \beta_i^j \overrightarrow{e_j}} \tag{4.1}$$

où β_i^j est la matrice de changement de base : $\overrightarrow{e_j} \ \rightarrow \ \overrightarrow{E_i}$.
Pour la base duale, on aura une relation du type :

$$\boxed{\overrightarrow{E^i} = \alpha_j^i \ \overrightarrow{e^j}} \tag{4.2}$$

Par définition, on aura :

$$\boxed{\beta_i^j \ \alpha_j^k = \delta_k^i} \tag{4.3}$$

ce qui peut s'écrire sous forme matricielle :

$$\left[\beta_i^j\right] = \left[\alpha_j^i\right]^{-1}$$

Remarque : *Sous forme matricielle, on notera :*
- *indice supérieur pour l'indice de colonne,*
- *indice inférieur pour l'indice de ligne.*

4.1.1 Etude du comportement des composantes contravariantes dans un changement de base

$\forall \overrightarrow{x} \in \boldsymbol{e}$, on peut écrire :

$$\left\{\begin{array}{lllll} \overrightarrow{x} = x^j \overrightarrow{e_j} & \Longrightarrow & \overrightarrow{x} \,.\, \overrightarrow{e^k} & = x^j \overrightarrow{e_j} \,.\, \overrightarrow{e^k} & = x^j \delta^j_k = \quad x^k \\ & \text{ou} & & & \\ \overrightarrow{x} = X^i \overrightarrow{E_i} = X^i \beta^j_i \overrightarrow{e_j} & \Longrightarrow & \overrightarrow{x} \,.\, \overrightarrow{e^k} & = X^i \beta^j_i \overrightarrow{e_j} \,.\, \overrightarrow{e^k} & = X^i \beta^j_i \delta^j_k = \quad X^i \beta^k_i \end{array}\right.$$

Donc : $x^k = \beta^k_i X^i$

Ou aussi : $\underbrace{X^i}_{\text{nouvelle composante}} = \alpha^i_k \underbrace{x^k}_{\text{ancienne composante}}$

Alors que : $\underbrace{\overrightarrow{E_i}}_{\text{nouveau vecteur}} = \beta^k_i \underbrace{\overrightarrow{e_k}}_{\text{ancien vecteur}}$

Les composantes x^k se transforment de manière "contraire" au comportement des vecteurs de la base initiale $\overrightarrow{e_i}$ lors d'un changement de base :
$\rightarrow$ composantes contravariantes.

4.1.2 Etude du comportement des composantes covariantes dans un changement de base

Dans la base duale, on a également :

$$\left\{\begin{array}{lllll} \overrightarrow{x} = x_j \overrightarrow{e^j} & \Longrightarrow & \overrightarrow{x} \,.\, \overrightarrow{e_k} & = x_j \overrightarrow{e^j} \,.\, \overrightarrow{e_k} & = x_j \delta^k_j = \quad x_k \\ \overrightarrow{x} = X_i \overrightarrow{E^i} = X_i \alpha^i_j \overrightarrow{e^j} & \Longrightarrow & \overrightarrow{x} \,.\, \overrightarrow{e_k} & = X_i \alpha^i_j \overrightarrow{e^j} \,.\, \overrightarrow{e_k} & = X_i \alpha^i_j \delta^k_j = \quad X_i \alpha^i_k \end{array}\right.$$

Donc : $x_k = \alpha^i_k X_i$

Ou également : $\underbrace{X_i}_{\text{nouvelle composante}} = \beta^k_i \underbrace{x_k}_{\text{ancienne composante}}$

Alors que : $\underbrace{\overrightarrow{E_i}}_{\text{nouveau vecteur}} = \beta^k_i \underbrace{\overrightarrow{e_k}}_{\text{ancien vecteur}}$

Les composantes x_k se transforment de manière "identique" au comportement des vecteurs de la base initiale $\overrightarrow{e_i}$ lors d'un changement de base :
$\rightarrow$ composantes covariantes.

4.2 Changement de base pour les composantes d'un tenseur

On considère un tenseur d'ordre 2 : $\underset{\sim}{T} = T^{ij}\overrightarrow{e_i} \otimes \overrightarrow{e_j}$
En utilisant la base duale, il est possible de définir quatre types de composantes :

$$\underset{\sim}{T} = T^{i\cdot}_{\cdot j}\overrightarrow{e_i} \otimes \overrightarrow{e^j} = T_{i\cdot}^{\cdot j}\overrightarrow{e_j} \otimes \overrightarrow{e^i} = T^{ij}\overrightarrow{e_i} \otimes \overrightarrow{e_j} = T_{ij}\overrightarrow{e^i} \otimes \overrightarrow{e^j} \tag{4.4}$$

D'où quatre types de changement de base, avec : $\overrightarrow{E_k} = \beta^i_k\, \overrightarrow{e_i}$ et $\overrightarrow{E^k} = \alpha^k_i\, \overrightarrow{e^i}$

- **1er cas** :

  $\underset{\sim}{T} = T^{ij}\overrightarrow{e_i} \otimes \overrightarrow{e_j} = T'^{kl}\,\overrightarrow{E_k} \otimes \overrightarrow{E_l} = T'^{kl}\,\beta^i_k\,\beta^j_l\overrightarrow{e_i} \otimes \overrightarrow{e_j}$
  La décomposition étant unique, on a donc :

  $$\boxed{T^{ij} = T'^{kl}\ \beta^i_k\ \beta^j_l} \rightarrow \text{ composantes 2 fois contravariantes} \tag{4.5}$$

  ou l'inverse : $T'^{kl} = T^{ij}\ \alpha^k_i\ \alpha^l_j$
- **2ème cas** :

  $\underset{\sim}{T} = T_{ij}\overrightarrow{e^i} \otimes \overrightarrow{e^j} = T'_{kl}\ \overrightarrow{E^k} \otimes \overrightarrow{E^l} = T'_{kl}\ \alpha^k_i\ \alpha^l_j\overrightarrow{e^i} \otimes \overrightarrow{e^j}$
  D'où :

  $$\boxed{T_{ij} = T'_{kl}\ \alpha^k_i\ \alpha^l_j} \rightarrow \text{ composantes 2 fois covariantes} \tag{4.6}$$

  ou l'inverse : $T'_{kl} = T_{ij}\ \beta^i_k\ \beta^j_l$
- **3ème cas** :

  $\underset{\sim}{T} = T_{i\cdot}^{\cdot j}\overrightarrow{e^i} \otimes \overrightarrow{e_j} = T'^{\cdot\ l}_{k\ \cdot}\ \overrightarrow{E^k} \otimes \overrightarrow{E_l} = T'^{\cdot\ l}_{k\ \cdot}\ \alpha^k_i\ \beta^j_l\overrightarrow{e^i} \otimes \overrightarrow{e_j}$
  D'où :

  $$\boxed{T_{i\cdot}^{\cdot j} = T'^{\cdot\ l}_{k\ \cdot}\alpha^k_i\beta^j_l} \rightarrow \text{ composantes mixtes 1 fois covar. et 1 fois contravar} \tag{4.7}$$

- **4ème cas** :

  $$\boxed{T^{i\cdot}_{\cdot j} = T'^{k}_{\cdot\ l}\beta^i_k\alpha^l_j} \rightarrow \text{ composantes mixtes 1 fois contravar. et 1 fois covar} \tag{4.8}$$

Ces cas se généralisent pour un tenseur d'ordre n :

$$\forall\ \underset{\sim}{T} = \underbrace{T^{i_1\ i_2 \dots\ i_r\ \cdot\ \cdot}_{\cdot\ \cdot\ \ i_{r+1}\ i_{r+2} \dots\ i_n}}_{comp.\ mixtes\ r\ fois\ contravar.\ et\ (n-r)\ fois\ covar.} \overrightarrow{e_{i_1}} \otimes \cdots \otimes \overrightarrow{e_{i_r}} \otimes \overrightarrow{e^{i_{r+1}}} \otimes \cdots \otimes \overrightarrow{e^{i_n}}$$

Par changement de base, on obtient :

$$\boxed{T^{i_1 \dots i_r \cdot \ \ \cdot}_{\cdot \ \ \cdot \ \ i_{r+1} \dots i_n} = \beta^{i_1}_{k_1} \dots \beta^{i_r}_{k_r} \alpha^{k_{r+1}}_{i_{r+1}} \dots \alpha^{k_n}_{i_n} T'^{k_1 \dots k_r \cdot \ \ \cdot}_{\cdot \ \ \cdot \ \ k_{r+1} \dots k_n}} \tag{4.9}$$

Cette formule est un critère de tensorialité, c'est-à-dire que tout élément ayant des composantes qui satisfait à cette relation lors d'un changement de base est un tenseur.

Cette définition est la **véritable définition d'un tenseur**. Pour vérifier qu'un tenseur est bien un tenseur, il faudra que ses composantes vérifient l'équation (4.9).

Chapitre 5

Opérations sur les tenseurs

5.1 Introduction

On peut définir des opérations entre les tenseurs qui donnent comme résultat un tenseur. D'une manière pratique, on retrouve en physique une signification à ces opérations.

Remarque : *Dans toutes les démonstrations, on utilise des tenseurs d'ordre 2 par simplicité et on fait un choix arbitraire de composantes contravariantes.*

5.2 Addition et multiplication par un scalaire

Soit $\underset{\sim}{T}$ et $\underset{\sim}{V}$, 2 tenseurs et $\alpha \in \mathbb{R}$, on obtient :

$$\alpha.\left(\underset{\sim}{T} + \underset{\sim}{V}\right) = \alpha.\left(T^{ij} + V^{ij}\right) \overrightarrow{e_i} \otimes \overrightarrow{e_j}$$

5.3 Produit tensoriel

Il a déjà été étudié dans le paragraphe §2.3 mais on montre que :

$$\begin{aligned} \underset{\sim}{T} \otimes \underset{\sim}{V} = \underset{\sim}{W} &= T^{ij} V^{kl} \overrightarrow{e_i} \otimes \overrightarrow{e_j} \otimes \overrightarrow{e_k} \otimes \overrightarrow{e_l} \\ &= W^{ijkl} \overrightarrow{e_i} \otimes \overrightarrow{e_j} \otimes \overrightarrow{e_k} \otimes \overrightarrow{e_l} \end{aligned}$$

où $\underset{\sim}{T}$ et $\underset{\sim}{V}$ appartiennent à l'espace des tenseurs d'ordre 2 et $\underset{\sim}{W}$ appartient à l'espace des tenseurs d'ordre 4.

5.4 Contraction

1er exemple Soit un tenseur d'ordre 4 $A^{lm\cdot\cdot}_{\cdot\cdot rs}$ dans un espace vectoriel de dimension 3. La contraction par rapport au 1er indice et dernier indice consiste à définir un nouveau tenseur en prenant $l = s$, soit : $A^{lm\cdot\cdot}_{\cdot\cdot\ rl}$. Cette opération conduit à supprimer 2 indices et donnent un tenseur d'ordre 2, $\underset{\sim}{B}$ tel que :

$$B^{m\cdot}_{\cdot\ r} = A^{lm\cdot\cdot}_{\cdot\cdot\ rl} = A^{1m\cdot\cdot}_{\cdot\cdot\ r1} + A^{2m\cdot\cdot}_{\cdot\cdot\ r2} + A^{3m\cdot\cdot}_{\cdot\cdot\ r3} \tag{5.1}$$

Démonstration : *Pour vérifier que la grandeur $B^{m\cdot}_{\cdot\ r}$ est un tenseur, il faut vérifier le test du changement de base, soit :*

$$B^{m\cdot}_{\cdot\ r} = B'^{i\cdot}_{\cdot j}\,\beta^m_i\,\alpha^j_r = A'^{li\cdot\cdot}_{\cdot\cdot jl}\,\beta^m_i\,\alpha^j_r$$

D'après la relation (5.1) et (4.9), on a :

$$\begin{aligned} B^{m\cdot}_{\cdot\ r} &= A^{lm\cdot\cdot}_{\cdot\cdot\ rl} = A'^{ki\cdot\cdot}_{\cdot\cdot\ jf}\,\beta^m_i\,\alpha^j_r\,\underbrace{\beta^l_k\,\alpha^f_l}_{\delta^k_f} \\ &= A'^{ki\cdot\cdot}_{\cdot\cdot\ jf}\,\beta^m_i\,\alpha^j_r\,\delta^k_f \end{aligned}$$

Et on vérifie bien que $B^{m\cdot}_{\cdot\ r} = A'^{ki\cdot\cdot}_{\cdot\cdot\ jk}\,\beta^m_i\,\alpha^j_r$

2ème exemple Soit un tenseur du 2ème ordre : $\underset{\sim}{S} = S^m_r \overrightarrow{e_m} \otimes \overrightarrow{e^r}$. La contraction par rapport à l'indice m et r donne :

$$\begin{aligned} S^m_m &= S^1_1 + S^2_2 + S^3_3 = \text{scalaire appelé } \textbf{\textit{trace du tenseur}} \\ &= trace\left(\underset{\sim}{S}\right) \end{aligned} \tag{5.2}$$

Puisque *trace* $\left(\underset{\sim}{S}\right)$ est un scalaire, il ne dépend pas du système d'axe choisi : on dit que cette grandeur est un **invariant**.

5.5 Produit Contracté

Le produit contracté est un produit de tenseur dans lequel on contracte également les indices.

1er exemple : cas des vecteurs (produit scalaire) $\overrightarrow{x}\,.\,\overrightarrow{y} = x^i\,y_i \rightarrow$ produit 1 fois contracté de vecteurs.

2ème exemple : cas des tenseurs d'ordre 2

1. On admet que le produit 1 fois contracté de tenseurs du 2ème ordre donne : $\underset{\sim}{S}\,.\,\underset{\sim}{T} = \underset{\sim}{W}$ tel que :

$$\left\{\begin{array}{lcl} W^{ij} &=& S^{il}\,T^j_l = S^{i1}\,T^j_1 + S^{i2}\,T^j_2 + S^{i3}\,T^j_3 = S^i_l\,T^{lj} \\ & \text{ou} & \\ W^j_i &=& S^l_i\,T^j_l = S_{il}\,T^{lj} \\ & \text{ou} & \\ W_{ij} &=& S_{il}\,T^l_j = S^l_i\,T_{lj} \end{array}\right.$$

Par contre, on a : $\underset{\sim}{S}\,.\,\underset{\sim}{T} \neq \underset{\sim}{T}\,.\,\underset{\sim}{S}$ que l'on peut "présentir" par le fait que la multiplication entre matrices n'est pas commutative.

2. On admet que le produit 2 fois contracté de tenseurs du $2^{ème}$ ordre correspond à un produit scalaire. On a 2 définitions possibles, suivant la notation utilisée :

$$(i)\ :\ \underset{\sim}{T}\ :\ \underset{\sim}{S} = T^{ij}\, S_{ij} = \text{scalaire}$$
$$(ii)\ :\ \underset{\sim}{T}\ ..\ \underset{\sim}{S} = T^{ij}\, S_{ji} = \text{scalaire}$$

En général : $T^{ij}\, S_{ij} \neq T^{ij}\, S_{ji}$

Remarque : *Grâce au produit contracté, on peut définir un tenseur d'ordre 2 comme un opérateur linéaire sur les vecteurs. Par exemple, on peut définir un tenseur* $\underset{\sim}{T}$ *tel que :*

$$\begin{aligned} \forall\ \overrightarrow{x}\ \in\ E,\ \exists\ \underset{\sim}{T}\ \mid :\ \overrightarrow{x}\ \rightarrow\quad \overrightarrow{y}\ &= \underset{\sim}{T}\ .\ \overrightarrow{x} \\ y^i\ &= T^{ij}\, x_j \end{aligned}$$

Ce produit 1 fois contracté permet de passer d'un vecteur $\overrightarrow{x}$ *à un autre vecteur* $\overrightarrow{y}$*.*

5.6 Tenseur symétrique et anti-symétrique

a. Tenseur symétrique du $2^{ème}$ ordre

$$\underset{\sim}{T} \text{ est symétrique} \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccl} T^{ij} & = & T^{ji} \\ & \text{ou} & \\ T^{i\cdot}_{\cdot j} & = & T^{j\cdot}_{\cdot i} = T_{i\cdot}^{\cdot j} \\ & \text{ou} & \\ T_{ij} & = & T_{ji} \end{array} \right.$$

b. Tenseur anti-symétrique du $2^{ème}$ ordre

$$\underset{\sim}{T} \text{ est anti} - \text{symétrique} \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccl} T^{ij} & = & -T^{ji} \\ & \text{ou} & \\ T^{i\cdot}_{\cdot j} & = & -T^{j\cdot}_{\cdot i} \\ & \text{ou} & \\ T_{ij} & = & -T_{ji} \end{array} \right.$$

c. Cas d'un tenseur d'ordre > 2 Un tenseur peut être symétrique ou anti-symétrique par rapport à une paire d'indice :

$$T^{ijk} = T^{kji} \text{ (symétrie par au 1}^{\text{er}} \text{ indice et 3}^{\text{ème}} \text{ indice)}$$

Chapitre 6

Tenseur métrique ou tenseur fondamental

6.1 Définitions

Soit un espace vectoriel euclidien affine $\boldsymbol{E}$, rapporté au repère cartésien absolu $\overrightarrow{I_i}$ et une base quelconque $\overrightarrow{e_i}$. D'après la relation (3.7), $\forall \ \overrightarrow{x} \ \in \boldsymbol{E}$, on peut exprimer ce vecteur dans la base naturelle ou duale par :

$$\boxed{\overrightarrow{x} = x^i \overrightarrow{e_i} \text{ ou } \overrightarrow{x} = x_j \overrightarrow{e^j}} \tag{6.1}$$

D'où, le calcul des composantes d'un vecteur :

$$\overrightarrow{x} \ . \ \overrightarrow{e_i} = x_j \overrightarrow{e^j} \ . \ \overrightarrow{e_i} = x_j \, \delta^i_j = x_i$$

Grâce à la relation (6.1), on peut également remarquer que :

$$x_i = \overrightarrow{x} \ . \ \overrightarrow{e_i} = x^j \, \overrightarrow{e_j} \ . \ \overrightarrow{e_i}$$

Ce qui permet d'introduire une nouvelle grandeur telle que :

$$\boxed{g_{ij} = g_{ji} = \overrightarrow{e_i} \ . \ \overrightarrow{e_j} = \overrightarrow{e_j} \ . \ \overrightarrow{e_i}} \tag{6.2}$$

introduisant une relation entre les composantes covariantes et contravariantes :

$$\boxed{x_i = g_{ij} \ x^j} \tag{6.3}$$

De la même manière, on a :

$$\begin{aligned} x^i &= \left(x_j \, \overrightarrow{e^j}\right) \ . \ \overrightarrow{e^i} = x_j \, \overrightarrow{e^i} \ . \ \overrightarrow{e^j} = x_j \, g^{ij} \\ x^i &= x^j \, \overrightarrow{e_j} \ . \ \overrightarrow{e^i} = x^j \, \delta^i_j = x^j \, g^i_j = x^j \, g^j_i \end{aligned}$$

Les grandeurs g_{ij} apparaissent comme les composantes d'une opération linéaire qui à un vecteur fait correspondre le même vecteur. C'est un tenseur (voir démo en exo) appelé **tenseur fondamental** ou **tenseur métrique** ou **tenseur unité** tel que :

$$\boxed{\underset{\sim}{g} = g_{ij}\, \overrightarrow{e^i} \, . \, \overrightarrow{e^j} = g^{ij}\, \overrightarrow{e_i} \, . \, \overrightarrow{e_j} = \delta_i^j\, \overrightarrow{e_i} \, . \, \overrightarrow{e^j} = Id} \tag{6.4}$$

Remarque : *Cette notion de tenseur métrique est essentielle. Ce tenseur a un rôle particulier, il permettra d'introduire la notion de déformation en grandes transformations dans le cours de Mécanique des Milieux Continus.*

6.2 Propriétés

- $g_{ij} = \overrightarrow{e_i} \, . \, \overrightarrow{e_j} = \|\overrightarrow{e_i}\| \, \|\overrightarrow{e_j}\| \, \cos(\overrightarrow{e_i}, \overrightarrow{e_j})$
- g_{ii} représente le carré de la longueur de $\overrightarrow{e_i}$: $g_{ii} = \overrightarrow{e_i} \, . \, \overrightarrow{e_i} = \|\overrightarrow{e_i}\| \, \|\overrightarrow{e_i}\| \, \underbrace{\cos(\overrightarrow{e_i}, \overrightarrow{e_i})}_{=1}$
- On note le déterminant de g_{ij} : $det\,[g_{ij}] = g$

$$g = det\,[g_{ij}] = \mid g_{ij} \mid = det \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{bmatrix} \tag{6.5}$$

Remarque : *Les composantes du tenseur métrique permettront également le passage entre les différentes variances des composantes d'un tenseur. Par exemple :*

$$T^{ij} = T^i_l \, g^{lj} \tag{6.6}$$

Chapitre 7

Coordonnées curvilignes

7.1 Repères rectilignes et curvilignes

La position d'un point M peut être repéré dans un système de référence fixe orthonormé, appelé **repère cartésien** (ou repère rectiligne) $\overrightarrow{I_a}$. On a alors :

$$\boxed{\overrightarrow{OM} \ = \ \overrightarrow{M} = X^a\,(M)\ \overrightarrow{I_a} = X^a\,\overrightarrow{I_a}} \tag{7.1}$$

Mais les coordonnées X^a peuvent être fonctions de paramètres θ^i avec $i = 1, \ldots, 3$.
On a ainsi : $\theta^i \ \in \ \mathbb{R} \ \rightleftharpoons \ M\,(\theta^i)$
Dans le cas général, les termes X^a sont des fonctions qui dépendent de θ^i. On a alors :

$$\boxed{\overrightarrow{OM} \ = \ \overrightarrow{M} = X^a\,(\theta^i)\ \overrightarrow{I_a}} \tag{7.2}$$

Les θ^i forment un système de coordonnées appelées **coordonnées curvilignes**. Ces coordonnées définissent un repère curviligne $\overrightarrow{g_i}$ qui évolue dans le temps et dépend du point M choisi :

$$\boxed{\overrightarrow{g_i} \ = \ \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \theta^i} = \frac{\partial X^a\,(\theta^i)}{\partial \theta^i}\ \overrightarrow{I_a} = X^a_{,i}\,\overrightarrow{I_a}} \tag{7.3}$$

Remarque : On suppose que les fonctions $X^a\,(\theta^i)$ sont n fois différentiables par rapport à θ^i.

Les vecteurs $\overrightarrow{g_i}$ sont tangents à la courbe décrite par M lorsque seul le paramètre θ^i varie (voir figure(7.1)).

La base $\overrightarrow{g_i}$ (base naturelle) est appelée également **base curviligne** relativement au paramétrage θ^i. On définira de la même façon, la base duale $\overrightarrow{g^i}$ de la base curviligne $\overrightarrow{g_i}$ par :

$$\overrightarrow{g_j}\ .\ \overrightarrow{g^i} = \delta^i_j \tag{7.4}$$

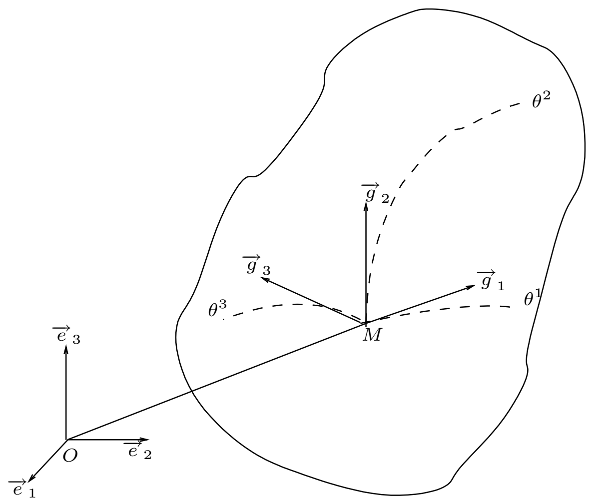

FIG. 7.1 – Définition des vecteurs de base $\boldsymbol{g_i}$

On a une relation entre X^a et θ^i définit par la transformation des coordonnées $X^a \rightarrow \theta^i$ et caractérisé par la matrice jacobienne :

$$[J] = \left[\frac{\partial X^a}{\partial \theta^i}\right] \tag{7.5}$$

Dans le cas où le déterminant de la matrice jacobienne de la transformation :

$$f_i \ : \ X^a \ \rightarrow \ \theta^i \text{ est différent de } 0, \text{ la transformation est réversible.}$$

Il existe alors la fonction : $p_i \ : \ \theta^i \ \rightarrow \ X^a$, et donc f_i et p_i sont des bijections.

7.2 Changement de base

Soit 2 paramétrages curvilignes θ^i et θ'^i et les bases curvilignes associées $\overrightarrow{g_j}$ et $\overrightarrow{g'}_i$. Supposons que l'on peut exprimer $\overrightarrow{g'}_i$ en fonction de $\overrightarrow{g_j}$, c'est-à-dire qu'il existe la matrice de changement de base β_i^j telle que :

$$\boxed{\overrightarrow{g'}_i = \beta_i^j \ \overrightarrow{g_j}} \tag{7.6}$$

Cherchons à expliciter les termes β_i^j.
On sait que : $\overrightarrow{g_j} = \dfrac{\partial \overrightarrow{M}}{\partial \theta^j} = \dfrac{\partial X^k}{\partial \theta^j} \ \overrightarrow{I_k}$ et $\overrightarrow{g'}_i = \dfrac{\partial X^k}{\partial \theta'^i} \ \overrightarrow{I_k}$
Donc avec la relation (7.6) :

$$\frac{\partial X^k}{\partial \theta'^i} \ \overrightarrow{I_k} = \beta_i^j \frac{\partial X^k}{\partial \theta^j} \ \overrightarrow{I_k}$$

Or, on peut écrire : $\dfrac{\partial X^k}{\partial \theta'^i} = \dfrac{\partial X^k}{\partial \theta^j} \cdot \dfrac{\partial \theta^j}{\partial \theta'^i}$,et il vient :

$$\boxed{\beta_i^j = \frac{\partial \theta^j}{\partial \theta'^i}} \tag{7.7}$$

ce qui correspond à la matrice jacobienne de la transformation $\theta^j \ \rightarrow \ \theta'^i$.

Soit un tenseur $\underset{\sim}{T}$ du 2^{nd} ordre définit en un point M. Les composantes de ce tenseur dans les bases $\overrightarrow{g_i} \otimes \overrightarrow{g_j}$ et $\overrightarrow{g'_i} \otimes \overrightarrow{g'_j}$ s'écrivent :

$$\underset{\sim}{T} = T^{ij} \overrightarrow{g_i} \otimes \overrightarrow{g_j} = T'^{ij} \overrightarrow{g'_i} \otimes \overrightarrow{g'_j}$$

On sait que : $T^{ij} = T'^{kl}\, \beta_k^i\, \beta_l^j$. D'après (7.7), on a donc :

$$\boxed{T^{ij} = T'^{kl} \frac{\partial \theta^i}{\partial \theta'^k} \frac{\partial \theta^j}{\partial \theta'^l}} \tag{7.8}$$

ce qui correspond à une nouvelle définition du **critère de tensorialité** que nous avons déjà vu au paragraphe §4.2.
La relation inverse s'écrit :

$$\boxed{T'^{kl} = T^{ij} \frac{\partial \theta'^k}{\partial \theta^i} \frac{\partial \theta'^l}{\partial \theta^j}} \tag{7.9}$$

Les règles de transformation des composantes d'un tenseur, n fois contravariant, p fois covariant sont données par :

$$\boxed{T'^{i'_1 \ldots i'_n}{}_{j'_1 \ldots j'_p} = \frac{\partial \theta'^{i'_1}}{\partial \theta^{i_1}} \cdots \frac{\partial \theta'^{i'_n}}{\partial \theta^{i_n}} \cdot \frac{\partial \theta^{j_1}}{\partial \theta'^{j'_1}} \cdots \frac{\partial \theta^{j_p}}{\partial \theta'^{j'_p}}\, T^{i_1 \ldots i_n}{}_{j_1 \ldots j_p}} \tag{7.10}$$

Remarque : *Dans le cas où les grandeurs T^{ij} sont définis $\forall\ M$ et que la formule (7.8) est vérifiée $\forall\ M$, on parle de champ de tenseurs. Dans la pratique, c'est le cas le plus utilisé et on oublie souvent le terme "champ", on parle alors simplement de tenseur lorsqu'il n'y a pas de confusion possible.*

Exemple d'application : *Soit un tenseur $\underset{\sim}{T}$ exprimé dans la base naturelle $\overrightarrow{g_i}$, on veut ces composantes dans le repère absolu $\overrightarrow{I_k}$:*

$$\underset{\sim}{T} = T^{ij} \overrightarrow{g_i} \otimes \overrightarrow{g_j} = T'^{kl} \overrightarrow{I_k} \otimes \overrightarrow{I_l}$$

- **méthode 1** *: on utilise la formule de changement de base (7.8) où θ^i sont les anciennes coordonnées et X^j sont les nouvelles coordonnées, soit :*

$$T'^{kl} = T^{ij} \frac{\partial X^k}{\partial \theta^i} \frac{\partial X^l}{\partial \theta^j}$$

- **méthode 2** *:*

$$\begin{aligned}
T^{ij}\overrightarrow{g_i}\otimes\overrightarrow{g_j} &= T^{ij}\left(\frac{\partial X^k}{\partial\theta^i}\overrightarrow{I_k}\right)\otimes\left(\frac{\partial X^l}{\partial\theta^j}\overrightarrow{I_l}\right)\\
&= T^{ij}\frac{\partial X^k}{\partial\theta^i}\frac{\partial X^l}{\partial\theta^j}\overrightarrow{I_k}\otimes\overrightarrow{I_l}\\
&= T'^{kl}\overrightarrow{I_k}\otimes\overrightarrow{I_l}
\end{aligned}$$

7.3 Notion de tenseur absolu et relatif

Soit 2 systèmes de coordonnées θ^i et θ'^i et la matrice jacobienne de passage d'un système à l'autre :

$$[J]=\left[\frac{\partial\theta^k}{\partial\theta'^i}\right] \tag{7.11}$$

Le jacobien de la transformation correspond au déterminant de la matrice jacobienne J soit $\mid J\mid$. On dit qu'un tenseur est relatif de poids M s'il se transforme selon la formule :

$$\boxed{T'^{kl}=T^{ij}\mid J\mid^M\frac{\partial\theta'^k}{\partial\theta^i}\frac{\partial\theta'^l}{\partial\theta^j}} \tag{7.12}$$

Lorsque $M=0$, on parlera de tenseur absolu. Dans la pratique, les seuls tenseurs relatifs utilisés seront de poids 1 ou -1.
A part les opérations de changement de base, les opérations sont identiques pour les tenseurs relatifs et absolus.
NB : *Le produit d'un tenseur relatif de poids* -1 *et d'un de poids 1 donne un tenseur absolu. On peut toujours obtenir un tenseur absolu à partir d'un tenseur relatif, soit en le multipliant ou en le divisant par* $\mid J\mid$.

Chapitre 8

Déterminant et produit vectoriel

8.1 Tenseur permutation

On définit le symbole de permutation par : $e_{ijk} = e^{ijk}$ tel que :

- $e_{ijk} = 1$ pour toute permutation cyclique (ou paire) de 123 (ex : e_{231} ou e_{312}),
- $e_{ijk} = -1$ pour toute permutation anticyclique (ou impaire) de 123 (ex : e_{213} ou e_{321} ou e_{132}),
- $e_{ijk} = 0$ lorsque 2 ou 3 indices sont égaux (ex : $e_{112} = 0$).

Il existe 27 séquences possibles.
Le symbole de permutation est utilisé pour le calcul du déterminant.
On cherche à calculer le déterminant du 3ème ordre :

$$| a_j^i | = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 \end{vmatrix}$$

Par définition, on a :

$$\boxed{| a_j^i | = \sum_{ijk}^3 \pm a_1^i \, a_2^j \, a_3^k} \tag{8.1}$$

où $\pm$ respecte la règle du tenseur de permutation.
Donc le calcul du déterminant donne :

$$\boxed{| a_j^i | = e_{ijk} \, a_1^i \, a_2^j \, a_3^k = e^{ijk} \, a_i^1 \, a_j^2 \, a_k^3} \tag{8.2}$$

Exemple : *Expression d'un tableau de nombre anti-symétrique (d'ordre 3) :*
Le tableau a_{mnp} est anti-symétrique lorsque pour toute intervention impaire d'indice, on obtient une valeur opposée, c'est-à-dire :

$$a_{mnp} = -a_{nmp} = a_{npm} = -a_{pnm}$$

Donc : $a_{nnp} = -a_{nnp} = 0 \Rightarrow 0 = a_{npn} = a_{pnn} = a_{nnm}$
En utilisant le symbole de permutation, on a : $a_{mnp} = a_{123} e_{mnp}$

8.1.1 Expression générale du déterminant

On considère l'expression :

$$e_{ijk}\ a^i_r\, a^j_s\, a^k_t \tag{8.3}$$

Puisque les indices k et i sont muets, on peut écrire :

$$e_{kji}\ a^k_r\, a^j_s\, a^i_t = e_{kji}\ a^i_t\, a^j_s\, a^k_r = -e_{ijk}\ a^i_t\, a^j_s\, a^k_r$$

Ce qui montre que la relation (8.3) correspond à un tableau anti-symétrique, et donc :

$$(8.3) = \left(e_{ijk}\ a^i_1\, a^j_2\, a^k_3\right)\ e_{rst} = \mid a^i_j \mid e_{rst}$$

D'où :

$$\boxed{e_{ijk}\ a^i_r\, a^j_s\, a^k_t = \mid a^i_j \mid e_{rst}} \tag{8.4}$$

L'expression (8.4) conduit à :

$$\mid a^i_j \mid\ \mid b^j_i \mid = \mid a^i_l\ b^l_j \mid \ \text{ et } \mid g_{ij} \mid = g = \mid g^{ij} \mid^{-1}$$

8.1.2 Passage entre 2 bases naturelles

Supposons que l'on passe d'un système d'axe à un autre :

$$\overrightarrow{g_i} \longrightarrow \overrightarrow{g_i}' \ \text{ et } \ \theta^i \longrightarrow \theta'^i$$

La matrice de passage est $[J] = [\dfrac{\partial \theta^j}{\partial \theta'^i}]$ et son déterminant est noté a.

On sait que : $\overrightarrow{g_i}' = \beta^j_i \overrightarrow{g_j}$ avec $\beta^j_i = \dfrac{\partial \theta^j}{\partial \theta'^i}$.

On calcule le déterminant du tenseur métrique :

$$g' = \mid g'_{ij} \mid = \mid g_{kl}\, \beta^k_i\, \beta^l_j \mid = \mid g_{kl} \mid \mid \beta^k_i \mid \mid \beta^l_j \mid = g\ \mid J \mid \mid J \mid$$

Donc :

$$\boxed{g' = g\ a^2} \tag{8.5}$$

g et g' sont des scalaires qui lors d'un changement de base varient : ce sont des *scalaires relatifs de poids 2*.

8.1.3 Passage entre le repère absolu et le paramétrage θ^i

On considère le changement de paramétrage :

$$X^i \longrightarrow \theta^i$$

Dans le repère de référence absolu, de coordonnées X^i, on a :

$$\overrightarrow{I_i} = \overrightarrow{g_i} = \overrightarrow{g^i} = \frac{\partial X^j}{\partial X^i}\overrightarrow{I_j}$$

D'où : $g_{ij} = g^{ij} = \delta_{ij}$ et il vient alors : $\mid g_{ij} \mid = g = 1$
Dans le repère curviligne, de paramétrage θ^i :

$$\overrightarrow{g_i}' = \frac{\partial X^j}{\partial \theta'^i}\overrightarrow{I_j} \quad \text{avec} \ : g' = \mid g'_{ij} \mid \ \text{ et } J = \left[\frac{\partial X^j}{\partial \theta'^i}\right]$$

D'après la relation (8.5), on a donc :

$$\boxed{g' = \mid J \mid^2} \tag{8.6}$$

8.2 Tenseur permutation absolu ϵ

Dans le repère de référence absolu, on définit un nouveau symbole de permutation tel que : $\epsilon_{ijk} = e_{ijk}$ dont les composantes s'écrivent :

$$\underset{\sim}{\epsilon} = \epsilon_{ijk}\ \overrightarrow{I_i} \otimes \overrightarrow{I_j} \otimes \overrightarrow{I_k}$$

Pour passer dans le repère curviligne $\overrightarrow{g_i}$, il faut effectuer un changement de base :

$$e^{ijk} = \epsilon^{rst}\frac{\partial X^i}{\partial \theta^r}\frac{\partial X^j}{\partial \theta^s}\frac{\partial X^k}{\partial \theta^t}$$

ou le changement de base inverse :

$$\epsilon^{ijk} = e^{rst}\frac{\partial \theta^i}{\partial X^r}\frac{\partial \theta^j}{\partial X^s}\frac{\partial \theta^k}{\partial X^t}$$

D'après la définition des déterminants (8.4), on a :

$$\epsilon^{ijk} = \mid \frac{\partial \theta^p}{\partial X^e} \mid \ e^{ijk}$$

On sait que : $\mid \dfrac{\partial X^e}{\partial \theta^p} \mid = \sqrt{g}$ donc : $\mid \dfrac{\partial \theta^p}{\partial X^e} \mid = \dfrac{1}{\sqrt{g}}$
Et donc :

$$\boxed{\epsilon^{ijk} = \frac{1}{\sqrt{g}}\ e^{ijk}} \tag{8.7}$$

On montre de la même manière que :

$$\boxed{\epsilon_{ijk} = \sqrt{g}\ e_{ijk}} \tag{8.8}$$

8.3 Produit vectoriel (*cross product en anglais*)

On généralise le produit vectoriel traditionnel par la notation :

$$\boxed{\overrightarrow{g_i} \wedge \overrightarrow{g_j} = \epsilon_{ijk}\ \overrightarrow{g^k}} \tag{8.9}$$

On a également pour les vecteurs de la base duale :

$$\boxed{\overrightarrow{g^i} \wedge \overrightarrow{g^j} = \epsilon^{ijk}\ \overrightarrow{g_k}} \tag{8.10}$$

Remarque : Dans le repère de référence absolu, on retrouve :

$$\overrightarrow{I_1} \wedge \overrightarrow{I_2} = \overrightarrow{g_1} \wedge \overrightarrow{g_2} = \epsilon_{123}\ \overrightarrow{g^3} = \overrightarrow{I_3}$$

Propriétés :

1. Anti-symétrique :
   - pour la base naturelle : $\overrightarrow{g_i} \wedge \overrightarrow{g_j} = \epsilon_{ijk}\ \overrightarrow{g^k} = -\epsilon_{jik}\ \overrightarrow{g^k} = -\overrightarrow{g_j} \wedge \overrightarrow{g_i}$
   - pour la base duale : $\overrightarrow{g^i} \wedge \overrightarrow{g^j} = -\overrightarrow{g^j} \wedge \overrightarrow{g^i}$
2. le vecteur obtenu est normal à chaque vecteur du produit vectoriel (si le produit est non nul). Soit : $\overrightarrow{g^k}$ est $\perp$ à $\overrightarrow{g_i}$ et $\overrightarrow{g_j}$ si $i \neq j$, $j \neq k$ et $i \neq k$
3. le produit vectoriel de 2 même vecteur est nul :

$$\overrightarrow{g_i} \wedge \overrightarrow{g_i} = \epsilon_{iik}\ \overrightarrow{g^k} = \overrightarrow{0}$$

4. distributivité :

$$(\alpha\overrightarrow{g_i} + \beta\overrightarrow{g_j}) \wedge \overrightarrow{g_k} = \alpha\,(\overrightarrow{g_i} \wedge \overrightarrow{g_k}) + \beta\,(\overrightarrow{g_j} \wedge \overrightarrow{g_k})$$

On étend le produit vectoriel à tous vecteurs à l'aide de la décomposition dans la base naturelle.
Soient deux vecteurs : $\overrightarrow{V} = V^i\,\overrightarrow{g_i}$ et $\overrightarrow{W} = W^j\,\overrightarrow{g_j}$, il vient avec (8.9) :

$$\boxed{\overrightarrow{V} \wedge \overrightarrow{W} = V^i\,W^j\,\overrightarrow{g_i} \wedge \overrightarrow{g_j} = V^i\,W^j\,\epsilon_{ijk}\ \overrightarrow{g^k}} \tag{8.11}$$

Que l'on peut aussi écrire avec (8.8) :

$$\overrightarrow{q} = \overrightarrow{V} \wedge \overrightarrow{W} = V^i\,W^j\,\overrightarrow{g_i} \wedge \overrightarrow{g_j} = V^i\,W^j\,e_{ijk}\,\sqrt{g}\ \overrightarrow{g^k}$$

Le produit vectoriel donne un vecteur identique $\forall$ la base :

$$\overrightarrow{V} \wedge \overrightarrow{W} = V^i\, W^j\, e_{ijk}\, \sqrt{g}\, \overrightarrow{g^k} = V^a\, W^b\, \epsilon_{abc}\, \overrightarrow{I_c} = \overrightarrow{q}$$

On sait également que :

$$\|\overrightarrow{V} \wedge \overrightarrow{W}\| = \|\overrightarrow{V}\|\, \|\overrightarrow{W}\| \sin\theta \quad \text{avec} \quad \theta = \left(\widehat{\overrightarrow{V}, \overrightarrow{W}}\right)$$

Donc $\overrightarrow{q} = \overrightarrow{V} \wedge \overrightarrow{W}$ représente la surface du parallélogramme de coté $\overrightarrow{V}$ et $\overrightarrow{W}$.

8.4 Produit mixte

Définition : le produit mixte est le produit scalaire d'un vecteur avec un produit vectoriel :

$$\begin{aligned} \left(\overrightarrow{V} \wedge \overrightarrow{W}\right) . \overrightarrow{T} &= \left(V^i\, W^j\, \epsilon_{ijk}\, \overrightarrow{g^k}\right) . \left(T^k\, \overrightarrow{g_k}\right) \\ &= V^i\, W^j\, T^k\, \epsilon_{ijk} \end{aligned} \tag{8.12}$$

Les 3 vecteurs jouent un rôle identique dans la formule :

$$\left(\overrightarrow{V} \wedge \overrightarrow{W}\right) . \overrightarrow{T} = \overrightarrow{V} . \left(\overrightarrow{W} \wedge \overrightarrow{T}\right)$$

Le produit mixte de 3 vecteurs correspond au déterminant des composantes des vecteurs :

$$\begin{aligned} \left(\overrightarrow{V} \wedge \overrightarrow{W}\right) . \overrightarrow{T} &= \begin{vmatrix} | & | & | \\ V^i & W^j & T^k \\ | & | & | \end{vmatrix} \text{(dans la base curviligne)} \\ &= \begin{vmatrix} | & | & | \\ V^a & W^b & T^c \\ | & | & | \end{vmatrix} \text{(dans le repère absolu)} \\ &= \text{(volume du parrallélépipède formé par } \overrightarrow{V},\ \overrightarrow{W},\ \overrightarrow{T}) \end{aligned}$$

Remarque : *Cas particulier des vecteurs de la base naturelle :*

$$\overrightarrow{g_1} \wedge \overrightarrow{g_2} . \overrightarrow{g_3} = \epsilon_{12k}\, \overrightarrow{g^k} . \overrightarrow{g_3} = \epsilon_{123}\, \overrightarrow{g^3} . \overrightarrow{g_3} = \sqrt{g}$$

$\sqrt{g}$ est le volume du parallélépipède formé par $\overrightarrow{g_1}$, $\overrightarrow{g_2}$ et $\overrightarrow{g_3}$. Ce volume est un scalaire relatif de poids 1.

8.5 Elément de surface et de volume

Un élément de surface s'écrit : $d\overrightarrow{A} = d\,\overrightarrow{r} \wedge d\,\overrightarrow{s} = dr^i\, ds^j\, e_{ijk}\, \sqrt{g}\, \overrightarrow{g^k}$
D'où les composantes :

$$dA_k = dr^i\, ds^j\, \epsilon_{ijk} \tag{8.13}$$

Un élément de volume s'écrit : $dV = d\overrightarrow{r} \wedge d\overrightarrow{s} \,.\, d\overrightarrow{t}$
D'où les composantes :

$$dV_k = dr^i \, ds^j \, dt^k \, \epsilon_{ijk} \tag{8.14}$$

Exemple :

. *Cas des coordonnées curvilignes θ^i :*

$$\begin{aligned} dV &= \left(d\theta^1 \overrightarrow{g_1}\right) \wedge \left(d\theta^2 \overrightarrow{g_2}\right) \,.\, \left(d\theta^3 \overrightarrow{g_3}\right) \\ &= \left(\overrightarrow{g_1} \wedge \overrightarrow{g_2}\right) \,.\, \overrightarrow{g_3} \, d\theta^1 \, d\theta^2 \, d\theta^3 \\ &= \sqrt{g} \, d\theta^1 \, d\theta^2 \, d\theta^3 \end{aligned}$$

. *Dans le repère absolu, on a :*

$$dV = dX^1 \, dX^2 \, dX^3$$

Chapitre 9

Dérivées et intégrales

9.1 Symboles de Christoffel

On cherche à dériver un vecteur $\vec{V}$ par rapport à un paramétrage θ^i, soit :

$$\frac{d\overrightarrow{V}}{d\theta^i} = \overrightarrow{V_{,i}} = \left(V^j \overrightarrow{g_j}\right)_{,i} = V^j{}_{,i}\, \overrightarrow{g_j} + V^j \overrightarrow{g_{j,i}} \tag{9.1}$$

dans cette expression, seule $\overrightarrow{g_{i,j}}$ n'est pas connue.
On introduit alors un symbole, appelé **symbole de Christoffel**, qui permet d'exprimer la dérivée des vecteurs de base par rapport à la base. On note :

$$\boxed{\overrightarrow{g_{i,j}} = \frac{\partial^2 \overrightarrow{OM}}{\partial\theta^i \partial\theta^j} = \Gamma_{ijk}\, \overrightarrow{g^k}} \tag{9.2}$$

$$\boxed{\overrightarrow{g_{i,j}} = \Gamma_i{}^k{}_j\, \overrightarrow{g_k}} \tag{9.3}$$

Avec (9.3), on obtient :

$$\boxed{\Gamma_{ijk} = \overrightarrow{g_{i,j}} \cdot \overrightarrow{g_k}} \quad \left(\text{symbole de Christoffel de } 1^{\text{ère}} \text{ espèce}\right) \tag{9.4}$$

$$\boxed{\Gamma_i{}^k{}_j = \overrightarrow{g_{i,j}} \cdot \overrightarrow{g^k}} \quad \left(\text{symbole de Christoffel de } 2^{\text{ème}} \text{ espèce}\right) \tag{9.5}$$

Γ est appelé **symbole de Christoffel**. On le note également : $\{ijk\}$ et $\{\ i^k{}_j\}$ ou encore $[i,\ j,\ k]$ ou $[\ i^j{}_k]$. Les Γ ne sont pas des tenseurs mais leurs composantes possèdent quelques propriétés ressemblantes.

9.1.1 Propriétés

1. **symétrie par rapport au 1^{er} indice** $\left(\mathbf{1^{\grave{e}re}}\ \boldsymbol{esp\grave{e}ce}\right)$:

$$\boxed{\Gamma_{pqr} = \Gamma_{qpr}} \tag{9.6}$$

2. **symétrie par rapport au 1^{er} indice et dernier indice** $\left(\mathbf{2^{\grave{e}me}}\ \boldsymbol{esp\grave{e}ce}\right)$:

$$\boxed{\Gamma_{i\ j}^{\ k} = \Gamma_{j\ i}^{\ k}} \tag{9.7}$$

3. **passage $1^{\grave{e}re}$ *espèce* $\longrightarrow$ $2^{\grave{e}me}$ *espèce*** :

$$\boxed{\Gamma_{pqr} = g_{rs}\Gamma_{p\ q}^{\ s}} \tag{9.8}$$

4. **dérivée de la métrique** :

$$\boxed{g_{pq,m} = \frac{\partial g_{pq}}{\partial \theta^m} = \Gamma_{pmq} + \Gamma_{qmp}} \tag{9.9}$$

5. **formule particulière** :

$$\boxed{2\,\Gamma_{ijk} = g_{jk,i} + g_{ki,j} - g_{ij,k}} \tag{9.10}$$

6. **dans la base duale** :

$$\boxed{\overrightarrow{g^j}_{,k} = -\Gamma_{k\ i}^{\ j}\,\overrightarrow{g^i}} \tag{9.11}$$

9.2 Dérivée covariante d'un vecteur

En reprenant la formule (9.1) de dérivation de vecteur et en y intégrant les symboles de Christoffel, on obtient :

$$\overrightarrow{V_{,j}} = V^i_{\ ,j}\,\overrightarrow{g_i} + V^i\,\Gamma_{i\ j}^{\ k}\,\overrightarrow{g_k} = \left(V^i_{\ ,j} + V^k\Gamma_{k\ j}^{\ i}\right)\,.\,\overrightarrow{g_i} = V^i_{\ |j}\,\overrightarrow{g_i}$$

On définit alors $V^i_{\ |j}$ **la dérivée covariante des composantes contravariantes du vecteur** $\overrightarrow{V}$ par :

$$\boxed{V^i_{\ |j} = V^i_{\ ,j} + V^k\,\Gamma_{k\ j}^{\ i}} \text{ avec } \overrightarrow{V_{,j}} = V^i_{\ |j}\,\overrightarrow{g_i} \tag{9.12}$$

D'une manière identique, en covariant :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{V_{,j}} = V_{i,j}\,\overrightarrow{g^i} + V_i\,\overrightarrow{g^i}_{,j} &= V_{i,j}\,\overrightarrow{g^i} - V_i\,\Gamma_j{}^i{}_k\,\overrightarrow{g^k}\\ &= \left(V_{i,j} - V_k\Gamma_i{}^k{}_j\right)\,\overrightarrow{g^i}\end{aligned}$$

On définit ensuite $V_{i|j}$ **la dérivée covariante des composantes covariantes du vecteur** $\overrightarrow{V}$ par :

$$\boxed{V_{i|j} = V_{i,j} - V_k\,\Gamma_i{}^k{}_j} \tag{9.13}$$

D'où la différentielle absolue d'un vecteur $\overrightarrow{V}$:

$$\begin{aligned} d\overrightarrow{V} &= V_{i|j}\,d\theta^j\,\overrightarrow{g_i} = \overrightarrow{V_{,j}}\,d\theta^j\\ &= \left(V_{i,j}\,d\theta^j + V^k\,\Gamma_k{}^i{}_j\,d\theta^j\right)\,\overrightarrow{g_i}\end{aligned}$$

Remarque : *On note également :*

- *la dérivée covariante des composantes par :* $V^i{}_{|j} = \bigtriangledown_j V^i$
- *la composante de la différentielle absolue par :* $dV^i = V^i{}_{|j}\,d\theta^j = \bigtriangledown V^i$ *avec* $d\overrightarrow{V} = dV^i\,\overrightarrow{g_i} = \bigtriangledown V^i\,\overrightarrow{g_i}$

Les composantes $V_{i|j}$ sont les composantes (2 fois covariantes) d'un tenseur.

Démonstration :*On considère le changement de base :* $\overrightarrow{g_i} \longrightarrow \overrightarrow{g_i}'$ *d'où :* $\overrightarrow{g_i}' = \beta^j_{i'}\,\overrightarrow{g_j} = \dfrac{\partial\theta^j}{\partial\theta^{i'}}\,\overrightarrow{g_j}$ *On a :*

$$\overrightarrow{V_{,j'}} = \frac{\partial\overrightarrow{V}}{\partial\theta^{j'}} = V_{i'|j'}\,\overrightarrow{g^i}' \tag{9.14}$$

On peut également écrire :

$$\overrightarrow{V_{,j'}} = \frac{\partial\overrightarrow{V}}{\partial\theta^i}\cdot\frac{\partial\theta^i}{\partial\theta^{j'}} = V_{m|i}\,\overrightarrow{g^m}\beta^i_{j'} \tag{9.15}$$

On calcule alors les produits scalaires suivant :

$$\begin{aligned}(9.14)\,.\,\overrightarrow{g_k}' \Longrightarrow\quad V_{i'|j'}\,\overrightarrow{g^i}'\,.\,\overrightarrow{g_k}' &= V_{i'|j'}\,\delta^{j'}_{i'} = V_{k'|j'}\\ (9.15)\,.\,\overrightarrow{g_k}' \Longrightarrow\quad V_{m|i}\,\overrightarrow{g^m}\,\beta^i_{j'}\,\overrightarrow{g_k}' &= V_{m|i}\,\overrightarrow{g^m}\,\beta^i_{j'}\,\beta^l_{k'}\,\overrightarrow{g_l} = V_{m|i}\,\beta^i_{j'}\,\beta^l_{k'}\,\delta^l_m\\ &= V_{l|i}\,\beta^i_{j'}\,\beta^l_{k'}\end{aligned}$$

Donc :

$$V_{k'|j'} = V_{l|i}\,\beta^i_{j'}\,\beta^l_{k'}$$

Ce qui correspond bien aux composantes d'un tenseur (vérification par un changement de base) dont le 2$^{\text{ème}}$ *indice est covariant : d'où le nom de* **dérivée**

covariante.

On montrerait de la même façon que ${V^i}_{|j}$ sont les composantes mixtes d'un même tenseur :

$$\boxed{V_{i|j}\, g^{ik} = {V^k}_{|j}} \tag{9.16}$$

On définit également les composantes 2 fois contravariantes par :

$$\boxed{V^{k|l} = V_{i|j}\, g^{ik}\, g^{jl}} \tag{9.17}$$

Et mixte de second ordre par :

$$\boxed{{V_k}^{|l} = V_{i|j}\, g^{jl}} \tag{9.18}$$

NB : *dans un repère orthonormé :* $I_{i,j} = 0 \implies {\Gamma_i}^k{}_j = \Gamma_{ijk} = 0$

9.3 Gradient-Dérivée covariante d'un scalaire

Soit un scalaire : $\phi = \phi\left(\theta^i\right)$
On considère la dérivée partielle : $\dfrac{\partial \phi}{\partial \theta^i} = \phi_{,i}$
Lors d'un changement de base : $\overrightarrow{g_i} \longrightarrow \overrightarrow{g_i}'$, on montre que $\phi_{,i}$ se comporte comme les composantes d'un vecteur :

$$\phi_{,i'} = \phi_{,j} \frac{\partial \theta^j}{\partial \theta^{i'}}$$

La dérivée covariante du scalaire est obtenue simplement par :

$$\phi_{|i} = \phi_{,i}$$

On note alors le vecteur gradient par :

$$\boxed{\overrightarrow{grad\, \phi} = \phi_{|i}\, \overrightarrow{g^i} = \phi_{,i}\, \overrightarrow{g^i}} \tag{9.19}$$

Donc : $d\phi = \phi_{|i}\, d\theta^i = \phi_{,i}\; d\theta^i = \overrightarrow{grad\, \phi}\, \overrightarrow{d\theta}$
La direction de $\overrightarrow{grad\,(\phi)}$ correspond à la direction de variation maximum de ϕ.

9.4 Dérivée covariante d'un tenseur

On considère le tenseur du 2^{nd} ordre : $\underset{\sim}{T} = T^{ij}\, \overrightarrow{g_i} \otimes \overrightarrow{g_j}$
On calcule le produit contracté avec 2 vecteurs $\overrightarrow{U}$ et $\overrightarrow{V}$ quelconques :

$$\left(\underset{\sim}{T} \,.\, \overrightarrow{U}\right) . \overrightarrow{V} = T^{ij}\, U_i\, V_j = a = \text{scalaire}$$

On dérive le scalaire :

$$a_{,k} = T^{ij}{}_{,k}\, U_i\, V_j + T^{ij}\, U_{i,k}\, V_j + T^{ij}\, U_i\, V_{j,k}$$

Or : $U_{i|k} = U_{i,k} - U_l \Gamma_i{}^l{}_k$
Donc :

$$a_{,k} = T^{ij}{}_{,k}\, U_i\, V_j + T^{ij}\, U_{i,j}\, V_k + T^{ij}\, U_i\, V_{j|k} + T^{ij}\left(\Gamma_i{}^l{}_k\, U_l\, V_j + \Gamma_j{}^l{}_k\, U_i\, V_l\right) \quad (9.20)$$

On note alors :

$$\begin{aligned} T^{ij}{}_{|k}\, U_i\, V_j &= T^{ij}{}_{,k}\, U_i\, V_j + T^{ij}\, \Gamma_i{}^l{}_k\, U_l\, V_j + T^{ij}\, \Gamma_j{}^l{}_k\, U_i\, V_l \\ &= \left(T^{ij}{}_{,k} + T^{lj}\Gamma_l{}^i{}_k + T^{il}\Gamma_l{}^j{}_k\right)\, U_i\, V_j \end{aligned}$$

Donc (9.20) donne :

$$a_{,k} = \underbrace{T^{ij}{}_{|k}\, U_i\, V_j}_{(1)} + \underbrace{T^{ij}\, U_{i|j}\, V_k}_{(2)} + \underbrace{T^{ij}\, U_i\, V_{j|k}}_{(3)} \quad (9.21)$$

dans cette expression, $a_{,k}$ correspond à des composantes covariantes $\forall\, \overrightarrow{U}\,,\ \overrightarrow{V}$. De même (2) et (3) sont également des composantes covariantes. Donc (1) doit l'être également.
D'où finalement :

$$T^{ij}{}_{|k} \;=\; T^{ij}{}_{,k} \;+\; T^{lj}\, \Gamma_l{}^i{}_k \;+\; T^{il}\, \Gamma_l{}^j{}_k \quad (9.22)$$

ce sont les composantes contravariantes d'un tenseur du $3^{ème}$ ordre (2 fois contravariant et 1 fois covariant).
On montre de même que les dérivées covariantes des différentes composantes donnent :

$$\left\{\begin{aligned} T_{ij|k} &= T_{ij,k} - T_{lj}\, \Gamma_i{}^l{}_k - T_{il}\, \Gamma_k{}^l{}_j \\ T^i{}_{j|k} &= T^i{}_{j,k} + T^l{}_j\, \Gamma_k{}^i{}_l - T^i{}_l\, \Gamma_j{}^l{}_k \\ T_i{}^j{}_{|k} &= T_i{}^j{}_{,k} - T_j{}^l\, \Gamma_i{}^l{}_k - T_i{}^l\, \Gamma_k{}^j{}_l \end{aligned}\right. \quad (9.23)$$

Les composantes de la différentielle absolue s'écrivent pour un tenseur du 2^{nd} ordre : $\underset{\sim}{T} = T^{ij}\, \overrightarrow{g_i} \otimes \overrightarrow{g_j}$

$$d\underset{\sim}{T} = \triangledown T^{ij}\, \overrightarrow{g_i} \otimes \overrightarrow{g_j} \ \text{ soit } : \ \triangledown\, T^{ij} = T^{ij}{}_{|k}\, d\theta^k$$

Remarque : *On aurait aussi pu écrire pour le calcul de* $T^{ij}{}_{|k}$ *:*

$$\begin{aligned}
\frac{\partial T}{\partial \theta^k} &= T^{ij}{}_{,k}\,\overrightarrow{g_i} \otimes \overrightarrow{g_j} + T^{ij}\,\Gamma_i{}^l{}_k\,\overrightarrow{g_l} \otimes \overrightarrow{g_j} + T^{ij}\,\Gamma_j{}^l{}_k\,\overrightarrow{g_i} \otimes \overrightarrow{g_l} \\
&= \left(T^{ij}{}_{,k} + T^{lj}\,\Gamma_l{}^i{}_k + T^{il}\,\Gamma_l{}^j{}_k\right)\,\overrightarrow{g_i} \otimes \overrightarrow{g_j} \\
&= T^{ij}{}_{|k}\,\overrightarrow{g_i} \otimes \overrightarrow{g_j}
\end{aligned}$$

9.5 Cas du tenseur métrique

La dérivée covariante, produisant un tenseur, celui-ci peut être évalué dans le repère que l'on veut. On choisit le référentiel absolu $\overrightarrow{I_a}$. $\forall$ le point considéré, on a dans le référentiel absolu $\overrightarrow{I_a}$:

$$g_{ij} = g^{ij} = \delta^i_j = g_i{}^j \text{ et } \Gamma_i{}^k{}_j = 0$$

Donc :

$$g_{ij,k} = 0 = g^{ij}{}_{,k} = g_i{}^j{}_{,k}$$

D'où le **théorème de Ricci** : *les dérivées covariantes des composantes du tenseur métrique sont nulles* :

$$\boxed{g_{ij|k} = g^{ij}{}_{|k} = 0} \tag{9.24}$$

9.6 Dérivées seconde

(à titre d'info)

$V_{i|j}$ est un tenseur du 2^{nd} ordre, donc : $V_{i|j} = A_{ij}$. On peut alors calculer la dérivée covariante de ce tenseur.

Après un développement, on obtient :

$$\begin{aligned}
V_{i|jk} - V_{i|kj} &= V_m\left(\Gamma_i{}^m{}_{k,j} - \Gamma_i{}^m{}_{j,k} + \Gamma_l{}^m{}_j\Gamma_i{}^l{}_k - \Gamma_l{}^m{}_k\Gamma_i{}^l{}_j\right) && (9.25)\\
&= V_m\,R^m{}_{ijk} && (9.26)
\end{aligned}$$

où $R^m{}_{ijk}$ est le tenseur de Riemann-Christoffel.

Cette équation est vraie quelquesoit le repère.

En 3D, dans le repère de référence $\overrightarrow{I_a}$, on a $R^m{}_{ijk} = 0$ et on peut permuter les indices.

9.7 Opérateur de dérivation

On introduit l'opérateur de dérivation (ou opérateur Nabla) tel que :

$$\bigtriangledown = \overrightarrow{g^k} \frac{\partial}{\partial \theta^k} \tag{9.27}$$

lequel définit l'opération où après multiplication par $\overrightarrow{g^k}$, une fonction doit être dérivée par rapport à θ^k.
Soit, par exemple :
- $\forall\ \phi$ un scalaire :

$$\bigtriangledown \phi = \overrightarrow{g^k} \frac{\partial \phi}{\partial \theta^k} = \phi_{,k}\ \overrightarrow{g^k} \text{ (voir aussi paragraphe §9.3)} \tag{9.28}$$

- $\forall\ \overrightarrow{u}$ un vecteur :

$$\bigtriangledown\ .\ \overrightarrow{u} = \overrightarrow{g^k}\ .\ \frac{\partial \overrightarrow{u}}{\partial \theta^k} = \overrightarrow{u_{,k}}\ .\ \overrightarrow{g^k} \tag{9.29}$$

- $\forall\ \overrightarrow{u}$ un vecteur :

$$\bigtriangledown \wedge \overrightarrow{u} = \overrightarrow{g^k} \frac{\partial}{\partial \theta^k} \wedge \overrightarrow{u} = \overrightarrow{g^k} \wedge \overrightarrow{u_{,k}} = rot\,\overrightarrow{u} \tag{9.30}$$

9.7.1 Gradient

(voir aussi paragraphe §9.3)
Le gradient d'une fonction scalaire ϕ est un vecteur définit par :

$$\overrightarrow{grad\,\phi} = \bigtriangledown \phi = \frac{\partial \phi}{\partial \theta^k} \overrightarrow{g^k} = \phi_{,k} \overrightarrow{g^k} \tag{9.31}$$

Le gradient d'un vecteur $\overrightarrow{u}$ est un tenseur du 2^{nd} ordre :

$$grad\,\overrightarrow{u} = \frac{\partial \overrightarrow{u}}{\partial \theta^k} \otimes \overrightarrow{g^k} = \overrightarrow{u_{,k}} \otimes \overrightarrow{g^k} = u_{i|k} \overrightarrow{g^i} \otimes \overrightarrow{g^k} \tag{9.32}$$

9.7.2 Divergence

La divergence d'un vecteur $\overrightarrow{u}$ est un scalaire absolu définit par :

$$div\,\overrightarrow{u} = grad\,\overrightarrow{u} : \underset{\sim}{I} = {u^k}_{|k} = {u_{k|}}^k = trace\left({u^i}_{|j}\right) = \overrightarrow{u_{,k}}\ .\ \overrightarrow{g^k} = \bigtriangledown\ .\ \overrightarrow{u} \tag{9.33}$$

Par exemple, dans le repère fixe cartésien $\overrightarrow{I_a}$:

$$div\,\overrightarrow{v} = {v^1}_{|1} + {v^2}_{|2} + {v^3}_{|3}$$

9.7.3 Rotationnel

D'après la definition du produit tensoriel (8.9), le rotationnel d'un vecteur $\overrightarrow{u}$ est donné par :

$$rot\overrightarrow{u} = \bigtriangledown \wedge \overrightarrow{u} = \overrightarrow{g^k} \wedge \overrightarrow{u_{,k}} = \overrightarrow{g^i} \wedge \overrightarrow{u_{|i}} = \overrightarrow{g^i} \wedge \left(u_{j|i}\right) \overrightarrow{g^j} = \epsilon^{ijk}\; u_{j|i}\overrightarrow{g^k} = \epsilon_{ijk}\; u^j{}_{|i}\overrightarrow{g_k} \tag{9.34}$$

Par exemple, dans le repère fixe cartésien $\overrightarrow{I_a}$:

$$\begin{aligned} rot\overrightarrow{u} &= \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial X^1} \\ \dfrac{\partial}{\partial X^2} \\ \dfrac{\partial}{\partial X^3} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \\ &= \left(\frac{\partial u_3}{\partial X^2} - \frac{\partial u_2}{\partial X^3}\right)\overrightarrow{I_1} + \left(\frac{\partial u_1}{\partial X^3} - \frac{\partial u_3}{\partial X^1}\right)\overrightarrow{I_2} + \left(\frac{\partial u_2}{\partial X^1} - \frac{\partial u_1}{\partial X^2}\right)\overrightarrow{I_3} \end{aligned}$$

Soit :

$$\begin{aligned} rot\overrightarrow{u} &= \left(\frac{\partial}{\partial X^i}\overrightarrow{I_i}\right) \wedge \left(u_j\,\overrightarrow{I_j}\right) \\ &= \frac{\partial}{\partial X^i}\,u_j\,e^{ijk}\,\overrightarrow{I_k} \\ &= u_{j,i}\,e^{ijk}\,\overrightarrow{I_k} \end{aligned}$$

9.7.4 Laplacien

Le laplacien est défini comme étant la divergence du gradient, soit :

$$\bigtriangledown^2\phi = div\left(\overrightarrow{grad}\phi\right)$$

Soit :

$$\bigtriangledown^2\,\phi = u_i\,|^i = \phi\,|^i_i \tag{9.35}$$

9.8 Théorème de la divergence et du rotationnel

9.8.1 Théorème de la divergence : cas d'une surface

Soit un contour fermé (C), entourant une surface plane (S) défini dans le plan $\left(\overrightarrow{I_1}, \overrightarrow{I_2}\right)$ et soit $\overrightarrow{u}$, un champ de vecteurs (voir figure(9.1)).

La formule de la divergence est donnée par :

$$\int_{(S)} div\left(\overrightarrow{u}\right)\,dS = \int_{(C)} \overrightarrow{u}\;.\;d\overrightarrow{n} \tag{9.36}$$

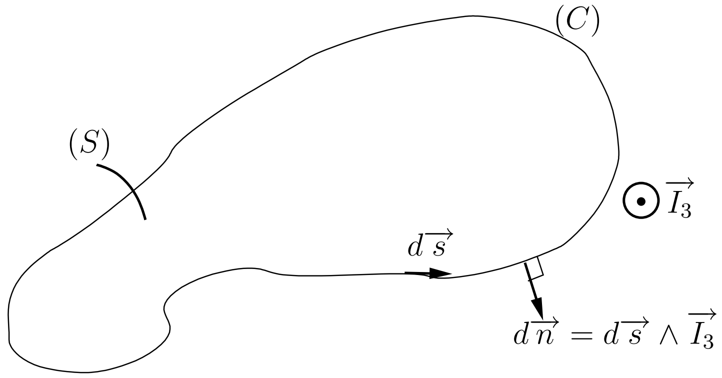

FIG. 9.1 – Théorème de la divergence : cas d'une surface

où $\overrightarrow{n}$ est la normale extérieure au contour (C).

Or :

$$\overrightarrow{u} \,.\, d\overrightarrow{n} = u^\alpha \, dn_\alpha$$
$$div\,(\overrightarrow{u}) = u_{\alpha|}{}^{\alpha} = u^\alpha \,|_\alpha$$

D'où en coordonnées :

$$\int_{(S)} u^\alpha \,|_\alpha \, dS = \int_{(C)} u^\alpha \, dn_\alpha \tag{9.37}$$

9.8.2 Théorème de Gauss : cas d'une volume

Soit un volume (V) limité par une surface (S), on a :

$$\int_{(V)} div\overrightarrow{u}\, dV = \int_{(S)} \overrightarrow{u}\,\overrightarrow{n}\, dS \tag{9.38}$$

(9.39)

D'où en coordonnées :

$$\int_{(V)} u^i \,|_i \, dV = \int_{(S)} u^i \, n_i \, dS$$

9.8.3 Théorème du rotationnel ou théorème de Stockes

Ce théorème permet le passage d'une intégrale sur le contour (C) à une intégrale sur une surface (S) :

$$\int_{(C)} \overrightarrow{u}\, d\overrightarrow{n} = \int_{(S)} rot\overrightarrow{u}\, dS \tag{9.40}$$

Bibliographie

[1] Y. Basar and D. Weichert. *Nonlinear Continum Mechanics of Solids - Fundamental mathematical and physical concepts*. Edition Springer-Verlag Berlin Heidelberg, New York, 2002.

[2] L. Brillouin. *Les tenseurs en mécanique et en élasticité*. Edition Jacques Gabay, Paris, 1938.

[3] W. Flügge. *Tensor Analysis and Continuum Mechanic*. Edition Springer-Verlag Berlin Heidelberg, New York, 1972.

[4] J. Garrigues. *Eléments d'algèbre et d'analyse tensorielle à l'usage des mécaniciens*. http ://www.esm2.imt-mrs.fr/gar/tenshtml/index.html, Marseille, 1999.

[5] Homeomath. *Le site des maths à petites doses*. http ://homeomath.chez.tiscali.fr/ev.htm, Paris, 2002.

Exercices de Calcul Tensoriel

Convention d'Einstein

1. Ecrire chacune des expressions suivantes en utilisant la convention d'Einstein :

$$\begin{array}{ll} a. & a_{j1}x^1 + a_{j2}x^2 + \ldots + a_{jN}x^N \\ b. & ds^2 = g_{11}dx^1dx^1 + g_{22}dx^2dx^2 + g_{33}dx^3dx^3 \\ c. & d\phi = \dfrac{\partial \phi}{\partial x_1}dx^1 + \dfrac{\partial \phi}{\partial x_2}dx^2 + \ldots + \dfrac{\partial \phi}{\partial x_n}dx^n \end{array}$$

2. Ecrire les termes dans les sommes suivantes :

$$\begin{array}{lll} a. & A_{pq}A^{qr} & \text{avec } q = 1, \ldots, N \\ b. & g'_{rs} = g_{jk}\,\dfrac{\partial x^j}{\partial x'^r} \cdot \dfrac{\partial x^k}{\partial x'^s} & \text{avec } N = 3 \\ c. & \vec{e_i} = \left[\beta_i^j\right] \vec{E_j} & \text{avec } i, j = 1, \ldots, 3 \end{array}$$

Composantes covariantes et contravariantes

3. Soit un repère $\vec{e_i}$ avec $(i = 1,\ 2,\ 3)$ d'origine O, tel que $\vec{e_1}$ soit orthogonal à $\vec{e_2}$, mais tel que $\vec{e_3}$ ne soit pas orthogonal au plan $(\vec{e_1}, \vec{e_2})$. On effectue le changement de base suivant :

$$\vec{E_1} = \vec{e_1} \qquad \vec{E_2} = \vec{e_2} \qquad \vec{E_3} = -\vec{e_3}$$

a. Un vecteur $\overrightarrow{OM} = \vec{x}$ a pour composantes $(x^1,\ x^2,\ x^3)$ dans la base $\vec{e_i}$. Donner ces composantes contravariantes X^i dans la base $\vec{E_i}$.
b. Donner les matrices de changement de base pour les vecteurs de base et les composantes de $\vec{x}$. Ecrire ces expressions sous forme tensorielle.

4. On considère un tenseur mixte d'ordre 2, noté $t_{i.}^{.j}$ défini dans la base $\vec{e_i}$. $t_{i.}^{.j}$ est symétrique et vaut : $[t_{i.}^{.j}] = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ On considère ensuite une seconde base $\vec{E_j}$ se déduisant de la base $\vec{e_i}$ par la matrice de changement de base :

$$[[\beta_i^j]] = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{4} \\ -\dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{4} \end{bmatrix}$$

Déterminer les nouvelles composantes $T_{k.}^{.l}$ du tenseur $t_{i.}^{.j}$ dans la base $\vec{E_i}$. La symétrie est-elle conservée dans le changement de base ? **5.** Soit t^{ij} un tenseur antisymétrique dans $\mathbb{R}^3$, soit :

$$t^{ij} = -t^{ji}$$

a. Montrer que t^{ij} est caractérisé par 3 composantes indépendantes.
b. Comment se transforme ces composantes dans un changement de repère ?
c. L'antisymétrie est elle indépendante du repère (c-à-d qu'un tenseur antisymétrique dans une base, l'est-il dans une autre) ?

Tenseur métrique

6. Soit $\mathbb{R}^2$, l'espace dans lequel on définit la base $\vec{e_1}\,(2,1)$ et $\vec{e_2}\,(-1,1)$
a. Calculer les éléments du tenseur métrique g_{ij}.
b. Déterminer les vecteurs $\vec{e^j}$ de la base duale.
c. Calculer les éléments du tenseur métrique g^{kl}.

7. Soit le tenseur métrique de composantes : $[g_{ij}] = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ dans la base $\vec{e_i}$ de $\mathbb{R}^2$.
a. Soient 2 vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$ tel que :

$$\begin{aligned} \vec{U} &= U^i\vec{e_i} = \vec{e_1} - \vec{e_2} \\ \vec{V} &= V^j\vec{e_j} = -\vec{e_1} \end{aligned}$$

Déterminer les composantes covariantes des 2 vecteurs puis les quantités :

$$\vec{U}\,.\,\vec{U},\ \vec{V}\,.\,\vec{V} \text{ et } \vec{U}\,.\,\vec{V}$$

b. On effectue le changement de base $\vec{E_i} = \left[\beta_i^j\right]\ \vec{e_j}$ avec $\left[\beta_i^j\right] = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$
Calculer les nouvelles composantes du tenseur métrique G_{ij} dans la nouvelle base. Donner les nouvelles composantes covariantes et contravariantes de $\vec{U}$ et $\vec{V}$ et les produits scalaires $\vec{U}\,.\,\vec{U}$, $\vec{V}\,.\,\vec{V}$ et $\vec{U}\,.\,\vec{V}$

8. Soit la base $\vec{e_i}$ dans $\mathbb{R}^2$ dans laquelle le tenseur métrique a pour composantes :

$$[g_{ij}] = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Soit t^i_{jk} un tenseur dont ses composantes dans $\vec{e_i}$ sont :

$$\begin{aligned} &t^1_{11} = 0\ ; \quad t^1_{12} = 1\ ; \quad t^1_{21} = -1\ ; \quad t^1_{22} = -2 \\ &t^2_{11} = 3\ ; \quad t^2_{12} = 0\ ; \quad t^2_{21} = -2\ ; \quad t^2_{22} = -4 \end{aligned}$$

Déterminer : $U_k = t^i_{ik}$, $V_k = t^i_{ki}$ puis V^k et U_iV^i. Indiquer à chaque fois l'opération utilisée et la nature du résultat obtenu. **9.** Soit $\mathbb{R}^3$ l'espace dans lequel on définit une base :

$$\begin{aligned} \vec{e_1} &= \vec{I_2} + \vec{I_3} \\ \vec{e_2} &= \vec{I_1} + \vec{I_3} \\ \vec{e_3} &= \vec{I_1} + \vec{I_2} \end{aligned}$$

a. Calculer les éléments du tenseur métrique g_{ij}.
b. Calculer les éléments du tenseur métrique g^{kl}.
c. Déterminer les vecteurs $\vec{e^j}$ de la base duale
d. Soient 2 vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$ tels que :

$$\begin{cases} \vec{U} = & 2\,\vec{e_1} & +\,3\,\vec{e_2} & -\,\vec{e_3} \\ \vec{V} = & \vec{e_1} & -\,\vec{e_2} & +\,\vec{e_3} \end{cases}$$

Calculer $\vec{U}\,.\,\vec{V}$

Systèmes de coordonnées sphériques

10. Soit le système de coordonnées sphériques (voir figure (9.2)) :

$$\begin{cases} \theta^1 & = & \rho \\ \theta^2 & = & \alpha \\ \theta^3 & = & \phi \end{cases}$$

Un point M dans le repère cartésien s'écrit : $\overrightarrow{OM} = X^i \vec{I_i}$.

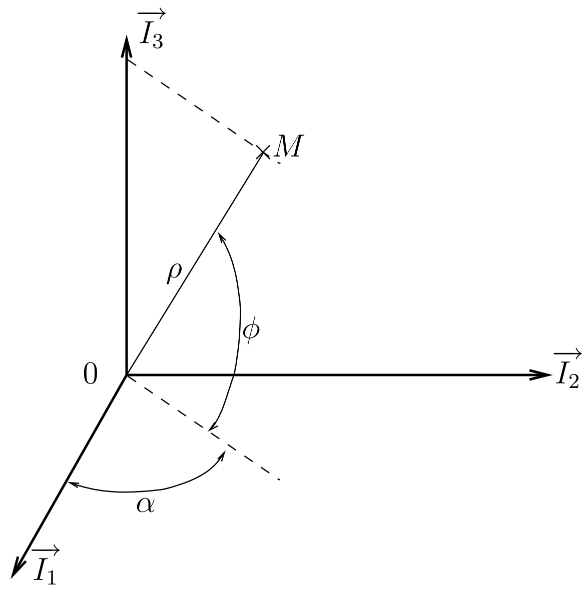

Fig. 9.2 – Systèmes de coordonnées sphériques

a. Déterminer les composantes du point M en fonction des coordonnées sphériques.
b. Calculer les composantes des vecteurs de base $\vec{g_i}$
c. Calculer le tenseur métrique covariant g_{ij}
d. Calculer le tenseur métrique contravariant g^{ij}
e. Calculer les coefficients de la matrice de changement de base $\beta^i_a = \dfrac{\partial X^i}{\partial \theta^a}$ de $\vec{I_a}$ à $\vec{g_i}$

11. Un tenseur du 1er ordre covariant A_i a pour composantes dans le repère cartésien :

$$X^1 X^2,\ 2X^2 - \left(X^3\right)^2,\ X^1 X^3 \tag{9.41}$$

Trouver ces composantes A'_j covariantes en coordonnées sphériques.

Changement de base

Dans les trois exercices suivants, on suppose un changement de base entre deux paramétrages curvilignes θ^i et θ'^j.

12. Montrer que $\dfrac{\partial A_p}{\partial \theta^q}$ n'est pas un tenseur, sachant que A_p est un tenseur d'ordre 1.

13. Si A_r^{pq} et B_t^s sont des tenseur, démontrer que $C_{rt}^{pqs} = A_r^{pq} \,.\, B_t^s$ est aussi un tenseur.

14. Démontrer que la contraction du tenseur A_q^p est un scalaire ou un invariant.

15. Prouver que $|g_{ij}| \ = \ |g^{ij}|^{-1} \ = \ g$

Dérivées covariantes

16. Déterminer les symboles de Christoffel Γ_{pqr} et Γ_{pq}^r pour les coordonnées orthogonales, c-à-d pour les coordonnées telles que le tenseur métrique : $g_{pq} = 0$ pour $p \ \neq \ q$

17. Soit le système de coordonnées polaires $\theta^1 \ = \ r$ et $\theta^2 \ = \ \theta$ et un vecteur $\vec{V}$ définit par :

$$\vec{V} = V_i \overrightarrow{g^i} = \begin{cases} V_1 & = & A \ \cos\theta \\ V_2 & = & -\dfrac{A}{r} \ \sin\theta \end{cases} \tag{9.42}$$

- **a.** Calculer les vecteurs de base $\vec{g_i}$ associés aux coordonnées polaires
- **b.** Calculer les tenseurs métriques g_{ij} et g^{ij}
- **c.** Calculer les dérivées covariantes de $\vec{V}$