Surfaces courbes

Gérard Rio
UBS-Ensibs

28 janvier 2013

Table des matières

1 Géometrie des surfaces courbes et des coques (théorie simplifiée)

1.1 Convention d'écriture

On considère une surface courbe dans l'espace, donc les points et les grandeurs tensorielles attachées à ces points.

On considère également les points situés à la distance z petite mais finie de cette surface. Ces derniers points constituent les points courants de la coque. Pour distinguer les grandeurs attachées à ces deux types de point, deux notations sont utilisées.

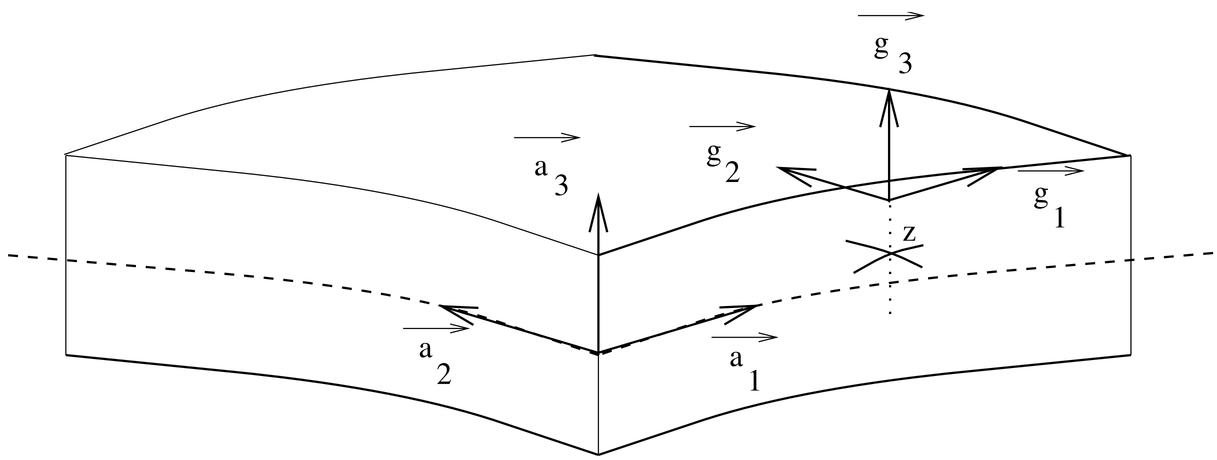

Figure 1 – Convention d'écriture

	Surface médiane $z = 0$	Coque $z \neq 0$
Position d'un point	$\vec{OP}$ $\vec{s}$	$\vec{OM} = \vec{OP} + z\vec{N}$ $\vec{N}$: $normale\ a\ la\ surface$ $\vec{r}$
Elément de longueur infinitésimal	$\vec{ds}$	$\vec{dr}$
Base naturelle	$\vec{a}_\alpha, \vec{a}_3$ $= \vec{a}^3 \vec{g}^\alpha$	$\vec{g}_\alpha$, $\vec{g}^\alpha, \vec{g}_3 = \vec{g}^3$
Tenseur métrique Symbole de Christoffel	$a_{\alpha\beta}, a^{\alpha\beta}$ $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$	$g_{\alpha\beta}, g^{\alpha\beta}$ $\bar{\Gamma}^\alpha_{\beta\gamma}$
Tenseur permutation en deux dimensions	$\epsilon_{\alpha\beta},\ \epsilon^{\alpha\beta}$	$\bar{\epsilon}_{\alpha\beta},\ \bar{\epsilon}^{\alpha\beta}$

(cf Notation de $Flügge$) :

NB : 0 est un point quelconque externe à la surface.

1.2 Quelques particularités de l'espace à deux dimensions

Soit la surface médiane $\vec{OP}(\theta^i)$ avec θ^1 et θ^2 définissant les lignes coordonnées de la surface.

On utilisera les indices grecques pour 1, 2,c'est-à-dire se rapportant à la surface et latins pour 1,2,3 c'est-à-dire se rapportant au volume.

On a : $\vec{a}_\alpha = \frac{\partial \vec{OP}}{\partial \theta^\alpha} \perp \vec{N}$

On pose : $\vec{a}_3 = \vec{N}$, ce qui permet en tout point P de repérer les grandeurs hors plan dans la base $\vec{a}_i$ c'est-à-dire le repère $\rightarrow \left(\vec{P}, \vec{a}_\alpha, \vec{a}_3\right)$.

Propriétés de la base $\vec{a}_i$:

$$\begin{array}{l} \vec{a}_\alpha.\vec{a}_3 = 0 \;\Rightarrow\; a_{\alpha 3} = a_{3\alpha} = 0 \\ \vec{a}_3.\vec{a}_3 = \vec{N}.\vec{N} = 1 \;\Rightarrow\; a_{33} = 1 \end{array}$$

d'où les composantes du tenseur métrique au point P :

$$[a_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

et : $\vec{a}^3 = \vec{a}_i \; a^{i3} = \vec{a}_3 \; a^{33} = \vec{a}_3$

En ce qui concerne les points hors surface médiane $\theta^3 \equiv z$

$$\vec{g}_3 = \frac{\partial \vec{OM}}{\partial \theta^3} = \frac{\partial \vec{OP}}{\partial z} + \vec{N} = \vec{N} \; = \; \vec{a}_3$$

d'où $g_{33} = 1$

$$\vec{g}_\alpha = \frac{\partial \vec{OP}}{\partial \theta^\alpha} + z\frac{\partial \vec{N}}{\partial \theta^\alpha} = \vec{a}_\alpha + z\vec{a}_{3,\alpha}$$

$\vec{N}$ étant un vecteur normal $\Rightarrow$ $\frac{\partial \vec{N}}{\partial \theta^\alpha}$ $\in$ au plan $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ et est perpendiculaire à $\vec{N}$ donc à $\vec{g}_3$.

D'où : $g_{\alpha 3} = 0$ et de même que pour $\vec{a}_i$, $\quad \vec{g}_3 = \vec{g}^3$

$$[g_{ij}] = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & 0 \\ g_{21} & g_{22} & 0 \\ 0 & 0 & g_{33} \end{bmatrix}$$

On introduit un tenseur permutation en deux dimensions :

$$\epsilon_{\alpha\beta} = \epsilon_{\alpha\beta 3} \;\Rightarrow\; \begin{array}{l} \epsilon_{11} = \epsilon_{11} = 0 \\ \epsilon_{12} = -\epsilon_{21} = \sqrt{g} \end{array} \;\Bigg|\; \epsilon^{12} = -\epsilon^{21} = \frac{1}{\sqrt{g}}$$

et le symbole de permutation $e_{\alpha\beta} = \frac{\epsilon_{\alpha\beta}}{\sqrt{g}}$

et pour le déterminant :

$$\begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 \\ a_1^2 & a_2^2 \end{vmatrix} = a_1^1 a_2^2 - a_2^1 a_1^2 = a = a_\alpha^1 a_\beta^2 \; \epsilon^{\alpha\beta}$$

On note :

$$\mid a_{\alpha\beta} \mid = a$$

et :

$$\mid g_{\alpha\beta} \mid = g$$

1.2.1 Symbole de Christoffel et tenseur de courbure

Sachant que $\vec{g}_{3,\alpha} \perp \vec{g}_3$

c'est-à-dire :

$$\vec{g}_{3,\alpha} \cdot \vec{g}_3 \;=\; \vec{g}_{3,\alpha} \cdot \vec{g}^3 \;=\; 0$$

$\Rightarrow \; \bar{\Gamma}_{3\alpha 3} = \;\; \bar{\Gamma}_{3\alpha 3} \; \bar{\Gamma}_{\alpha 33} \;=\; 0$

De plus $\vec{g}_3$ ne dépend pas de $z \;\Rightarrow\; \vec{g}_{3,3} \;=\; 0 \;\Rightarrow\; \bar{\Gamma}_{33\alpha} \;=\; \bar{\Gamma}_{333} \;=\; 0$

$$\begin{array}{l} \vec{g}_\alpha \cdot \vec{g}_3 \;=\; 0 \;\Rightarrow\; \vec{g}_{\alpha,\beta} \cdot \vec{g}_3 \;+\; \vec{g}_{3,\beta} \cdot \vec{g}_\alpha \;=\; 0 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \hookrightarrow \; \vec{g}_{\alpha,\beta} \cdot \vec{g}_3 \;=\; -\vec{g}_{3,\beta} \cdot \vec{g}_\alpha \end{array} \qquad (1)$$

(1) avec $\alpha \iff \beta$

d'où :

$$\bar{\Gamma}_{\alpha\beta 3} \;=\; -\bar{\Gamma}_{3\beta\alpha} \;=\; -\bar{\Gamma}_{\beta 3\alpha} \;=\; \bar{\Gamma}_{\beta\alpha 3} \;=\; -\bar{\Gamma}_{3\alpha\beta} \;=\; -\bar{\Gamma}_{\alpha 3\beta}$$

$\rightarrow$ Symétrie par rapport aux deux premiers indices

$\rightarrow$ antisymétrie par rapport aux indices extrêmes quand il y a un 3 dans l'expression

A chaque fois que le chiffre 3 apparaît plus d'une fois, cela conduit à un symbole de Christoffel nul.

Au niveau du vecteur normal nous notons :
$\vec{a}_{3,\alpha} \;=\; -b_{\alpha\beta}\;\vec{a}^{\beta}$.

Les quantités $\beta_{\alpha\beta}$ sont les composantes deux fois convariantes d'un tenseur, le tenseur de courbure.
$b_{\alpha\beta} \;=\; -a_{3,\alpha}\;.\;\vec{a}_{\beta}$

Comme $\vec{a}_3\;.\;\vec{a}_{\alpha} \;=\; 0$, c'est-à-dire (1), nous avons :

$b_{\alpha\beta} \;=\; \vec{a}_{\alpha,\beta}\;.\;\vec{a}_3 \;=\; \Gamma^3_{\alpha\beta 3} \;=\; \Gamma_{\alpha\beta 3}$

En mixte, cela devient :

$$b^{\alpha}_{\beta} \;=\; -a_{3,\beta}\;.\;\vec{a}^{\alpha} \;=\; -\Gamma^{\alpha}_{\beta 3} \;=\; -\;\vec{a}_{\beta,3}\;\;\vec{a}^{\alpha}$$

Comme $\vec{a}_{\alpha,\beta} \;=\; \vec{a}_{\beta,\alpha}$ (symétrie des deux premiers indices de Γ) $\Rightarrow\; b_{\alpha\beta} \;=\; b_{\beta\alpha} \;\rightarrow$ le tenseur de courbure est symétrique.

Remarque Dans le cas général nous avons : $b^1_2 \;\neq\; b^2_1$

1.2.2 Signification de b^{α}_{β}

Supposons dans un premier temps que seul $b^1_1 \neq 0$.

$$\begin{aligned}
d\vec{a}_3 \;&=\; \vec{a}_{3,i}\;.\;d\theta^i \\
&=\; \vec{a}_{3,1}\;.\;d\theta^1 \\
&=\; -b^1_1\;\vec{a}_1\;d\theta^1
\end{aligned}$$

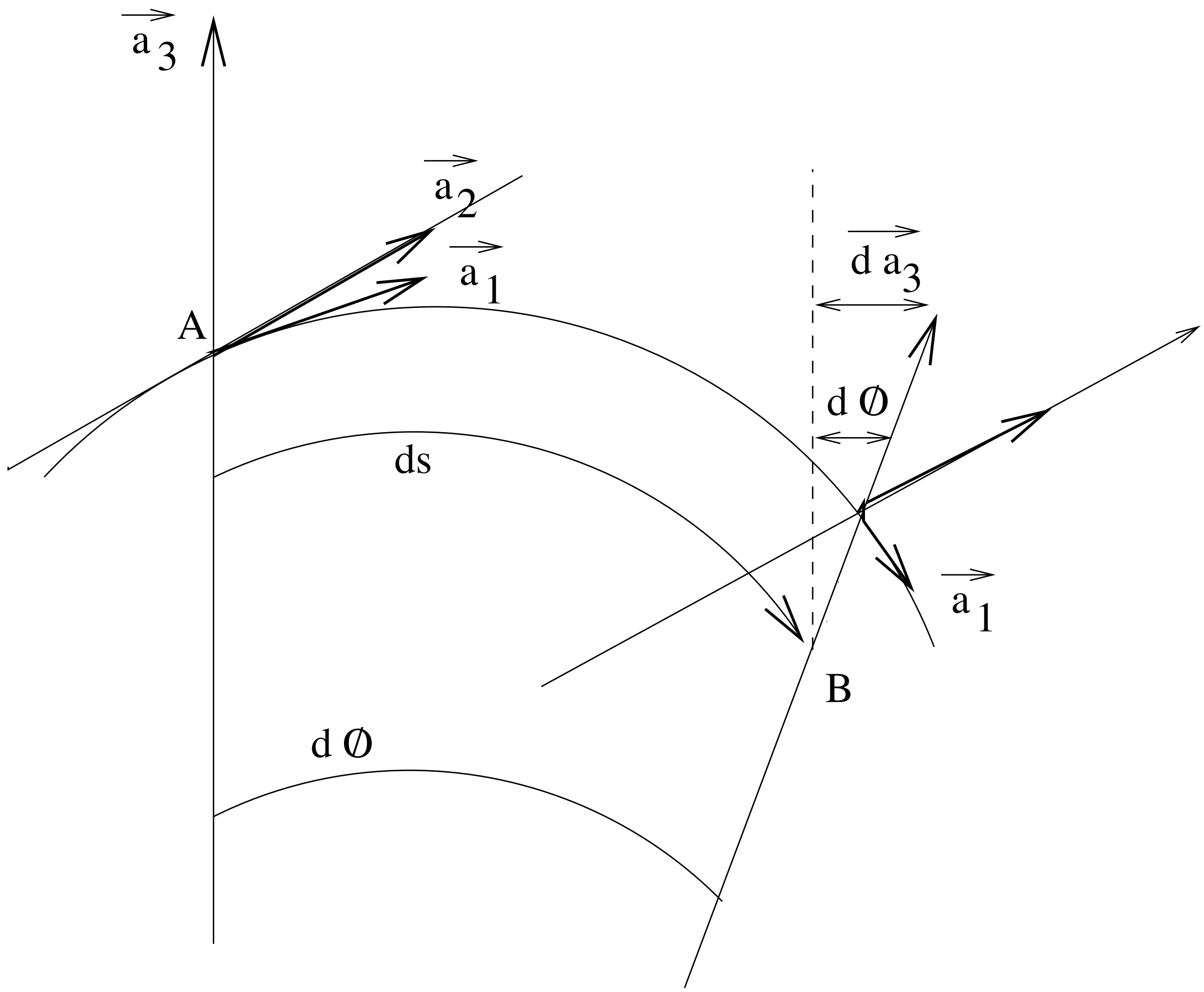

FIGURE 2 – Rayon de courbure

(**NB :**Il n'y a pas de torsion de la courbe).

Entre A et B on a :

$$\begin{aligned} \vec{ds} &= \vec{a}_1 \, d\theta^1 \\ ds &= a_1 \, d\theta^1 \end{aligned}$$

d'où : $\frac{\parallel \; d\vec{a}_3 \; \parallel}{\parallel \; \vec{a_1} \; \parallel \; d\theta^1} \; = \; |b_1^1|$, de plus $ds = d \; \phi \; . \; \varrho$

avec ϱ : le rayon de courbure.

$\parallel \; d\vec{a}_3 \; \parallel \; = \; d \; \phi \; . \; 1 \; = \; d \; \phi$ d'où $|b_1^1| \; = \; \frac{d \; \phi}{ds} \; = \; \frac{1}{\varrho}$

Ceci montre que b_1^1 représente la courbure de la surface dans la direction 1.

2) Supposons maintenant que seul : $b_2^1 \ \neq$:

Dans ce cas :

$$d\vec{a}_3 \ = \ \vec{a}_{3,1} \ d\theta^1$$

D'où si l'on se déplace selon l'axe 1 :

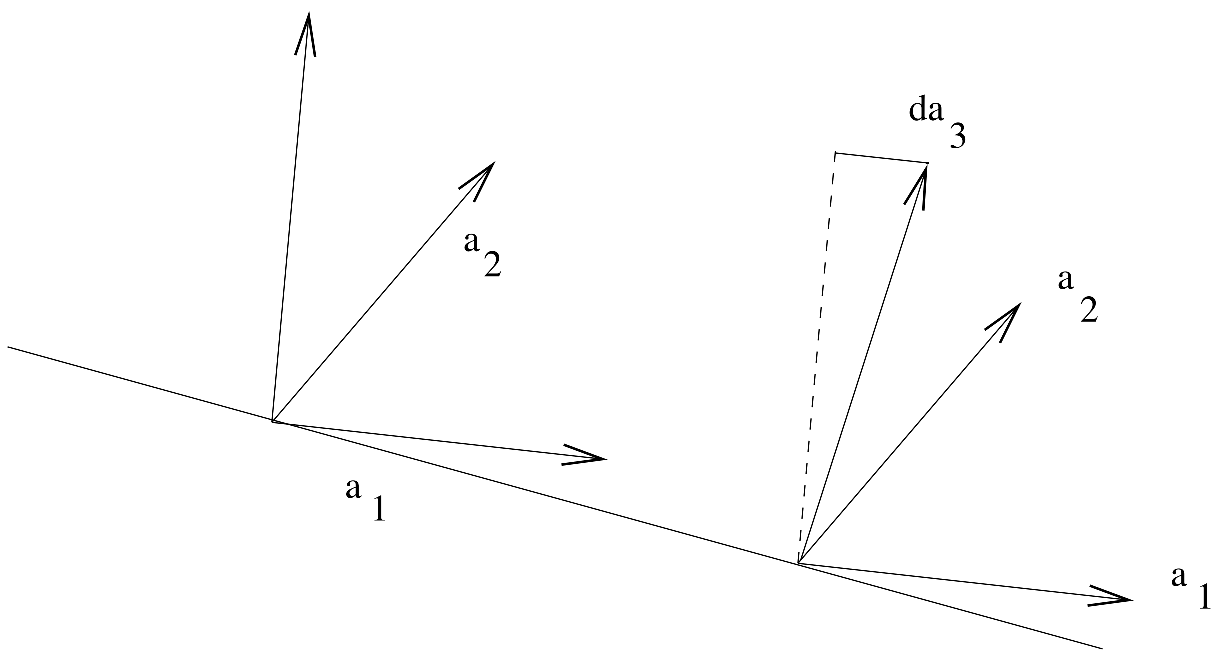

Figure 3 – Torsion

$$d\vec{a}_3 \ = \ -b_1^2 \vec{a}_2 d\theta^1 \quad \| \ d\vec{a}_3 \ \| = \ d \ \Psi$$

et :

$$\frac{d \ \Psi}{ds} \ = \ \frac{\| \ d\vec{a}_3 \ \|}{\| \ \vec{a_1} \ \| \ \ d\theta^1} = \| \ b_1^2 \ \| \ . \frac{\| \ \vec{a}_2 \ \|}{\| \ \vec{a}_1 \ \|}$$

Ainsi b_1^2 mesure la torsion, au rapport des longueurs des vecteurs de base près. Lorsque $\| \ \vec{a}_2 \ \| = \ \| \ \vec{a}_1 \ \|$ on a directement la torsion, et de plus $b_1^2 \ = \ b_2^1$.

En résumé : b_α^α mesure la courbure suivant la direction α, et b_α^β mesure la torsion le long de l'axe α par rapport à l'axe β.

Deux définitions :

$trace(\mathbf{b}) \;=\; b_1^1 \;+\; b_2^2$, est appelé la courbure principale

$b = |b_\beta^\alpha| \;= b_1^1\; b_2^2 \;-\; b_2^1\; b_1^2$, est appelé la courbure gaussienne.

1.3 Dérivées covariantes

Soit un champ de vecteurs $\vec{V} \;=\; V_i\; \vec{a}^i \;=\; V_\alpha\; \vec{a}^\alpha \;+\; V_3\; \vec{a}^3$. La partie $V_\alpha\; \vec{a}^\alpha$ appartiend à la surface et $v_3\; \vec{a}^3$ est un élément hors surface.

Sachant que : $b_{\alpha\beta} \;=\; \Gamma\alpha\beta^3 \;=\; \Gamma\alpha\beta 3$ et en mettant en évidence la séparation des termes α et 3 on a :

$$\begin{aligned} V_{\alpha|\beta} &= V_{\alpha,\beta} \;-\; V_k\; \Gamma^k_{\beta\alpha} \\ &= V_{\alpha,\beta} \;-\; V_\gamma\; \Gamma^\gamma_{\beta\alpha} \;-\; V_3\; b_{\alpha\beta} \end{aligned}$$

avec la notation :

$$V_{\alpha\|\beta} \;=\; V_{\alpha,\beta} \;-\; V_\gamma\; \Gamma^\gamma_{\beta\alpha}$$

l'expression devient :

$$V_{\alpha|\beta} = \; V_{\alpha\|\beta} - \; V_3\; b_{\alpha\beta}$$

Le terme : $V_{\alpha,\beta} \;-\; V_\gamma\; \Gamma^\gamma_{\beta\alpha}$: constitue la dérivée sur la surface

De plus :

$$\begin{aligned} &V_{3|\beta} \;=\; V_{3,\beta} \;-\; V_\gamma\; \Gamma^\gamma_{3\beta} \;-\; V_3 \;-\; \Gamma^3_{3\beta}\; (\textit{terme nul}) \\ &=\; V_{3,\beta} \;+\; b^\gamma_\beta\; V\gamma \end{aligned}$$

En conclusion :

$$\begin{aligned} \vec{V}_{,\beta} &= V_{\alpha|\beta}\; .\; \vec{a}^\alpha \;+\; V_{3|\beta}\; .\; \vec{a}^3 \\ \vec{V}_{,\beta} &= \left(V_{\alpha\|\beta} \;-\; v_3\; b_{\alpha\beta}\right)\; \vec{a}^\alpha \;+\; \left(V_{3,\beta} \;+\; b^\gamma_\beta\; V_\gamma\right)\; \vec{a}^3 \end{aligned}$$

Ainsi

NB :

1) Si $\vec{V} \in$ au plan : $V_{\alpha\;\|\;\beta} \;=\; V_{\alpha\;|\;\beta}$

2) Même si $\vec{V} \in$ au plan, on a : $\vec{V}_{,\beta}$ qui a une composante suivant $\vec{a}_3$, cela signifie que l'on ne peut pas avoir un vecteur $\vec{V}$ constant sans une composante V_3 sauf en des points particuliers.

On montrerait de même avec la notation :

$$V^\alpha \,\|_\beta = \; V^\alpha_{,\beta} \; + \; V^\gamma \; \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$$

$$\begin{aligned} & V^\alpha \,|_\beta = \; V^\alpha \,\|_\beta \; - V^3 \; \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} \\ & et \; \vec{V}_{,\beta} \; = \; (V^\alpha \,\|_\beta \; - v^3 \; b^\alpha_\beta) \; \vec{a}_\alpha \; + \; v^3 \;\; |_\beta \;\; \vec{a}_3 \end{aligned}$$

avec : $v^3_{,\beta} \; + \; v^\gamma \; b_{\gamma\beta} \;\; = \;\; v^3 \;\; |_\beta$

1.4 Remarque sur les grandeurs uniquement attachées à la surface (information)

1) **Calcul de dérivée seconde** : on se situe uniquement en 2D sur la surface et on considère seule la dérivée covariante $\|$, c'est à dire la dérivée 2D classique, indépendemmant du fait que l'on se déplace sur une surface courbe. Lorsque l'on calcul la dérivée seconde, on peut se poser la question de savoir si l'on peut intervertir les indices de dérivation ? En fait la réponse est non. Après calcul on trouve :

$$V_{\alpha\|\beta\gamma} \; - \; V_{\alpha\|\gamma\beta} \; = \; V_\delta \; R^\delta \; . \;_{\alpha\beta\gamma} \; = \; V^\delta \; R_{\delta\alpha\beta\gamma}$$

avec $\mathbf{R}$ le tenseur de Rieman Christoffel.

Dans le cas d'une surface courbe, on a : $R_{\alpha\beta\gamma\delta} \;\; = \;\; b\epsilon_{\alpha\beta} \; \epsilon_{\beta\gamma} \;\; = \;\; 0$ uniqument si la courbure gaussienne est nulle !

2) Notion de transfert : relativement à une courbe et une surface.

Soit deux points sur la courbe (c) M1 et M2.

On se pose la question : comment transporter $\vec{V}$ de M1 en M2 de manière parallèle ?

Prenons l'exemple d'un transport sur une parallèle d'une sphère :

$\vec{U}_1$: tous parallèles

$\vec{U}_2 \perp \vec{U}_1 \;\Rightarrow\;$ aussi parallèles par définition. C'est le "meilleur" transport parallèle que l'on peut faire par rapport à la courbe C.

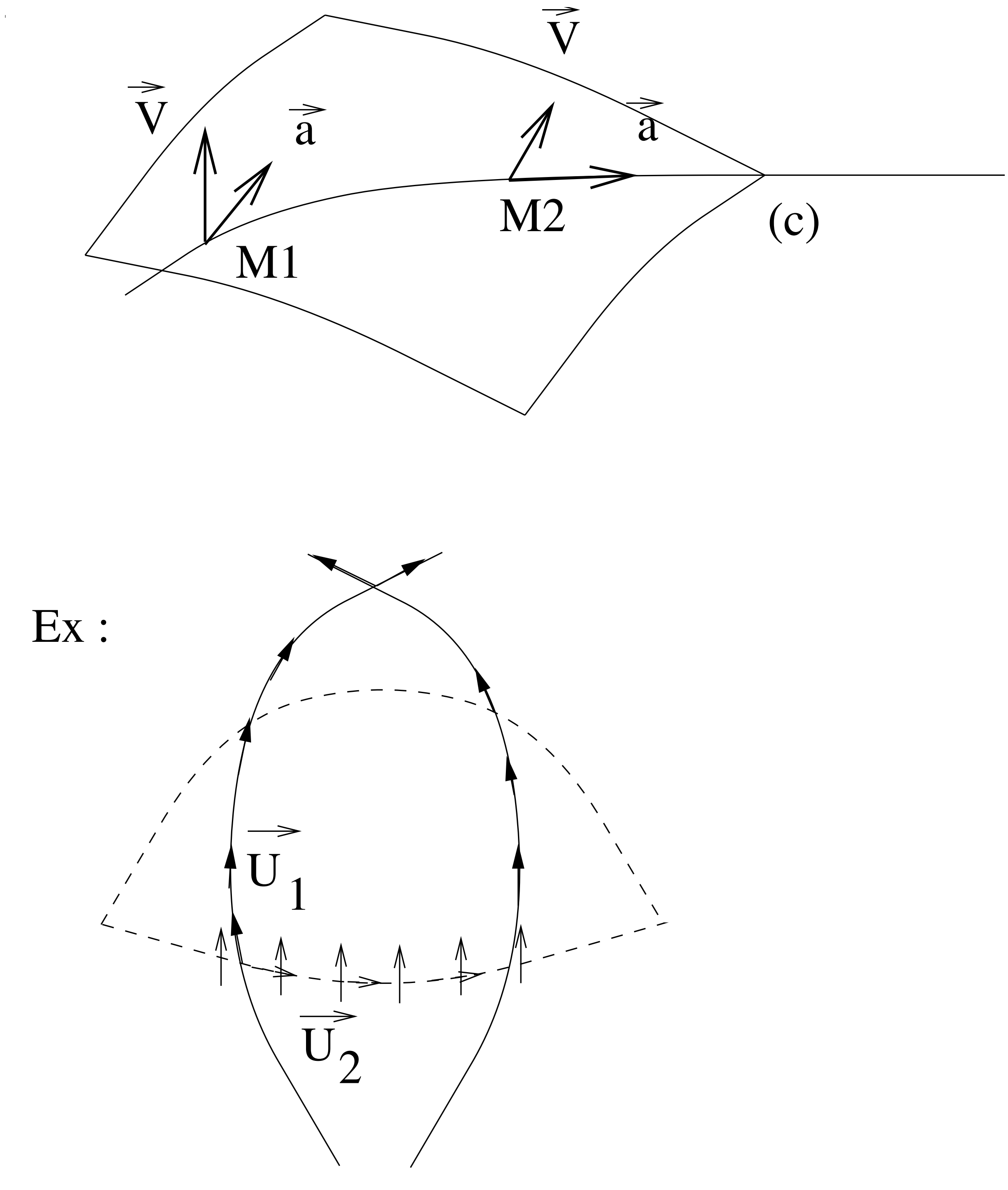

Figure 4 – Notion de transport

Pb : dans certains cas le transport parallèle dépend de la courbe ou de la surface par rapport à laquelle le transport se fait.

Dans le cas ou l'on applique ce même principe le long d'un méridien, on s'apperçoit que cela conduit à des abhérations au niveau des pôles , ce qui montre la difficulté de la notion de transport, notion pourtant très utile en mécanique notament pour définir la déformation et les dérivées objectives.

2 Axes principaux et invariants

2.1 Invariants

Soit un tenseur d'ordre 2 : $\mathbf{T} \ = \ t^{ij} \ \vec{g}_i \ \otimes \ \vec{g}_j$

vecteurs propres et valeurs propres :

On cherche : $\vec{V}$ et $\mathbf{T}$ tels que $\mathbf{T} \ . \ \vec{V} \ = \ r \ \vec{V}$

Dans ce cas r est appelé valeur propre de $\mathbf{T}$.

En composants, cela donne :

$$T^{ij} \ V_j \ \vec{g}_i \ - \ r \ V^i \ \vec{g}_i \ = \ 0 \ (\textit{contracté par rapport au 2ème indice})$$

C'est-à-dire :

$$T^{ij} \ V_i \ - \ r \ V^i \ = \ 0 \quad = \ T^{ij} \ V^k \ g_{ki} \ - \ r \ V^i \quad \begin{aligned} &= \ T^i{}_{\cdot k} \ V^k \ - \ rV^i \\ &= \ T^i{}_{\cdot j} \ V^j \ - \ r\delta^i_j \ V^j \\ &= \ (T^i{}_{\cdot j} \ - \ r\delta^i_j) \ V^j \ = \ 0 \end{aligned}$$

Si l'on avait contracté par rapport au premier indice, on aurait :

$$(T^i{}_{\cdot j} \ - \ r\delta^i_j) \ V_i \ = \ 0$$

Pour avoir une solution non nulle, il faut :

$$det \ (T^i{}_{\cdot j} \ - \ r\delta^i_j) \ = \ 0 \ = \ A - Br + Cr^2 - Dr^3$$

Equation que l'on peut écrire sous la forme :

$$r^3 \ - \ t^i{}_{\cdot i} \ r^2 \ + \ \frac{1}{2} \ \left(t^i{}_{\cdot i} \ t^j{}_{\cdot j} \ - \ t^i{}_{\cdot j} \ t^j{}_{\cdot i}\right) \ r \ - \ det(t^i{}_{\cdot j}) \ = \ 0$$

appelée équation caractéristique du tenseur. Elle correspond à à l'équation initiale d'où elle ne doit pas dépendre du repère. Cela n'est possible que si les coefficients de r sont indépendants du repère, c'est-à-dire sont des scalaires absolus, c'est-à-dire des invariants , ainsi il existe 3 invariants de base.

$$\begin{array}{ll} t_I \ = \ t^i{}_{\cdot i} \ = \ trace(\mathbf{t}) & \qquad t_{III} \ = \ det(t^i{}_{\cdot j}) \\ t_{II} \ = \ t^i{}_{\cdot i}\, t^j{}_{\cdot j} \ - \ t^i{}_{\cdot j}\, t^j{}_{\cdot i} & \end{array}$$

Toute combinaison des 3 invariants de base est également un invariant. On utilise parfois comme seconds "jeux" d'invariant :

$$\left(t_I^2 \ - \ t_{II}\right) \ = \ t'_{II} \ = \ t^i{}_{\cdot j}\, t^j{}_{\cdot i} \ = \ t^{ij}\, t_{ji}$$

On décompose souvent un tenseur d'ordre 2 en deux parties :

$\bar{T}^i{}_{\cdot j} \ = \ t^i{}_{\cdot j} \ - \ \frac{1}{3}\, trace(\mathbf{T})\ \delta^i_j$: partie déviatorique ou déviateur,

et : $\frac{1}{3}\, trace(\mathbf{T})\ \delta^i_j$: partie sphérique.

On a : $trace\left(\bar{T}^i.j\right) \ = \ 0$

Soit l'expression : $2t_I^2 \ - \ 3t_{II} \ = \ 3t^i{}_{\cdot j}\, t^j{}_{\cdot i} \ - \ (t^i{}_{\cdot i})(t^j{}_{\cdot j}) \ = \ 3\bar{t}^i{}_{\cdot j}\, \bar{t}^j{}_{\cdot i} \ = \ 3\bar{t}'_{II}$

C'est un invariant appelé 2ème invariant du déviateur (à un coefficient près). Il est très utilisé en mécanique.

<u>Cas des tenseurs symétriques</u>

On montre que dans le cas d'une matrice symétrique il y a 3 racines réelles (avec éventuellement égalités entre les différentes valeurs).

Soit deux valeurs propres différentes $r_{(n)},\ r_{(m)}$. On a d'une part en première partie :

$$t^i{}_{\cdot j}\ V_{(m)i} = r_{(m)} V_{(m)j}$$

et d'autre part en seconde partie :

$$t^k{}_{\cdot l}\ V_{(n)k} = r_{(n)} V_{(n)l}$$

on multiplie par g^{il}

$$\rightarrow\ t^{ki}\ V^j_{(n)}\ g_{jk} \ = \ r_{(n)}\ V^i_{(n)} \ = \ t_j{}^{.i}\ V^j_{(n)}$$

Pour la première partie on peux écrire après multiplication par $V^i_{(n)}$: $t^i{}_{.j}\ V_{(m)i}\ V^j_{(n)}\ =\ r_{(m)}\ V_{(m)j}\ V^j_{(n)}$

et pour la seconde partie après mutiplication par $V_{(m)i}$: $t_j i\ V^j_{(n)}\ V_{(m)i}\ =\ t^i_{.j}\ V^j_{(n)}\ V_{(m)i}\ =\ r_{(n)}\ V^i_{(n)}\ V_{(m)i}$

On remarque qu'il s'agit pour les membres de gauche, de la même expression, et par hypothèse les deux valeurs propres sont différentes d'où :

$$r_{(n)}\ \neq\ r_{(m)}\ \Rightarrow\ V_{(m)j}\ V^j_{(n)}\ =\ 0\ =\ V^j_{(m)}\ V^i_{(n)}\ g_{ij}$$

Ceci prouve que les vecteurs propres associés à deux valeurs propres différentes sont donc orthogonaux.

<u>Admis</u>

Dans le cas d'une valeur propre double, on a un plan de valeurs propres dans lesquelles on peut choisir un repère orthogonal.

$\Rightarrow$ <u>Conclusion</u> : aux valeurs propres est associé un repère de direction propre orthogonal ! qu'on appelle <u>axes principaux</u>. Ce repère peut être normé : $\frac{\vec{V}_{(m)}}{\|\vec{V}_m\|}\ =\ \vec{g}_{m'}$

Si l'on exprime **T** dans son repère principal $\vec{g}_{m'}\ =\ \frac{\vec{V}^j_{(m)}}{\|\vec{V}_m\|}$

$$T^i{}_{.j}\ \frac{V^j_{(n)}}{\|\ \vec{V}_m\ \|}\ =\ r_{(m)}\ \frac{V^i_{(n)}}{\|\ \vec{V}_m\ \|}$$

eLes termes $T_{(m)}\ V^i_{(n)} \|\ \vec{V}_m\ \|$ se positionnent sur la diagonale de la matrice.

$$\left[\begin{array}{ccc} r_{(1)} & & 0 \\ & r_{(2)} & \\ 0 & & r_{(3)} \end{array}\right]\ =\ [T^i.j]$$

2.2 Cas du bi-dimensionnel

Dans le cas d'un espace à deux dimensions :

$$t_{II}\ =\ t^1.1\ t^2.2\ -\ t^1.2\ .\ t^2.1\ =\ t_{III}$$

d'où il y a deux invariants : la trace et le déterminant de la matrice des coordonnées mixtes.

2.3 Cas du tenseur de courbure

On remarque que les deux invariants sont la courbure principale et la courbure gaussienne.

Les directions principales reprèsentent les directions dans lesquelles il n'y a pas de torsion.

Si l'on trace des courbes tangentes aux directions principales de courbure on obtiend les lignes de courbures principales qui forment un réseau orthogonal.

En général les équations sont plus simples à utiliser dans ce réseau mais celui-ci est (sauf cas de surface particulier) difficile à déterminer.