Equivalence entre une loi élasto-plastique parfaite classique et une loi d'hystérésis

J. Troufflard

(date dernière modif : 14 septembre 2015)

Table des matières

1. Relations de passage et illustration en traction uniaxiale

La loi d'élasticité avec plasticité parfaite est classiquement définie par 3 paramètres :
- module d'Young : E
- coefficient de Poisson : ν
- limite d'élasticité en traction uniaxiale : σ_0

Ce sont ces paramètres que l'utilisateur souhaite choisir. Ils sont définis dans un contexte de traction uniaxiale tandis que les paramètres de la loi d'hystérésis sont définis dans un contexte de cisaillement simple. Les paramètres E, ν et σ_0 sont donc les données d'entrée que l'on va convertir en paramètres pour la loi d'hystérésis.

La loi équivalente dans Herezh++ se compose d'une partie définissant la compressibilité `ISOHYPERBULK3` (comportement sphérique de la loi) et d'une partie définissant le comportement non-réversible `HYSTERESIS_3D` (partie déviatorique de la loi) qui s'apparente à la plasticité. La loi `HYSTERESIS_3D` est définie par 3 paramètres :
- module de cisaillement : μ (ou encore G)
- seuil de saturation en cisaillement simple : Q_0
- coefficient de Prager : np

La loi `ISOHYPERBULK3` prend comme paramètre :
- module de compressibilité usuel multiplié par 3 : $3K$

En élasticité, les relations de passage entre $(K,\ G)$ et $(E,\ \nu)$ sont :

$$K = \frac{E}{3(1-2\nu)} \tag{1}$$
$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \tag{2}$$

La limite d'élasticité en traction uniaxiale σ_0 est liée au seuil de saturation par la relation suivante :

$$\sigma_0 = \sqrt{3/2}\ Q_0 \tag{3}$$

Connaissant $(E,\ \nu,\ \sigma_0)$, on trouve directement les paramètres équivalents de la loi d'hystérésis :

$$3K = \frac{E}{1-2\nu} \tag{4}$$
$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \tag{5}$$
$$Q_0 = \frac{\sigma_0}{\sqrt{3/2}} \tag{6}$$

Il reste le dernier paramètre *np* permettant de contrôler la non-linéarité de passage entre la première pente et la saturation. Pour retrouver un équivalent au modèle élasto-plastique classique, il faut que le passage entre la pente élastique et le plateau de plasticité parfaite soit brutale (anguleuse). On retrouve ce comportement pour *np* grand. Mais si *np* est trop grand, il y a des problèmes de convergence, même sur des calculs simples. A partir de *np*=40, le comportement est qualitativement conforme à la plasticité classique.

La figure 1 montre clairement le comportement de la loi d'hystérésis en traction uniaxiale et l'influence du paramètre *np* pour le cas E=10000 MPa, ν=0.3 et σ_0=100 MPa ($3K$=25000 MPa, μ=3846.15 MPa, Q_0=81.65 MPa, fichier de mise en données en annexe A). Le seuil de saturation est bien égal à 100 MPa en traction. Dans le cas *np*=40, la pente dans le domaine élastique est environ égale à 10000 MPa. Une exploitation précise de la pente dans le domaine élastique montre que la pente à l'origine est égale à 10000 MPa, croit légèrement jusqu'à atteindre 10082 MPa vers ϵ=0.0089 puis décroit jusqu'à atteindre 10047 MPa à l'entrée de la fenêtre de zoom sur la courbe 1. Dans la fenêtre de zoom (à partir de σ=94 MPa), le module chute plus rapidement compte tenu de la courbure de transition. La courbe 2 montre que le coefficient de Poisson est bien égal à 0.3 dans le domaine élastique lors de la charge. L'évaluation du coefficient de Poisson lors de la décharge élastique demanderait de tenir compte de la déformation plastique. Mais cette grandeur n'existe pas dans Herezh++. Si on utilise la déformation totale pour ce calcul, on aboutit à la valeur erronée de 0.393. Néanmoins, cette valeur peut servir de référence pour une comparaison avec une loi élasto-plastique classique.

Pour finir, il faut noter que la partie compressibilité fait apparaître des artefacts au plateau si la précision globale n'est pas assez grande. Les calculs précédents ont été faits avec le paramètre de `controle` → "`PRECISION 1.e-4`". Si on repasse ce paramètre a une valeur classique de `1e-3`, on obtient de légères oscillations qui n'ont pas d'impact majeur sur le comportement. Mais le problème s'amplifie à mesure que la précision décroît (voir figure 3).

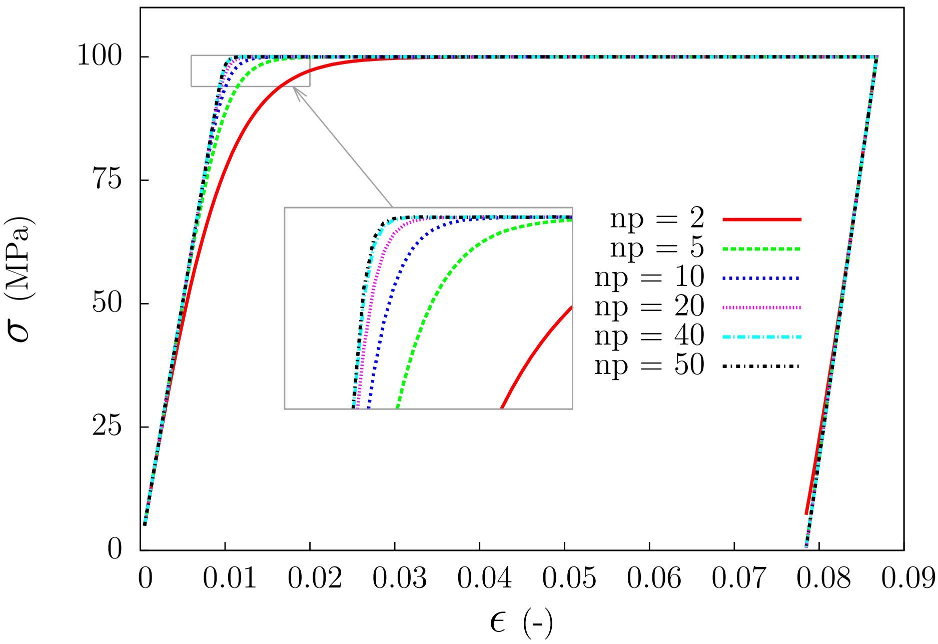

Figure 1 – courbe contrainte-déformation en traction uniaxiale - influence du paramètre *np*

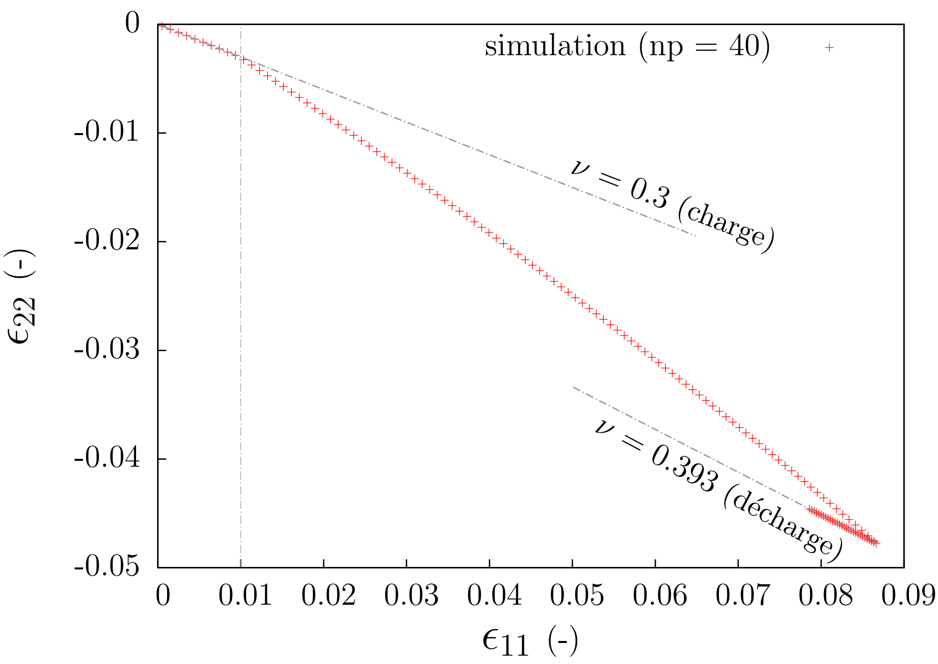

Figure 2 – déformation transverse en fonction de la déformation dans le sens de traction - analyse du coefficient de Poisson dans le domaine élastique lors de la charge et de la décharge (le calcul du coefficient de Poisson utilise la déformation totale)

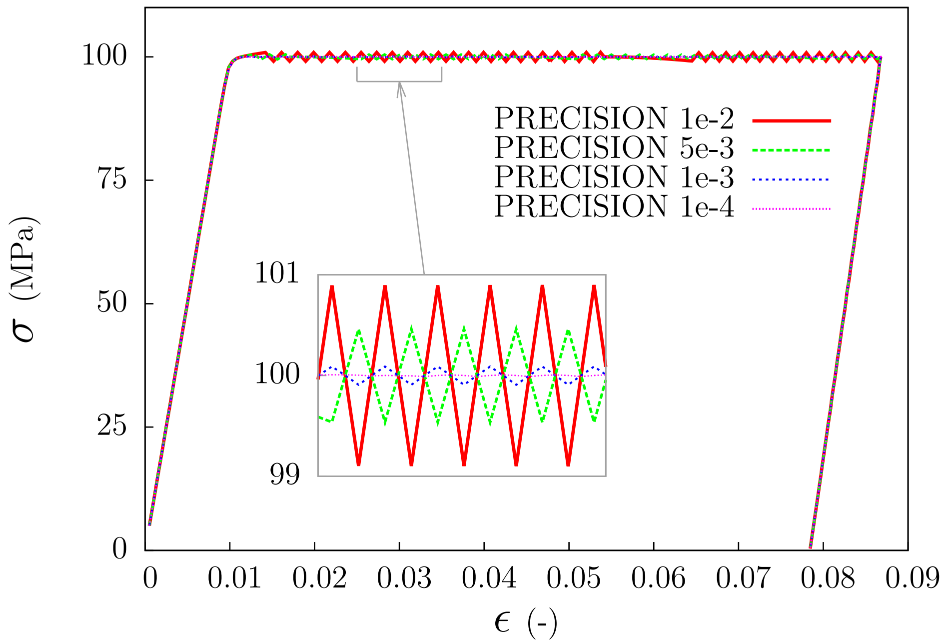

Figure 3 – influence de la précision globale sur la réponse au plateau

2. Comparaison avec Abaqus en traction uniaxiale

On refait le calcul de traction uniaxiale avec Abaqus en prenant une loi élasto-plastique classique sous la forme (voir mise en données en annexe B) :

```
*Elastic
10000, 0.3
*Plastic
100, 0
100, 1
```

Dans le mot-clé `*Plastic`, on définit la loi plastique parfaite par une série de points (limite d'élasticité, déformation plastique équivalente).

Pour l'exploitation, il est très important de préciser qu'Abaqus utilise la mesure de déformation logarithmique ϵ_{log} tandis qu'Herezh++ utilise la déformation de Euler-Almansi ϵ_{Al}. Les relations suivantes établissent la correspondance entre ces types de déformations en l'absence de terme de cisaillement (valable donc en traction uniaxiale, compression hydrostatique ou tout autre chargement exprimé dans un repère principal) :

$$\epsilon_{Al} = \frac{1}{2}\left(1 - (l/l_0)^{-2}\right) \tag{7}$$

$$\epsilon_{log} = \ln(l/l_0) \tag{8}$$

$$\Rightarrow \epsilon_{Al} = \frac{1}{2}\left(1 - [\exp(\epsilon_{log})]^{-2}\right) \tag{9}$$

avec l la longueur actuelle et l_0 la longueur initiale de l'élément de matière suivant la direction 1, 2 ou 3.

La figure 4 montre la très bonne corrélation des courbes contrainte-déformation entre Herezh++ (*np*=40) et Abaqus. De même, les conclusions sont les mêmes concernant le coefficient de Poisson (voir figure 5).

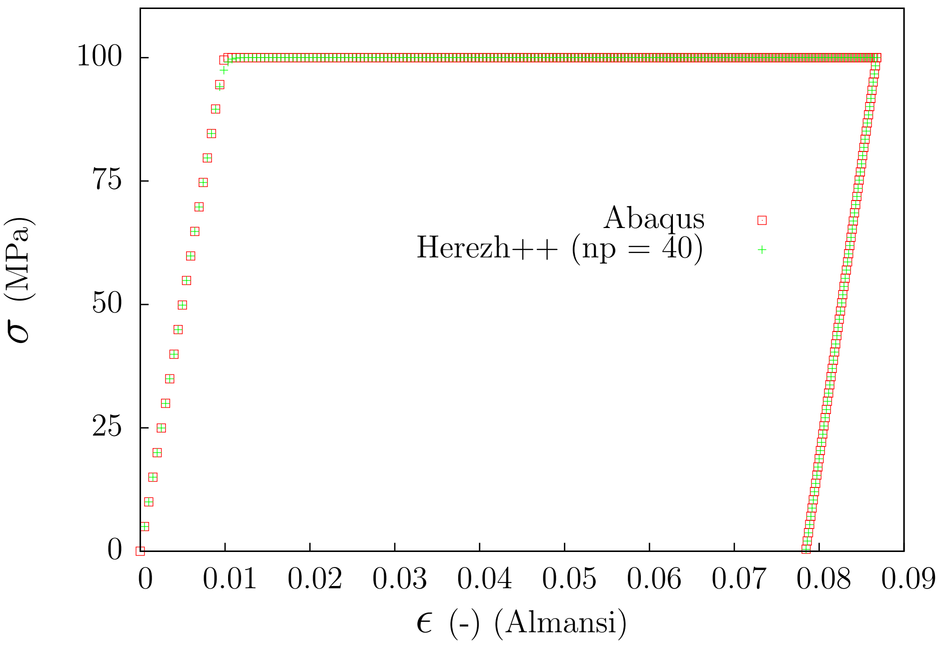

Figure 4 – courbe contrainte-déformation en traction uniaxiale - comparaison Herezh++/Abaqus (représentation en déformation d'Almansi)

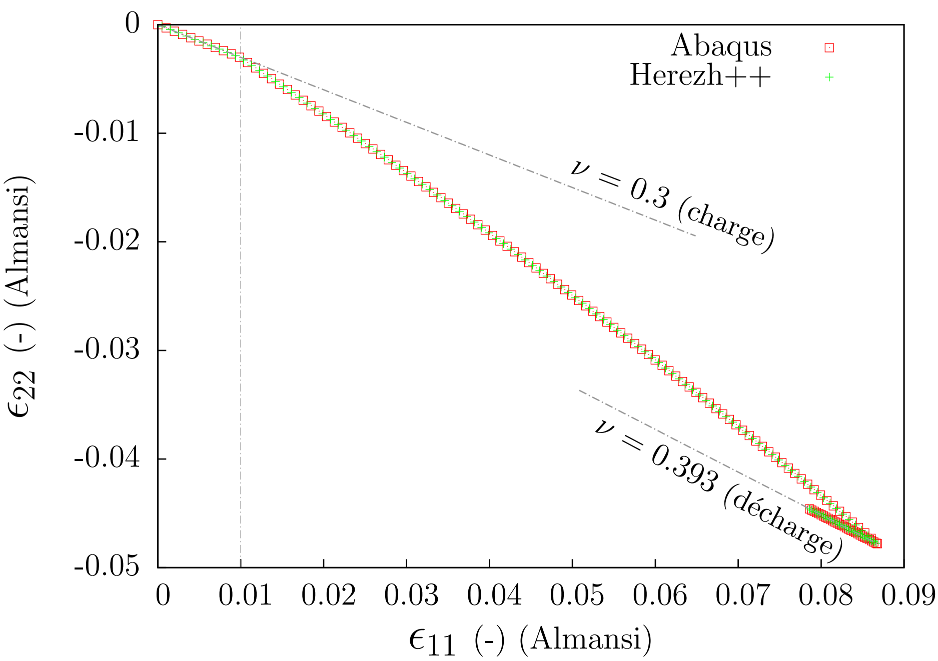

Figure 5 – coefficient de Poisson - comparaison Herezh++/Abaqus (représentation en déformation d'Almansi)

A. Fichier de mise en données Herezh++ - traction uniaxiale

Le fichier ci-après simule un essai de traction uniaxiale sur un cube unitaire 1x1x1 avec une charge suivie d'une décharge telle que la contrainte revienne à 0 via une courbe de charge pour piloter le déplacement. Les paramètres de la loi de comportement ont été déterminés pour avoir l'équivalent E=10000 MPa, ν=0.3, σ_0=100 MPa.

```
dimension 3

niveau_commentaire 3

TYPE_DE_CALCUL
non_dynamique # avec plus visualisation

noeuds
8 NOEUDS

1 0 0 0
2 1 0 0
3 1 1 0
4 0 1 0
5 0 0 1
6 1 0 1
7 1 1 1
8 0 1 1

N1 1
N2 2
N3 3
N4 4
N5 5
N6 6
N7 7
N8 8
NbloqX 1 4 5 8
NbloqY 1 2 5 6
NbloqZ 1 2 3 4
NdpiX 2 3 6 7
NdpiY 3 4 7 8
NdpiZ 5 6 7 8
N_to 1 2 3 4 5 6 7 8

elements
1 ELEMENTS

1 HEXAEDRE LINEAIRE 1 2 3 4 5 6 7 8
```

```
E_to 1


les_courbes_1D
   chargement COURBEPOLYLINEAIRE_1_D
      Debut_des_coordonnees_des_points
        Coordonnee dim= 2 0.  0.
        Coordonnee dim= 2 1.  1.
        Coordonnee dim= 2 1.3 0.891
      Fin_des_coordonnees_des_points

choix_materiaux
E_tout MAT

materiaux
MAT   LOI_ADDITIVE_EN_SIGMA

  ISOHYPERBULK3
    #3K
    25000.

  HYSTERESIS_3D
    np= 2    mu= 3846.15385   Qzero= 81.64966 avec_parametres_de_reglage_

       avec_parametres_de_reglage_

         type_de_resolution_  1  type_calcul_comportement_tangent_ 2
         nb_iteration_maxi_ 30
         nb_dichotomie_maxi_ 20
         tolerance_residu_     1.e-5
         tolerance_residu_rel_ 1.e-4

         tolerance_coincidence_  1.e-4#4
         nb_maxInvCoinSurUnPas_  -20
         mini_Qsig_pour_phase_sigma_Oi_tdt_ 0.1 #10
         mini_rayon_  1.e-1  min_angle_trajet_neutre_ 1.e-1
         possibilite_cosAlphaNegatif_ 0

       fin_parametres_reglage_Hysteresis_

fin_liste_lois_elementaires


masse_volumique
E_tout   1.
```

```
charges


blocages
NbloqX UX
NbloqY UY
NbloqZ UZ
NdpiX 'UX= COURBE_CHARGE: chargement ECHELLE: 0.1'


controle
DELTAtMINI 1.e-6
DELTAtMAXI 0.005
TEMPSFIN 1.3
DELTAt 0.005
ITERATIONS 15
PRECISION 1e-4
SAUVEGARDE   1
MAXINCRE  9999999
NORME Residu/Reaction_et_VarRes
#RESTART    ---

para_pilotage_equi_global

para_syteme_lineaire

para_affichage
FREQUENCE_SORTIE_FIL_DU_CALCUL  1


resultats
COPIE 0
POINTS_INTEGRATION E_tout
Green-Lagrange Almansi Cauchy_global Def_mixte_local Sigma_mixte_local

_fin_point_info_
```

B. Fichier de mise en données Abaqus - traction uniaxiale

Fichier de mise en données Abaqus de la traction uniaxiale sur un cube unitaire 1x1x1 (équivalent Abaqus de la mise en données Herezh++ de l'annexe A)

```
*Heading
**
*Part, name=cube
*End Part
**
```

```
*Assembly, name=Assembly
**
*Instance, name=cube-1, part=cube
*Node, nset=ALL
1, 0, 0, 0
2, 1, 0, 0
3, 1, 1, 0
4, 0, 1, 0
5, 0, 0, 1
6, 1, 0, 1
7, 1, 1, 1
8, 0, 1, 1
*Element, type=C3D8, elset=ALL
1, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8
**
*Nset, nset=N1
1
*Nset, nset=N2
2
*Nset, nset=N3
3
*Nset, nset=N4
4
*Nset, nset=N5
5
*Nset, nset=N6
6
*Nset, nset=N7
7
*Nset, nset=N8
8
*Nset, nset=NBLOQX
1, 4, 5, 8
*Nset, nset=NBLOQY
1, 2, 5, 6
*Nset, nset=NBLOQZ
1, 2, 3, 4
*Nset, nset=NDPIX
2, 3, 6, 7
*Nset, nset=NDPIY
3, 4, 7, 8
*Nset, nset=NDPIZ
5, 6, 7, 8
**
*Solid Section, elset=ALL, material=MAT_EP
1.,
*End Instance
```

```
**
*End Assembly
**
*Material, name=MAT_EP
*Elastic
10000., 0.3
*Plastic
100., 0.
100., 99.
**
**********************************************************************
**
*Step, name=charge, nlgeom=YES, INC=1000000000
*Static
0.005, 1., 1e-08, 0.005
**
*Boundary
cube-1.NBLOQX, 1, 1
cube-1.NBLOQY, 2, 2
cube-1.NBLOQZ, 3, 3
cube-1.NDPIX, 1, 1, 0.1
**
*Restart, write, frequency=0
**
*Output, field
*Node Output
U, RF
*Element Output, directions=YES
LE, PE, PEEQ, S
**
*Output, history, variable=PRESELECT
*End Step
**
**********************************************************************
**
*Step, name=decharge, nlgeom=YES, INC=1000000000
*Static
0.005, 0.3, 1e-08, 0.005
**
*Boundary
cube-1.NBLOQX, 1, 1
cube-1.NBLOQY, 2, 2
cube-1.NBLOQZ, 3, 3
cube-1.NDPIX, 1, 1, 0.0891
**
*Restart, write, frequency=0
**
```

```
*Output, field
*Node Output
U, RF
*Element Output, directions=YES
LE, PE, PEEQ, S
**
*Output, history, variable=PRESELECT
*End Step
```